物理学前沿丛书



杨－巴克斯特方程

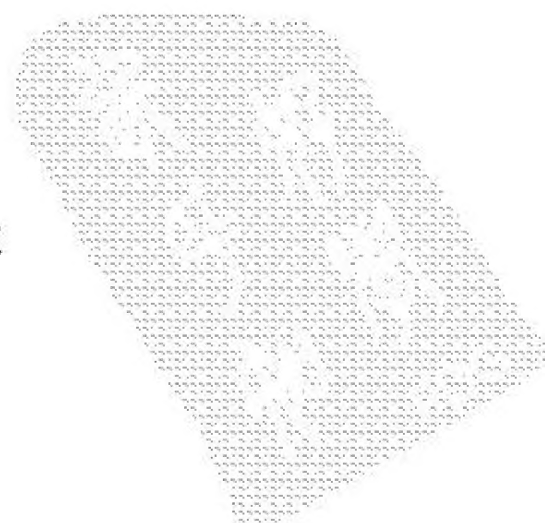
葛墨林 薛康 著

上海科学技术出版社

物理学前沿丛书

杨-巴克斯特方程

葛墨林　薛　康　著



上海科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

杨-巴克斯特方程/葛墨林，薛康著．—上海：上海科学技术出版社，1999.12

(物理学前沿丛书/3)

ISBN 7-5323-5312-5

Ⅰ.杨… Ⅱ.①葛… ②薛… Ⅲ.量子论-数学物理方程，杨-巴克斯特方程 Ⅳ.O413

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999) 第53946号

责任编辑 戴雪文

上海科学技术出版社出版、发行

(上海瑞金二路450号 邮政编码200020)

新华书店上海发行所经销

商务印书馆上海印刷股份有限公司印刷

开本 850×1168 1/32 印张 17 字数:409 000

1999年12月第1版 1999年12月第1次印刷

印数 1—1 500

定价：35.00元



目　录

Contents

第 一 章

经典杨-巴克斯特方程(YBE)简介

正如在讨论量子力学之前，常常要先讨论经典力学的正则形式一样，在讨论量子杨-巴克斯特方程(quantum Yang-Baxter equation，缩写为QYBE)之前，首先简要介绍经典杨-巴克斯特方程(classical Yang-Baxter equation，缩写为CYBE)。从一维场论的观点出发，QYBE来源于量子化的对易关系，而这种对易关系很自然地被看成是经典可积模型的泊松括号的对应形式。非线性可积问题的泊松括号与线性问题的显著不同特点是依赖于CYBE的解。同时，在建立经典可积模型的泊松括号中，必然导致CYBE的存在。

物理中存在着许多经典可积模型，目前常遇到的有十几种。人们长时间的研究主要集中于寻找它们的孤子解，并且形成了很大的数学物理研究分支，有众多的文献(例如可参见文献[1～5])。然而，由经典力学早已了解到：再复杂的具体经典解的发现也无助于力学系统的量子化。为了实现从经典到量子这一过程，必须有经典力学系统的正则形式。在这里，分析力学的原则完全适用于存在Lax-pair的非线性可积系统，所要解决的问题仅是如何将其应用到这些非线性模型中去。在这方面Faddeev学派做出了重要的贡献[6]。只有在此基础上，才能完成非线性理论中从经典泊松括号到量子对易关系的过渡，从而解决可积模型的量子化问题。这里要强调的是，对非线性模型，其量子化常常并不是简单地把泊松括号改

为(—i)因子乘以对易括号。

本章将用最少的篇幅,简明扼要地介绍有关概念,通过 Lax-pair 建立局域的基本泊松括号,进而得到整体转移矩阵的泊松括号。并且从这一过程引出 CYBE,从而体现出它的重要作用。着重点不在于数学上的严格性,主要是为了使不熟悉这一分支的读者了解主要的概念与典型运算方法,便于和以后的量子化理论进行比较。

§1.1　Lax-pair

CYBE 来源于一大类 1 + 1 维(一维空间和一维时间)经典可积物理方程,特别是孤子方程。我们知道,二阶非线性偏微分方程的求解是件非常困难的事,但在实际物理问题中,如果考虑到非线性效应时,求解这种方程又是不可避免的。经常遇到的 KdV 方程、非线性薛定谔方程(NSE)、sine-Gordon 方程(SGE)、Landau-Lifshitz 方程等,都是随时间演化并含有对一维空间坐标二阶偏微商的非线性方程,它们的一个明显特点是存在孤子解。求解这类方程的最有效方法之一是经典逆散射方法(classical inverse scattering method)[1~6]。这种方法的第一步就是通过引入 Lax-pair[1~6],将已知的非线性方程转化为一阶线性微分方程组的可积条件,粗略地说,就是降一阶,而方程的个数扩大一倍。其具体作法是:引入辅助矩阵函数 $\Phi(x, t; \lambda)$,其中 x 为一维空间坐标,t 为时间,λ 为一任意复参数,称为谱参数,使得 $\Phi(x, t;\lambda)$满足方程组:

$$\Phi_x(x, t; \lambda) = V(x, t; \lambda)\, \Phi(x, t; \lambda) \qquad (1.1.1)$$

$$\Phi_t(x, t; \lambda) = M(x, t; \lambda)\, \Phi(x,t; \lambda) \qquad (1.1.2)$$

其中 $\Phi_x = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}$, $\Phi_t = \dfrac{\partial \Phi}{\partial t}$, $V(x, t; \lambda)$和 $M(x, t; \lambda)$是辅助空间上的矩阵函数。由可积性条件:

$$\Phi_{xt}(x, t; \lambda) = \Phi_{tx}(x, t; \lambda) \tag{1.1.3}$$

同时考虑到方程(1.1.1)和(1.1.2)，容易得到 V 和 M 所满足的方程

$$V_t(x, t; \lambda) - M_x(x, t; \lambda) + [V(x, t; \lambda), M(x, t; \lambda)] = 0 \tag{1.1.4}$$

如果对任意 λ，方程(1.1.4)等同于所要研究的非线性物理方程，那么代替该方程，只需要研究方程组(1.1.1)和(1.1.2)。这一对方程称为 Lax-pair。所以，通过 Lax-pair 方式来研究某一确定的非线性方程，其第一步就是要构造出相应的 V 和 M，使得方程(1.1.4)等同于该方程。此外，参数 λ 具有重要的意义，它不但大大地限制了 V 和 M 选择的任意性，而且表明了 Lax-pair 在 λ 复平面上具有解析延拓行为。在许多物理问题中，λ 具有一维动量谱的意义，所以称之为谱参数。

例如，NSE

$$\mathrm{i}\psi_t = -\psi_{xx} + 2c|\psi|^2\psi \tag{1.1.5}$$

其中，$\psi \equiv \psi(x, t)$，ψ^* 是场量 ψ 的复共轭，c 是耦合常数。可选择 (2×2) 矩阵函数：

$$V(x, t; \lambda) = \mathrm{i}\begin{pmatrix} -\dfrac{\lambda}{2} & \sqrt{c}\,\psi^* \\ -\sqrt{c}\,\psi & \dfrac{\lambda}{2} \end{pmatrix} \tag{1.1.6}$$

和

$$M(x, t; \lambda) = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\dfrac{\lambda^2}{2} + \mathrm{i}c|\psi|^2 & \sqrt{c}\,(\mathrm{i}\lambda\psi^* - \psi_x^*) \\ -\sqrt{c}\,(\mathrm{i}\lambda\psi + \psi_x) & -\mathrm{i}\dfrac{\lambda^2}{2} - \mathrm{i}c|\psi|^2 \end{pmatrix} \tag{1.1.7}$$

将(1.1.6)和(1.1.7)式代入方程(1.1.4),对任意λ可以得到如下结果:对角元是恒等式,非对角元部分则给出NSE(1.1.5)式及其复共轭方程。该例中的辅助空间是二维的,因为V与M是二维矩阵。

通过Lax-pair求解经典孤子解早已有熟知的理论,可参阅有关文献[1～6]。这里需要指出的是,单独的经典零曲率方程(1.1.4)只表明了非线性系统的几何可积性质,而几何可积并不一定表示在正则意义下也是可积的,所以要考虑系统的泊松括号。例如,对NSE,场量ψ所满足的泊松括号为

$$\begin{cases}\{\psi(x,t),\ \psi^*(y,t)\}=\mathrm{i}\delta(x-y)\\ \{\psi(x,t),\ \psi(y,t)\}=\{\psi^*(x,t),\ \psi^*(y,t)\}=0\end{cases}\tag{1.1.8}$$

在(1.1.8)式的基础上,可以建立哈密顿量H,

$$H=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x(\psi_x^*\psi_x+c|\psi|^4)\tag{1.1.9}$$

使得运动方程

$$\psi_t=\{H,\ \psi\}\tag{1.1.10}$$

等同于方程(1.1.5),也就是方程(1.1.4)。由此,方程(1.1.2)可用泊松括号和H确定的运动方程(1.1.10)来代替,从而可以主要研究方程(1.1.1)。

在线性理论中,泊松括号连同系统的哈密顿量与运动方程的一致性是通过适当地选择H与泊松括号的一致性得以实现的。从经典力学的角度来看,这一方法是相当自然的。然而在非线性问题中,这件事却变得相当复杂。如前所述,此时代替对非线性方程自身的研究,要首先研究方程(1.1.1),因为它才是线性化的(对辅助矩阵函数Φ而言)。在NSE这个例子中,正则关系(1.1.8)式是对场量ψ而言的,而ψ含在由(1.1.6)式给出的V中,并通过方程

(1.1.1)与 Φ 相联系。换言之,ψ 满足的正则关系与 Φ 满足的正则关系只存在着间接的联系。这是处理非线性问题与处理线性问题的基本区别:现在 Φ 之间的泊松括号才是基本泊松括号,它通过(1.1.1)式又必须与(1.1.8)式相一致。也就是说,为了将非线性系统正则化,必须将 ψ 的泊松括号通过 V 转化为 Φ 的泊松括号。

为此,首先需要将 Φ 用 V 表示出来。为简便起见,省略 t、λ,标记 $\Phi(x) \equiv \Phi(x, t; \lambda)$,以及 $V(x) \equiv V(x, t; \lambda)$。在区间 $[x_1, x_{N+1}]$ 中均匀插入 $N-1$ 个点:$x_2, x_3, \cdots, x_N$,相邻点的间距为 Δ,则格点化后的方程(1.1.1)变为

$$\Phi(x_{i+1}) - \Phi(x_i) = V(x_i)(x_{i+1} - x_i)\Phi(x_i)$$

或

$$\Phi(x_{i+1}) = [1 + V(x_i)(x_{i+1} - x_i)]\Phi(x_i) \tag{1.1.11}$$

利用(1.1.11)式进行逐次迭代,并取 $N\to\infty$, $\Delta\to 0$,可以得到

$$\Phi(x) = \lim_{\substack{N\to\infty \\ \Delta\to 0}} \prod_{i=1}^{\overset{\frown}{N}} [1 + V(x_i)(x_{i+1} - x_i)]\Phi(x_1) \tag{1.1.12a}$$

其中符号 $\frown$ 表示连乘积是按 x_i 的大小由右向左的顺序排列。因为 $V(x_i)$ 是矩阵函数,不同点的 $V(x_i)$ 不能彼此交换,所以排列顺序不能随意改变。(1.1.12a)式的形式称为积-积分[7]。它是指数形式的推广,一般可形式地记为

$$\Phi(x) = P\exp\left\{\int_{x_1}^{x} \mathrm{d}x' V(x')\right\}\Phi(x_1) \tag{1.1.12b}$$

它实际是微分方程(1.1.1)的形式解。

取 $x_1 = -L, x = L$ 和边界条件

$$\Phi(-L) = I \tag{1.1.13}$$

其中 I 是单位矩阵。当 $L \to \infty$ 时,如果极限值

$$T_{\mathrm{L}} \equiv \Phi(L) = P\exp\left\{\int_{-L}^{L} \mathrm{d}x V(x, t; \lambda)\right\} \tag{1.1.14}$$

不依赖于时间 t 与 x，且均匀收敛时，$T_{\mathrm{L}}(\lambda)$称为转移矩阵。它仅依赖于谱参数 λ。如果在实际问题中该极限依赖于(x, t)，那么可以先做代换，使代换后的量不依赖于(x, t)，即(1.1.14)形式，再按(1.1.14)式处理。

下面要解决的问题是：已知非线性方程中的场量满足某种泊松括号，那么相应的 $T_{\mathrm{L}}(\lambda)$所满足的泊松括号具有什么样的形式？为了讨论这一问题，首先要注意到，不同的场量具有不同形式的泊松括号(例如，旋量场的不同分量、标量场等的等时泊松括号各不相同)，然而从 Lax-pair 形式来看，它们都统一在 V 中，并且$T_{\mathrm{L}}(\lambda)$又可以由 V 表示出来。因此，所要做的第一步是将泊松括号用与具体模型无关的方式用 V 写出来，它将 $\{\psi(x, t), \psi^*(y, t)\} = \delta(x - y)$ 与$\{\varphi(x, t), \varphi(y, t)\} = \delta(x - y)$ 等不同类型泊松括号统一起来。

§1.2　基本泊松括号

假设某种李代数的基矢 I_a 满足对易关系

$$[I_a, I_b] = c_{ab}^c I_c \tag{1.2.1}$$

其中 c_{ab}^c 为结构常数，相重指标表示求和。如果某场函数满足$\{A_a(\boldsymbol{x}, t), A_b(\boldsymbol{y}, t)\} = c_{ab}^c A_c(\boldsymbol{x}, t)\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$，那么矩阵函数$A(\boldsymbol{x}, t) = A^a(\boldsymbol{x}, t)I_a$ 应当满足什么样的对易关系？这相当于把分量形式的泊松括号用矩阵形式写出来。类似地，规范场理论一般代数函数可写为：

$$A(\boldsymbol{x}, t; \lambda) = A^a(\boldsymbol{x}, t; \lambda)I_a \tag{1.2.2}$$

其中 $A^a(\boldsymbol{x}, t; \lambda)$是场量的函数，而$\{I_a\}$为辅助空间基矢，一般为半单李代数生成元。同时引入张量积

$$r(\lambda) = f^{ab}(\lambda) I_a \otimes I_b \tag{1.2.3}$$

其中 $f^{ab}(\lambda)$仅是 λ 的函数，与场量和时空坐标无关。利用矩阵张量积 $A \otimes B$ 的矩阵元形式：

$$(A \otimes B)_{ik;jl} = A_{ij} B_{kl}$$

有

$$\begin{aligned}
&[r(\lambda - \mu), A(\boldsymbol{x}, t; \lambda) \otimes I]_{ik, jl} \\
&= f^{ab}(\lambda - \mu)[I_a, A(\boldsymbol{x}, t; \lambda)]_{ij}(I_b)_{kl} \\
&= f^{db}(\lambda - \mu) c^a_{dc} A^c(\boldsymbol{x}, t; \lambda)(I_a \otimes I_b)_{ik, jl}
\end{aligned}$$

即

$$[r(\lambda - \mu), A(\boldsymbol{x}, t; \lambda) \otimes I] = f^{db}(\lambda - \mu) c^a_{dc} A^c(\boldsymbol{x}, t; \lambda)(I_a \otimes I_b) \tag{1.2.4}$$

类似上面的计算，可以得到

$$[r(\lambda - \mu), I \otimes A(\boldsymbol{y}, t; \mu)] = f^{ad}(\lambda - \mu) c^b_{dc} A^c(\boldsymbol{y}, t; \mu)(I_a \otimes I_b) \tag{1.2.5}$$

从而有

$$\begin{aligned}
&[r(\lambda - \mu), A(\boldsymbol{x}, t; \lambda) \otimes I + I \otimes A(\boldsymbol{y}, t; \mu)] \\
&= (f^{db}(\lambda - \mu) c^a_{dc} A^c(\boldsymbol{x}, t; \lambda) \\
&\quad + f^{ad}(\lambda - \mu) c^b_{dc} A^c(\boldsymbol{y}, t; \mu))(I_a \otimes I_b)
\end{aligned} \tag{1.2.6}$$

另一方面注意到李代数基矢$\{I_a\}$的矩阵元并不参加泊松括号，$A(\boldsymbol{x}, t; \lambda)$的泊松括号可写成

$$\begin{aligned}
&\{A(\boldsymbol{x}, t; \lambda) \underset{,}{\otimes} A(\boldsymbol{y}, t; \mu)\}_{ik, jl} \\
&\equiv \{A_{ij}(\boldsymbol{x}, t; \lambda), A_{kl}(\boldsymbol{y}, t; \mu)\}
\end{aligned}$$

$$= \{A^a(\boldsymbol{x}, t; \lambda)(I_a)_{ij}, A^b(\boldsymbol{y}, t; \mu)(I_b)_{kl}\}$$

$$= \{A^a(\boldsymbol{x}, t; \lambda), A^b(\boldsymbol{y}, t; \mu)\}(I_a \otimes I_b)_{ik, jl}$$

即成立：

$$\{A(\boldsymbol{x}, t; \lambda) \underset{,}{\otimes} A(\boldsymbol{y}, t; \mu)\}$$

$$= \{A^a(\boldsymbol{x}, t; \lambda), A^b(\boldsymbol{y}, t; \mu)\}(I_a \otimes I_b) \tag{1.2.7}$$

比较(1.2.6)式和(1.2.7)式，得到如下结果：如果 $A^a(\boldsymbol{x}, t; \lambda)$满足泊松括号

$$\{A^a(\boldsymbol{x}, t; \lambda), A^b(\boldsymbol{y}, t; \mu)\}$$

$$= (f^{db}(\lambda - \mu)c^a_{dc}A^c(\boldsymbol{x}, t; \lambda)$$

$$+ f^{ad}(\lambda - \mu)c^b_{dc}A^c(\boldsymbol{y}, t; \mu))\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \tag{1.2.8}$$

则有[6, 8, 9]

$$\{A(\boldsymbol{x}, t; \lambda) \underset{,}{\otimes} A(\boldsymbol{y}, t; \mu)\}$$

$$= [r(\lambda - \mu), A(\boldsymbol{x}, t; \lambda) \otimes I$$

$$+ I \otimes A(\boldsymbol{y}, t; \mu)]\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \tag{1.2.9}$$

注意在上述推导中对空间的维数并没有限制，如果将(1.2.9)式与方程(1.1.1)中的 V 相联系时，由于可积性条件(1.1.3)的限制，空间维数便限制为一维。在上述一般讨论中，令 $A = V$，则得到 $V(x, t; \lambda)$所满足的基本泊松括号的矩阵积形式：

$$\{V(x, t; \lambda) \underset{,}{\otimes} V(y, t; \mu)\}$$

$$= [r(\lambda - \mu), V(x, t; \lambda) \otimes I$$

$$+ I \otimes V(y, t; \mu)]\delta(x - y) \tag{1.2.10}$$

条件(1.2.8)变为

$$\{V^a(x, t; \lambda), V^b(y, t; \mu)\}$$

$$= (f^{db}(\lambda-\mu)c^{a}_{dc}V^{c}(x,t;\lambda)$$

$$+ f^{ad}(\lambda-\mu)c^{b}_{dc}V^{c}(y,t;\mu))\delta(x-y) \qquad (1.2.11)$$

对一般李代数，可选 $I^{a}=g^{ab}I_{b}$，$g^{ab}=\delta^{ab}$。表面上看(1.2.10)式比通常泊松括号形式复杂了，但(1.2.10)式在很大一类问题中是与模型无关的。只要写出 Lax-pair((1.1.1)式)，(1.2.10)式就概括了现在已知的许多泊松括号。

下面给出几个常见的非线性可积模型的 $r(\lambda)$ 矩阵[6,10]。它们的共同特点是：李代数是 $SL(2)$，基矢 I_{a} 选为泡利矩阵 $\sigma_{a}(a=1,2,3)$，满足对易关系：

$$[\sigma_{a},\sigma_{b}]=2\mathrm{i}\epsilon_{abc}\sigma_{c} \qquad (1.2.12)$$

同时，$f^{ab}(\lambda)=\delta^{ab}f^{a}(\lambda)$，相应的条件(1.2.5)式蜕化为

$$\{V^{a}(x,t;\lambda),V^{b}(y,t;\mu)\}$$

$$=2\mathrm{i}\epsilon_{abc}(f^{b}(\lambda-\mu)V^{c}(x,t;\lambda)$$

$$-f^{a}(\lambda-\mu)V^{c}(y,t;\mu))\delta(x-y) \qquad (1.2.13)$$

【例 1】 NSE(1.1.6)式可以写成

$$V(x,t;\lambda)=V^{a}(x,t;\lambda)\sigma_{a} \qquad (1.2.14)$$

其中

$$V^{1}(x,t;\lambda)=\frac{\mathrm{i}\sqrt{c}}{2}(\psi^{*}-\psi),$$

$$V^{2}(x,t;\lambda)=-\frac{\sqrt{c}}{2}(\psi^{*}+\psi),$$

$$V^{3}(x,t;\lambda)=-\frac{\mathrm{i}\lambda}{2} \qquad (1.2.15)$$

选取 $f^{a}(\lambda)$ 为

$$f^{a}(\lambda)=-\frac{c}{2\lambda} \qquad (1.2.16)$$

由 ψ 满足的泊松括号(1.1.8)、(1.2.15)和(1.2.16)式，容易验证(1.2.13)式成立。

注意到 $r(\lambda)$ 矩阵是出现在(1.2.10)式中的矩阵对易括号中，从而允许附加一单位矩阵项。由此，对 NSE，$r(\lambda)$ 具有如下形式：

$$
\begin{aligned}
r(\lambda) &= -\frac{c}{2\lambda} I \otimes I + f^{ab}(\lambda)\sigma_a \otimes \sigma_b \\
&= -\frac{c}{2\lambda}(I \otimes I + \sigma_a \otimes \sigma_a) \\
&= -\frac{c}{\lambda}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{c}{\lambda} P
\end{aligned}
\tag{1.2.17}
$$

其中 P 为置换矩阵的 4×4 表示。

【例 2】 SGE. 此时运动方程为

$$
\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + \frac{m^2}{\beta}\sin\beta\varphi = 0 \tag{1.2.18}
$$

其中 m 是质量，β 是耦合常数。场量为标量场 φ，其共轭动量 $\pi = \varphi_t$。它们遵从泊松括号：

$$
\begin{cases}
\{\pi(x, t), \varphi(y, t)\} = \delta(x - y) \\
\{\varphi(x, t), \varphi(y, t)\} = \{\pi(x, t), \pi(y, t)\} = 0
\end{cases}
\tag{1.2.19}
$$

在(1.2.19)式基础上建立的哈密顿量 H 为：

$$
H = \int \mathrm{d}x \left(\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}\varphi_x^2 + \frac{m^2}{\beta^2}(1 - \cos\beta\varphi) \right) \tag{1.2.20}
$$

对 SGE，$V(x, t; \lambda)$ 构造为

$$V(x,t;\lambda)=-\frac{\mathrm{i}}{4}\Big(m(X+X^{-1})\sin\frac{\beta\varphi}{2}\sigma_1$$

$$+m(X-X^{-1})\cos\frac{\beta\varphi}{2}\sigma_2+\beta\pi\sigma_3\Big)\qquad(1.2.21)$$

其中 $X=\mathrm{e}^{\lambda}$。选取

$$\begin{cases}f^1(\lambda)=f^2(\lambda)=\dfrac{1}{2}\alpha(\lambda),\ f^3(\lambda)=-\dfrac{1}{2}\beta(\lambda)\\ \alpha(\lambda)=-\dfrac{\beta^2x}{4(x^2-1)},\ \beta(\lambda)=\dfrac{\beta^2(x^2+1)}{8(x^2-1)}\end{cases}\qquad(1.2.22)$$

利用(1.2.19)、(1.2.21)和(1.2.22)式，可以验证(1.2.13)式成立。也就是说形如(1.2.19)式的泊松括号也统一在(1.2.13)式之中。此时相应的 $r(\lambda)$ 矩阵可写成：

$$r(\lambda)=\frac{1}{2}\beta(\lambda)I\otimes I+f^a(\lambda)\sigma_a\otimes\sigma_a$$

$$=\begin{pmatrix}0&&&\\&\beta(\lambda)&\alpha(\lambda)&\\&\alpha(\lambda)&\beta(\lambda)&\\&&&0\end{pmatrix}\qquad(1.2.23)$$

【例 3】 Landau-Lifshitz 方程。运动方程为

$$\boldsymbol{S}_t=\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{S}_{xx}+\boldsymbol{S}\times J\boldsymbol{S}\qquad(1.2.24)$$

其中 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{S}(x,t)=(S^1,S^2,S^3)$，$|\boldsymbol{S}|=1$，$J$ 是耦合常数，并且 $J=\mathrm{diag}(J_1,J_2,J_3)$，$J\boldsymbol{S}=(J_1S_1,J_2S_2,J_3S_3)$。场量 $S^a(a=1,2,3)$ 满足泊松括号：

$$\{S^a(x,t),S^b(y,t)\}=\varepsilon_{abc}S^c(x,t)\delta(x-y)\qquad(1.2.25)$$

相应的哈密顿量取为：

$$H = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x((\boldsymbol{S}_x)^2 - \boldsymbol{S}\cdot J\boldsymbol{S} + J_3) \qquad (1.2.26)$$

对耦合常数 J 来说，有三种可能情况：$J_1 \neq J_2 \neq J_3$，$J_1 = J_2 = 1 \neq J_3$ 和 $J_1 = J_2 = J_3 = 1$。这里仅考虑后两种情况。

当 $J_1 = J_2 = 1 \neq J_3$ 时，$V(x, t; \lambda)$具有如下形式：

$$V(x, t; \lambda) = \mathrm{i}J_3 W_a(\lambda) S^a \sigma_a \qquad (1.2.27)$$

相应的 $f^a(\lambda)$选取为

$$f^a(\lambda) = -\mathrm{i}J_3 W_a(\lambda) \qquad (1.2.28)$$

$W_a(\lambda)$由下式给出：

$$W_1(\lambda) = W_2(\lambda) = \frac{1}{\sin\lambda},\ W_3(\lambda) = \frac{\cos\lambda}{\sin\lambda} \qquad (1.2.29)$$

从而有

$$r(\lambda) = \mathrm{i}J_3 W_3(\lambda) I \otimes I + f^a(\lambda)\sigma_a \otimes \sigma_a$$

$$= 2\mathrm{i}J_3 \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & W_3(\lambda) & -W_1(\lambda) & \\ & -W_1(\lambda) & W_3(\lambda) & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \qquad (1.2.30)$$

当 $J_1 = J_2 = J_3 = 1$ 时，$V(x, t; \lambda)$具有如下形式：

$$V(x, t; \lambda) = \frac{\mathrm{i}}{\lambda} S^a \sigma_a \qquad (1.2.31)$$

此时，$f^a(\lambda) = -\mathrm{i}/\lambda$，从而得到

$$r(\lambda) = -\frac{\mathrm{i}}{\lambda} I \otimes I + f^a(\lambda)\sigma_a \otimes \sigma_a$$

$$= -\frac{2i}{\lambda}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}. \qquad (1.2.32)$$

(1.2.32)式和(1.2.17)式具有相同的形式。容易验证，上面所给出的 V 和 $f^{ab}(\lambda)$ 使(1.2.25)式与(1.2.13)式相一致。

通过这些例子可以看出，前面所建立的基本泊松括号(1.2.10)式对存在 Lax-pair 的经典可积模型具有普遍意义，它与 V 的具体形式无关，仅依赖于 $r(\lambda)$ 矩阵。不同类型的 $r(\lambda)$(指 $f^{ab}(\lambda)$ 对 λ 的函数形式不同)对应于不同的非线性模型，而且同一类型的 $r(\lambda)$ 也可以相应于不同的非线性模型。例如 NSE 和 $J_1 = J_2 = J_3$ 时的 Landau-Lifshitz 方程对应同一个 $r(\lambda)$。这样，(1.2.10)式代表了非常广的一大类泊松括号，并且是与模型无关的。其主要限制是右端的 δ 函数，它是定域的，文献中称为超定域(Ultra-locality)。经典可积模型所特有的 $r(\lambda)$ 矩阵就是下一节将要介绍的 CYBE 的解。

§1.3 经典杨-巴克斯特方程(CYBE)

以上简要地介绍了 Faddeev 等人有关经典可积理论的基本泊松括号和一些典型运算，它们可以总结为以下主要关系式：

(1) Lax-pair 中与坐标微商相关的部分(1.1.1)式为

$$\Phi_x(x, t; \lambda) = V(x, t; \lambda)\Phi(x, t; \lambda)$$

(2) $V(x, t; \lambda)$遵从的基本泊松括号(1.2.10)式为

$$\{V(x, t; \lambda) \underset{,}{\otimes} V(y, t; \mu)\}$$

$$= [r(\lambda - \mu), V(x, t; \lambda) \otimes I + I \otimes V(y, t; \mu)]\delta(x - y)$$

(1.2.10)式概括了超定域模型的所有已知泊松括号,其中$r(\lambda)$矩阵起着决定性的作用。由于泊松括号满足Jacobi恒等式,所以$r(\lambda)$矩阵不能是任意的,必然受到某种关系的限制。这种限制关系式称为CYBE。

由(1.1.17)式与(1.1.18)式可以看出,$r(\lambda)$本质上是李群结构常数的扩展,可以想到CYBE是该结构常数满足的Jacobi等式的扩展。证明CYBE的过程是一种典型的张量运算,为方便不熟悉此领域的读者,我们简要地给出计算过程。

在直积辅助空间上引入$\overset{i}{V}(u_i)\equiv\overset{i}{V}(x_i, t; u_i)$,$i=1, 2, 3$,其中$x_i$是空间坐标,$u_i$是谱参数,并且

$$\overset{1}{V}=V\otimes I\otimes I, \overset{2}{V}=I\otimes V\otimes I, \overset{3}{V}=I\otimes I\otimes V \tag{1.3.1}$$

采用如上标记,基本泊松括号改写为

$$\left\{\overset{i}{V}(u_i),\overset{j}{V}(u_j)\right\}=\left[r_{ij}(u_{ij}), \overset{i}{V}(u_i)+\overset{j}{V}(u_j)\right]\delta(x_i-x_j) \tag{1.3.2}$$

其中$u_{ij}\equiv u_i-u_j$, u_i为谱参数。由上式左端满足Jacobi恒等式,于是可写为

$$\left\{\overset{1}{V}(u_1), \{\overset{2}{V}(u_2), \overset{3}{V}(u_3)\}\right\}+\left\{\overset{2}{V}(u_2), \{\overset{3}{V}(u_3), \overset{1}{V}(u_1)\}\right\}$$
$$+\left\{\overset{3}{V}(u_3), \{\overset{1}{V}(u_1), \overset{2}{V}(u_2)\}\right\}=0 \tag{1.3.3}$$

利用(1.3.2)式,并注意到不同辅助(矩阵)空间不发生次序问题,即:

$$\left[r_{ij}(u_{ij}), \overset{k}{V}(u_k)\right]=0, k\neq i, j$$

可直接计算出:

$$\{\overset{1}{V}(u_1),\ \{\overset{2}{V}(u_2),\ \overset{3}{V}(u_3)\}\}$$

$$= \Big(\big[\overset{1}{V}(u_1) + \overset{2}{V}(u_2) + \overset{3}{V}(u_3),\ [r_{12}(u_{12}),\ r_{23}(u_{23})]\big]$$

$$+ \big[r_{12}(u_{12}),\ [r_{23}(u_{23}), \overset{2}{V}(u_2) + \overset{3}{V}(u_3)]\big] + \big[r_{23}(u_{23}),$$

$$[r_{13}(u_{13}),\ \overset{1}{V}(u_1) + \overset{2}{V}(u_2)]\big]\Big) \delta(x_1 - x_2) \cdot \delta(x_2 - x_3)$$

$$\{\overset{2}{V}(u_2),\ \ \{\overset{3}{V}(u_3),\ \overset{1}{V}(u_1)\}\}$$

$$= \Big(\big[\overset{1}{V}(u_1) + \overset{2}{V}(u_2) + \overset{3}{V}(u_3),\ [r_{13}(u_{13}), r_{23}(u_{23})]\big]$$

$$+ \big[r_{13}(u_{13}), [r_{12}(u_{12}), \overset{1}{V}(u_1) + \overset{2}{V}(u_2)]\big] - \big[r_{23}(u_{23}),$$

$$[r_{13}(u_{13}), \overset{1}{V}(u_1) + \overset{3}{V}(u_3)]\big]\Big) \delta(x_1 - x_2)\delta(x_2 - x_3)$$

$$\{\overset{3}{V}(u_3),\ \{\overset{1}{V}(u_1),\ \overset{2}{V}(u_2)\}\}$$

$$= \Big(\big[\overset{1}{V}(u_1) + \overset{2}{V}(u_2) + \overset{3}{V}(u_3),\ [r_{12}(u_{12}),\ r_{13}(u_{13})]\big]$$

$$- \big[r_{12}(u_{12}), [r_{23}(u_{23}), \overset{2}{V}(u_2) + \overset{3}{V}(u_3)]\big] - \big[r_{13}(u_{13}),$$

$$[r_{12}(u_{12}), \overset{1}{V}(u_1) + \overset{2}{V}(u_2)]\big]\Big) \delta(x_1 - x_2)\delta(x_2 - x_3)$$

从而得到

$$\big[\overset{1}{V}(u_1) + \overset{2}{V}(u_2) + \overset{3}{V}(u_3),\ [r_{12}(u_{12}),\ r_{23}(u_{23})]$$

$$+ [r_{12}(u_{12}),\ r_{13}(u_{13})] + [r_{13}(u_{13}), r_{23}(u_{23})]\big] = 0$$

由于$\overset{i}{V}(u_i)(i = 1, 2, 3)$是三个不同空间上的矩阵函数,包含了所有李代数生成元,必有

$$[r_{12}(u_{12}),\ r_{23}(u_{23})] + [r_{12}(u_{12}),\ r_{13}(u_{13})]$$

$$+ [r_{13}(u_{13}),\ r_{23}(u_{23})] = 常数 \times I$$

对上式取迹，并注意到对有限维矩阵 A 与 B，有 $\mathrm{tr}AB=\mathrm{tr}BA$，则方程的左端迹为零，即导致常数等于零。这样就得到 $r(\lambda)$矩阵所满足的 CYBE：

$$[r_{12}(u_{12}),\ r_{23}(u_{23})]+[r_{12}(u_{12}),\ r_{13}(u_{13})]+[r_{13}(u_{13}),\ r_{23}(u_{23})]=0 \qquad (1.3.4)$$

在文献中经常遇到的另外一种写法是，令 $u_{12}=u$，$u_{23}=v$，CYBE 为

$$[r_{12}(u),\ r_{23}(v)]+[r_{12}(u),\ r_{13}(u+v)]+[r_{13}(u+v),\ r_{23}(v)]=0 \qquad (1.3.5)$$

通过讨论，我们可从两个不同的角度研究正则关系：一是从场量分量形式出发，通过场量满足的泊松括号建立(1.2.10)式形式的基本泊松括号，然后求解(1.2.11)式，得到相应的 $r(\lambda)$矩阵；二是首先求解 CYBE((1.3.4)式)，找到一个解，这个解是李代数的基矢的直积的组合，也就是(1.2.3)式形式的 $r(\lambda)$矩阵，再由基本泊松括号(1.2.10)式确定场量所应满足的泊松括号。

形如(1.3.5)式的 CYBE 允许有各种类型的解，当考虑形如(1.2.3)式的形式时，对给定的半单李代数的基$\{I_a\}$，$r(u)$一般取为 $\{I_a\otimes I_b\}$ 张量空间，并对每个张量空间基 $I_a\otimes I_b$ 再乘以依赖于谱参数 u 的函数 $f^{ab}(u)$，再对 a，b 这些李代数指标求和。

A. A. Belavin 与 V. G. Drinfeld 曾对这种一般形式解的性质作过详细的讨论[10]。粗略地说，可分为三种类型，即有理形式、三角形式与椭圆形式。本节的例子中所遇到的 $r(u)$均为有理形式。所谓有理形式就包括了 $f^{ab}(u)$对 u 是极点形式，例如 $f^{ab}(u)=\dfrac{1}{u}\delta^{ab}$。而三角形式指 $f^{ab}(u)$对 u 为周期函数，椭圆形式则除谱参数 u 之外还依赖于另一独立参数 p，而 $f^{ab}(u)$为依赖于 u 与 p 的双周期函数。在大多数一维物理模型中，简单的有理形式是最常见的。尤其是极

点形式，它对应许多有意义的物理问题。

有了基本泊松括号的矩阵形式（(1.2.10)式），下面讨论转移矩阵 $T_L(\lambda)$所满足的泊松括号。

§1.4 转移矩阵 $T_L(\lambda)$满足的泊松括号

基本泊松括号(1.2.10)式描述的是场量系统的局域性质，而 $T_L(\lambda)$所描述的是(1.1.1)式的微分方程解的极限行为。下面所要讨论的是如何通过基本泊松括号来建立 $T_L(\lambda)$所遵从的泊松括号。由于 $T_L(\lambda)$是 Φ 的极限，所以首先从方程(1.1.1)出发讨论 Φ 的泊松括号。

为简便起见，记 $\Phi(x,\lambda)\equiv\Phi(x,t;\lambda)$。类似(1.3.1)式，标记 $\overset{1}{\Phi}=\Phi\otimes I$，$\overset{2}{\Phi}=I\otimes\Phi$。由

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\left\{\overset{1}{\Phi}(x,\lambda),\overset{2}{\Phi}(y,\mu)\right\}&=\left\{\overset{1}{\Phi}(x,\lambda),\overset{2}{\Phi}_y(y,\mu)\right\}\\
&=\left\{\overset{1}{\Phi}(x,\lambda),\overset{2}{V}(y,\mu)\overset{2}{\Phi}(y,\mu)\right\}\\
&=\left\{\overset{1}{\Phi}(x,\lambda),\overset{2}{V}(y,\mu)\right\}\overset{2}{\Phi}(y,\mu)\\
&\quad+\overset{2}{V}(y,\mu)\left\{\overset{1}{\Phi}(x,\lambda),\overset{2}{\Phi}(y,\mu)\right\}
\end{aligned}
\tag{1.4.1}
$$

并注意到边界条件(1.1.13)式，可以直接验证(1.4.1)式的解是：

$$
\begin{aligned}
&\left\{\overset{1}{\Phi}(x,\lambda),\overset{2}{\Phi}(y,\mu)\right\}\\
&=\overset{2}{\Phi}(y,\mu)\int_{-L}^{y}\mathrm{d}y'\overset{2}{\Phi}{}^{-1}(y',\mu)\left\{\overset{1}{\Phi}(x,\lambda),\overset{2}{V}(y',\mu)\right\}\overset{2}{\Phi}(y',\mu)
\end{aligned}
\tag{1.4.2}
$$

类似于(1.4.1)式的推导，有：

$$
\frac{\partial}{\partial x}\left\{\overset{1}{\Phi}(x,\lambda),\overset{2}{V}(y,\mu)\right\}
$$

$$= \{ \overset{1}{V}(x, \lambda), \overset{2}{V}(y, \mu) \} \overset{1}{\Phi}(x,\lambda) + \overset{1}{V}(x, \lambda) \{ \overset{1}{\Phi}(x, \lambda), \overset{2}{V}(y, \mu) \} \tag{1.4.3}$$

其解为

$$\{ \overset{1}{\Phi}(x, \lambda), \overset{2}{V}(y, \mu) \} = \overset{1}{\Phi}(x,\lambda) \int_{-L}^{x} \mathrm{d}x' \overset{1}{\Phi}{}^{-1}(x',\lambda) \{ \overset{1}{V}(x',\lambda), \overset{2}{V}(y,\mu) \} \overset{1}{\Phi}(x',\lambda) \tag{1.4.4}$$

将(1.2.10)式代入(1.4.4)式，可以得到：

$$\{ \overset{1}{\Phi}(x, \lambda), \overset{2}{V}(y, \mu) \} = \theta(x-y) \overset{1}{\Phi}(x, \lambda) \overset{1}{\Phi}{}^{-1}(y, \lambda) \left[r(\lambda-\mu), \overset{1}{V}(y, \lambda) + \overset{2}{V}(y, \mu) \right] \overset{1}{\Phi}(y, \lambda) \tag{1.4.5}$$

其中 $\theta(x-y)$ 是阶跃函数，当 $x > y$ 时为 1，而 $x < y$ 时为零。注意到

$$\frac{\partial}{\partial x} \Phi^{-1}(x, \lambda) = -\Phi^{-1}(x, \lambda) V(x, \lambda)$$

则有

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\overset{i}{\Phi}{}^{-1}(x, \lambda) r(\lambda-\mu) \overset{i}{\Phi}(x, \lambda) \right) = \overset{i}{\Phi}{}^{-1}(x, \lambda) \left[r(\lambda-\mu), \overset{i}{V}(x, \lambda) \right] \overset{i}{\Phi}(x, \lambda) \quad (i = 1, 2)$$

从而可以推导出

$$\{ \overset{1}{\Phi}(x, \lambda), \overset{2}{V}(y, \mu) \} = \theta(x-y) \overset{1}{\Phi}(x, \lambda) \overset{1}{\Phi}{}^{-1}(y, \lambda) \left(\overset{1}{\Phi}(y, \lambda) \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\overset{1}{\Phi}{}^{-1}(y, \lambda) r(\lambda-\mu) \overset{1}{\Phi}(y, \lambda) \right) \overset{1}{\Phi}{}^{-1}(y, \lambda) \right.$$

$$
\begin{aligned}
&+ \overset{2}{\Phi}(y, \mu) \frac{\partial}{\partial y}\Big(\overset{2}{\Phi}^{-1}(y, \mu) r(\lambda - \mu) \\
&\cdot \overset{2}{\Phi}(y, \mu)\Big) \overset{2}{\Phi}^{-1}(y, \mu)\Big) \overset{1}{\Phi}(y, \lambda) \\
&= \theta(x - y) \overset{1}{\Phi}(x, \lambda) \overset{2}{\Phi}(y, \mu) \Big(\overset{2}{\Phi}^{-1}(y, \mu) \\
&\cdot \frac{\partial}{\partial y}\Big(\overset{1}{\Phi}^{-1}(y, \lambda) r(\lambda - \mu) \overset{1}{\Phi}(y, \lambda)\Big) \overset{2}{\Phi}(y, \mu) \\
&+ \overset{1}{\Phi}^{-1}(y, \lambda) \frac{\partial}{\partial y}\Big(\overset{2}{\Phi}^{-1}(y, \mu) r(\lambda - \mu) \overset{2}{\Phi}(y, \mu)\Big) \\
&\cdot \overset{1}{\Phi}(y, \lambda)\Big) \overset{2}{\Phi}^{-1}(y, \mu) \\
&= \theta(x - y) \overset{1}{\Phi}(x, \lambda) \overset{2}{\Phi}(y, \mu) \frac{\partial}{\partial y}\Big(\overset{1}{\Phi}^{-1}(y, \lambda) \overset{2}{\Phi}^{-1}(y, \mu) \\
&\cdot r(\lambda - \mu) \overset{1}{\Phi}(y, \lambda) \overset{2}{\Phi}(y, \mu)\Big) \overset{2}{\Phi}^{-1}(y, \mu) \qquad (1.4.6)
\end{aligned}
$$

在上式推导的最后一步,使用了关系式:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial y}\Big(\overset{1}{\Phi}^{-1}(y, \lambda) \overset{2}{\Phi}^{-1}(y, \mu) r(\lambda - \mu) \overset{1}{\Phi}(y, \lambda) \overset{2}{\Phi}(y, \mu)\Big) \\
&= \overset{2}{\Phi}^{-1}(y, \mu) \frac{\partial}{\partial y}\Big(\overset{1}{\Phi}^{-1}(y, \lambda) r(\lambda - \mu) \overset{1}{\Phi}(y, \lambda)\Big) \overset{2}{\Phi}(y, \mu) \\
&+ \overset{1}{\Phi}^{-1}(y,\lambda) \frac{\partial}{\partial y}\Big(\overset{2}{\Phi}^{-1}(y,\mu) r(\lambda - \mu) \overset{2}{\Phi}(y,\mu)\Big) \overset{1}{\Phi}(y,\lambda)
\end{aligned}
$$

将(1.4.6)式代入(1.4.2)式,得到 Φ 的泊松括号:

$$
\begin{aligned}
&\Big\{ \overset{1}{\Phi}(x, \lambda), \overset{2}{\Phi}(y, \mu) \Big\} \\
&= \overset{2}{\Phi}(y, \mu) \overset{1}{\Phi}(x, \lambda) \int_{-L}^{y} \mathrm{d}y' \theta(x - y') \\
&\cdot \frac{\partial}{\partial y'}\Big(\overset{1}{\Phi}^{-1}(y', \lambda) \overset{2}{\Phi}^{-1}(y', \mu) r(\lambda - \mu) \overset{1}{\Phi}(y', \lambda) \overset{2}{\Phi}(y', \mu)\Big) \\
&\qquad (1.4.7)
\end{aligned}
$$

当 $x>y$ 时，并取 $y=L\to\infty$，(1.4.7)式给出：

$$\{\overset{1}{T}_L(\lambda),\overset{2}{T}_L(\mu)\}=\left[r(\lambda-\mu),\overset{1}{T}_L(\lambda)\overset{2}{T}_L(\mu)\right]\quad(1.4.8)$$

利用 $\{A\underset{,}{\otimes}B\}=\{\overset{1}{A},\overset{2}{B}\}$，以及 $(A\otimes B)_{ij,kl}=A_{ik}B_{jl}$，上式等同于：

$$\{T_L(\lambda)\underset{,}{\otimes}T_L(\mu)\}=[r(\lambda-\mu),T_L(\lambda)\otimes T_L(\mu)]\quad(1.4.9)$$

这就是转移矩阵 $T_L(\lambda)$遵从的泊松括号。

这里需要指出的是，以上讨论仅对基本泊松括号中出现 δ 函数时是正确的，称为超局域性(ultra-locality)。如果在场量的泊松括号中出现 $\delta'(x-y)$，那么(1.2.10)式不再成立，当然(1.4.8)式亦不成立，这时将破坏超局域性。

以上简要地介绍了一维空间的经典可积场论的正则形式，数学上虽不严格，但物理上可接受的。它很适合于向量子理论的过渡。下面简明地阐述与量子理论相关的重要性质。

1) 设 $T_L(\lambda)$中李代数基矢$\{I_a\}$为 $N\times N$ 表示，由于 $r(\lambda)$矩阵占据两个空间，所以是$N^2\times N^2$矩阵。由于对两个矩阵的张量积取迹等于两者分别取迹的乘积，因而(1.4.8)式给出：

$$\begin{aligned}\{\mathrm{tr}T_L(\lambda),\mathrm{tr}T_L(\mu)\}&=\{\mathrm{tr}_1\overset{1}{T}_L(\lambda),\mathrm{tr}_2\overset{2}{T}_L(\mu)\}\\&=\mathrm{tr}_{12}\big(r(\lambda-\mu)\overset{1}{T}_L(\lambda)\overset{2}{T}_L(\mu)\\&\quad-\overset{1}{T}_L(\lambda)\overset{2}{T}_L(\mu)r(\lambda-\mu)\big)\\&=0\end{aligned}\quad(1.4.10)$$

也就是说，$\tau(\lambda)\equiv\mathrm{tr}T_L(\lambda)$ 对 λ 的展开式

$$\tau(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n}\tau^{(n)}\quad(1.4.11)$$

中，$\{\tau^{(m)}\}_{n=0}^{\infty}$ 的泊松括号为零：

$$\{\tau^{(n)}, \tau^{(m)}\} = 0 \tag{1.4.12}$$

它表明系统存在无穷多个守恒量，可以选取其中的某一个(或几个的线性组合)作为系统的哈密顿量 H，其余的 $\tau^{(n)}$ 与 H 的泊松括号为零，即为守恒量。也可以用 $\tau(\lambda)$的函数对 λ 作级数展开，展开系数即构成守恒量的集合。一般情况下，(1.4.11)式形式的展开是到 λ 的无穷阶，但这并不是必须的。如果解出的 $T_L(\lambda)$是 λ 的多项式，那么守恒量就是有限个。在后面的量子理论将会遇到这样的例子。无穷多守恒量是一维孤子解的特性之一，由于限制很严，所以两个孤子碰撞后，仍保持各自形态。

2) 泊松括号(1.4.8)式的重要性在于，对给定的 CYBE (1.3.5)的一个解，则确定了 $T_L(\lambda)$的矩阵元所满足的泊松括号(1.4.8)式。例如在§1.2 中给出的 $SL(2)$情况下的几个例子，此时 $T_L(\lambda)$为 2×2 矩阵，亦即辅助空间为泡利矩阵。可设为

$$T_L(\lambda) = \begin{pmatrix} a_L(\lambda) & b_L(\lambda) \\ c_L(\lambda) & d_L(\lambda) \end{pmatrix} \tag{1.4.13}$$

其中 $a_L(\lambda),\cdots,d_L(\lambda)$称为散射数据(scattering data)。由(1.4.8)式可以确定 $a_L(\lambda),\cdots,d_L(\lambda)$之间的泊松括号，而 $\tau(\lambda) = a_L(\lambda) + d_L(\lambda)$ 则给出守恒量集合。

3) 在§1.1 中，假定了 Lax-pair 中的 Φ 在 $x = L\to\infty$ 时，不依赖于 t 和 x，并且均匀收敛。然而在实际物理模型中，Φ 并不一定总能保证满足上述条件。这时，需要重新定义 $T(\lambda)$，使得上述条件得以满足。例如，对 NSE，场量 $\psi(x, t)$的边界条件为：

$$\psi(x, t)\to 0, \quad |x|\to\infty \tag{1.4.14}$$

由方程(1.1.1)和上述边界条件容易看出

$$\Phi(x, t; \lambda)\to e^{-\frac{i\lambda x}{2}\sigma_3}, \quad |x|\to\infty \tag{1.4.15}$$

Φ的渐近行为不依赖于t，但却不均匀收敛。为此定义

$$T(\lambda) = \lim_{L\to\infty} e^{i\frac{\lambda L}{2}\sigma_3} T_L(\lambda) e^{i\frac{\lambda L}{2}\sigma_3} \tag{1.4.16}$$

相应的$T(\lambda)$遵从如下泊松括号：

$$\{\overset{1}{T}(\lambda), \overset{2}{T}(\mu)\} = r_+(\lambda-\mu)\overset{1}{T}(\lambda)\overset{2}{T}(\mu) - \overset{1}{T}(\lambda)\overset{2}{T}(\mu)r_-(\lambda-\mu) \tag{1.4.17}$$

其中

$$r_\pm(\lambda-\mu) = \lim_{x\to\pm\infty} e^{i\frac{x}{2}(\lambda\overset{1}{\sigma}_3+\mu\overset{2}{\sigma}_3)} r(\lambda-\mu) e^{-i\frac{x}{2}(\lambda\overset{1}{\sigma}_3+\mu\overset{2}{\sigma}_3)} \tag{1.4.18}$$

将(1.2.17)式代入(1.4.18)式，利用

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{\lambda-\mu} e^{i(\lambda-\mu)x} = \pm i\pi\delta(\lambda-\mu)$$

可以计算出

$$r_\pm(\lambda) = -c\begin{pmatrix} P\frac{1}{\lambda} & & & \\ & 0 & \pm i\pi\delta(\lambda) & \\ & \mp i\pi\delta(\lambda) & 0 & \\ & & & P\frac{1}{\lambda}\end{pmatrix} \tag{1.4.19}$$

其中$P\frac{1}{\lambda}$表示$1/\lambda$的主值。如将$T(\lambda)$写成如下2×2矩阵：

$$T(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & b^*(\lambda) \\ b(\lambda) & a^*(\lambda)\end{pmatrix} \tag{1.4.20}$$

由(1.4.17)、(1.4.19)和(1.4.20)式，并注意到

$$P\frac{1}{\lambda-\mu} \mp i\pi\delta(\lambda-\mu) = \frac{1}{\lambda-\mu\pm i\varepsilon},\ \varepsilon\to+0$$

则给出泊松括号：

$$\begin{cases}\{a(\lambda),\ a(\mu)\}=\{a(\lambda),\ a^*(\mu)\}=\{b(\lambda),\ b(\mu)\}=0\\ \{a(\lambda),\ b(\mu)\}=\dfrac{c}{\lambda-\mu+\mathrm{i}\epsilon}a(\lambda)b(\mu)\\ \{a(\lambda),\ b^*(\mu)\}=-\dfrac{c}{\lambda-\mu+\mathrm{i}\epsilon}a(\lambda)b^*(\mu)\\ \{b(\lambda),\ b^*(\mu)\}=\mathrm{i}2\pi|a(\lambda)|^2\delta(\lambda-\mu)\end{cases}\tag{1.4.21}$$

4）由于 $T_{\mathrm{L}}(\lambda)$可以通过(1.1.12)式的形式用 V 表示出来，所以 $T_{\mathrm{L}}(\lambda)$的矩阵元可以用场量表示出来。例如对 NSE，$a(\lambda)$用场量 ψ 表示为

$$\begin{aligned}a(\lambda)=1-c\int_{-\infty}^{\infty}&\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\theta(y_1-y_2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(y_1-y_2)}\psi^*(y_1,t)\psi(y_2,t)\\ &+c^2\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_4\theta(y_1>\cdots>y_4)\\ &\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(y_1-y_2+y_3-y_4)}\psi^*(y_1,t)\psi^*(y_3,t)\psi(y_2,t)\psi(y_4,t)+\cdots\end{aligned}$$

将 $\ln a(\lambda)$对 λ 展开成如下级数形式：

$$\ln a(\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\lambda^{-n}\tag{1.4.22}$$

则展开系数 c_i，$i=1,2,3$，分别给出系统的粒子数、动量和哈密顿量：

$$\begin{cases}N=\dfrac{1}{\mathrm{i}c}c_1=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|\psi|^2\mathrm{d}x\\ p=\dfrac{1}{\mathrm{i}c}c_2=\dfrac{\mathrm{i}}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}(\psi_x^*\psi-\psi^*\psi_x)\mathrm{d}x\\ H=\dfrac{1}{\mathrm{i}c}c_3=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}(\psi_x^*\psi_x+c|\psi|^4)\mathrm{d}x\end{cases}\tag{1.4.23}$$

5) CYBE 的解，即 $r(\lambda)$矩阵解的分类问题，如上所述，早已由 Belavin 和 Drinfeld 解决了[10]。本书关心的有理解是指 $f^{ab}(\lambda)$是 λ 的有理式，具有单极点，不具有周期性。例如，NSE、各向同性 $(J_1=J_2=J_3=1)$ 的 Landau-Lifshitz 方程。三角解是指 $f^{ab}(\lambda)$是 λ 的三角函数或双曲函数，具有单周期性。例如，SGE，$J_1=J_2\neq J_3$时的 Landau-Lifshitz 方程。椭圆解是指 $f^{ab}(\lambda)$是 λ 的椭圆函数，具有双周期性。例如，各向异性 $(J_1\neq J_2\neq J_3)$ 的 Landau-Lifshitz 方程等。

在结束本节前，再一次强调：在以上所有的讨论中，只用到了 Lax-pair 中的方程(1.1.1)和基本泊松括号，并没有使用方程(1.1.2)。Faddeev 等[8]已经证明，如果哈密顿量取为

$$H(\lambda_0)=\mathrm{tr}T_{\mathrm{L}}(\lambda_0) \tag{1.4.24}$$

可以构造

$$M(x,t;\lambda)=\mathrm{tr}_1\overset{1}{T}{}_{\mathrm{L}}^{-}(x,\lambda_0)\overset{1}{T}{}_{\mathrm{L}}^{+}(x,\lambda_0)r(\lambda_0-\lambda) \tag{1.4.25}$$

其中

$$\begin{cases} T_{\mathrm{L}}^{+}(x,\lambda)=P\exp\left\{\int_x^L \mathrm{d}x' V(x',\lambda)\right\} \\ T_{\mathrm{L}}^{-}(x,\lambda)=P\exp\left\{\int_{-L}^x \mathrm{d}x' V(x',\lambda)\right\} \end{cases} \tag{1.4.26}$$

使得正则方程

$$V_t(x,t;\lambda)=\{H(\lambda_0),V(x,t;\lambda)\} \tag{1.4.27}$$

等同于方程(1.1.4)。证明过程在本章附录中给出。因此，只要从转移矩阵 $T_{\mathrm{L}}(\lambda)$中确定出哈密顿量，并承认它的正则方程即为时间演化方程，则实际上已包括了方程(1.1.2)。这就是为什么在上述讨论中只考虑方程(1.1.1)的原因。

§1.5 基本泊松括号与 Riemann-Hilbert 变换

已知道 Lax-pair 的可积条件给出运动方程，同时 Lax-pair 中含有谱参数 λ(或 u)，并且具有一定的解析行为。如果存在一种变换，它使 Lax-pair 的形式不变，那么这些 Lax-pair 都对应着同一个运动方程。也就是说，这种变换是解到解之间的变换。这种保持解空间的变换可称为 Darboux 变换。本章中我们一再强调，将 Lax-pair 与基本泊松括号相结合，便可以导出转移矩阵所满足的关系式(1.4.8)。对给定的 $r(\lambda)$矩阵，求解出 $T_L(\lambda)$的矩阵元之间的泊松括号，便可以建立起经典可积场论的正则形式。由此会很自然地提出下面问题：如果对一个已选定的 Lax-pair 建立了正则形式，那么当这个 Lax-pair 作了 Darboux 变换后，新的 Lax-pair 所相应的正则形式也应随之而确定，否则建立的正则形式在解空间中将失掉意义。像一般的物理问题一样，只需讨论无穷小变换情况，这样就保证了在解空间中至少在一个解附近是自洽的。

这里并不想讨论 Darboux 变换的一般理论及应用，它们可以在许多文献中找到[11]，值得提到的是我国谷超豪和胡和生教授在 Darboux 变换的应用方面作出了重要的发展[12]。下面仅从 Riemann-Hilbert 变换方法出发讨论这一问题。

对任意的 Lax-pair 系统，在辅助空间的线性方程组的普遍形式为

$$D(\xi, \lambda)\Phi(\xi, \lambda) - A(\xi, \lambda)\Phi(\xi, \lambda) = 0 \qquad (1.5.1)$$

其中 ξ 表示时-空变量，λ 是谱参数，$D(\xi, \lambda)$是 ξ 和 λ 的线性微商算符，$\Phi(\xi, \lambda)$是辅助矩阵函数。例如，相应于方程(1.1.1)，$D = \dfrac{\partial}{\partial x}$，$A = V$；相应于方程(1.1.2)，$D = \dfrac{\partial}{\partial t}$，$A = M$。当(1.5.1)式作 Darboux 变换时[13]，

$$\Phi'(\xi, \lambda) = X(\xi, \lambda)\Phi(\xi, \lambda) \tag{1.5.2}$$

$$A'(\xi, \lambda) = X(\xi, \lambda)A(\xi, \lambda)X^{-1}(\xi, \lambda) + (D(\xi, \lambda)X(\xi, \lambda))X^{-1}(\xi, \lambda) \tag{1.5.3}$$

其中$X(\xi, \lambda)$为某一矩阵函数,则(1.5.1)式变为

$$D(\xi, \lambda)\Phi'(\xi, \lambda) - V'(\xi, \lambda)\Phi'(\xi, \lambda) = 0 \tag{1.5.4}$$

选择(简略时-空坐标标记)

$$X(\lambda = \infty) = 1 \tag{1.5.5}$$

则$X(\lambda)$可以由如下 Riemann-Hilbert 变换给出[14~16]:

$$\begin{cases} X(\lambda) = 1 + w(\lambda), \\ w(\lambda) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_C \dfrac{d\mu}{\mu - \lambda}G(\mu) \\ G(\mu) = \Phi'(\mu)\Lambda(\mu)\Phi^{-1}(\mu) \end{cases} \tag{1.5.6}$$

其中C是λ复平面上的积分回路,$\Lambda(\lambda)$满足

$$D(\lambda)\Lambda(\lambda) = 0 \tag{1.5.7}$$

将(1.5.6)式代入(1.5.3)式,可以导出

$$A'(\lambda) - A(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}D(\lambda)\oint_C \frac{d\mu}{\mu - \lambda}G(\mu) + \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{d\mu}{\mu - \lambda}(G(\mu)A(\lambda) - A'(\lambda)G(\mu)) \tag{1.5.8}$$

下面考虑无穷小 Riemann-Hilbert 变换[15,16]:即$\Lambda(\lambda)$包含无穷小参数,相应地有$A'(\lambda) - A(\lambda) = \alpha^a\delta_a A(\lambda)$。对于无穷小变换,(1.5.8)式蜕化为[13]

$$\delta A(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}D(\lambda)\oint_C \frac{d\mu}{\mu - \lambda}G(\mu) + \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{d\mu}{\mu - \lambda}[G(\mu), A(\lambda)] \tag{1.5.9}$$

其中

$$G(\mu) = \Phi(\mu)\Lambda(\mu)\Phi^{-1}(\mu) \tag{1.5.10}$$

所要考虑的问题是将(1.5.9)式与基本泊松括号联系起来。相应于方程(1.1.1),(1.5.9)改写为

$$\delta V(x, \lambda) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{d\mu}{\mu - \lambda}\left(G_x(x, \mu) + [G(x, \mu), V(x, \lambda)]\right) \tag{1.5.11}$$

其中

$$G(x, \mu) = \Phi(x, \mu)\Lambda(\mu)\Phi^{-1}(x, \mu)$$

这时上式简化为

$$\Lambda_x(\lambda) = 0 \tag{1.5.12}$$

亦即要求 $\Lambda(\lambda)$不依赖于坐标,从而可以选取 $\Lambda(\lambda)$为仅依赖于谱参数 λ 的矩阵函数。

接着设法将(1.5.11)式的右边用泊松括号表示出来。为此首先考虑(1.4.5)式。用 $\overset{1}{\Phi}{}^{-1}(x, \lambda)$左乘(1.4.5)式,然后固定 y,取 $x = L \to \infty$,则有

$$\overset{1}{T}_L{}^{-1}(\lambda)\left\{\overset{1}{T}_L(\lambda), \overset{2}{V}(y, \mu)\right\} = \overset{1}{\Phi}{}^{-1}(y, \lambda)\left[r(\lambda - \mu), \overset{1}{V}(y, \lambda) + \overset{2}{V}(y, \mu)\right]\overset{1}{\Phi}(y, \lambda) \tag{1.5.13}$$

再利用

$$\overset{1}{\Phi}{}^{-1}(y, \lambda)\left[r(\lambda - \mu), \overset{1}{V}(y, \lambda)\right]\overset{1}{\Phi}(y, \lambda) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\overset{1}{\Phi}{}^{-1}(y, \lambda)r(\lambda - \mu)\overset{1}{\Phi}(y, \lambda)\right),$$

可以得到

$$\overset{1}{T}_L{}^{-1}(\lambda)\left\{\overset{1}{T}_L(\lambda), \overset{2}{V}(y, \mu)\right\}$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\overset{1}{\Phi}{}^{-1}(y,\lambda)r(\lambda-\mu)\overset{1}{\Phi}(y,\lambda)\right)$$

$$+\overset{1}{\Phi}{}^{-1}(y,\lambda)\left[r(\lambda-\mu),\overset{2}{V}(y,\mu)\right]\overset{1}{\Phi}(y,\lambda) \quad (1.5.14)$$

对上式左乘 $\overset{1}{\Lambda}(\lambda)$，然后对空间 1 取迹，注意到(1.5.12)，则有

$$\mathrm{tr}_1\overset{1}{\Lambda}(\lambda)\overset{1}{T}_{\mathrm{L}}{}^{-1}(\lambda)\left\{\overset{1}{T}_{\mathrm{L}}(\lambda),\overset{2}{V}(y,\mu)\right\}$$

$$= \mathrm{tr}_1\left(\overset{1}{G}_y(y,\lambda)r(\lambda-\mu)\right.$$

$$\left.+\overset{1}{G}(y,\lambda)\left[r(\lambda-\mu),\overset{2}{V}(y,\mu)\right]\right) \quad (1.5.15)$$

为了将(1.5.16)式与(1.5.12)式联系起来，需要作如下考虑：i)将 G 在李代数的基空间表示为 G^aI_a，要求 $\mathrm{tr}I_aI_b=\beta\delta_{ab}$。例如，对 $SU(N)$ 可选择 $\mathrm{tr}I^aI^b=\frac{1}{2}\delta^{ab}$。ii)仅考虑(1.2.3)式形式的 $r(\lambda)$ 矩阵的一种特殊情况(h 为一常数)：

$$r(\lambda-\mu)=\frac{h}{\lambda-\mu}I_a\otimes I_a \quad (1.5.16)$$

由此，利用 $\mathrm{tr}_1\left(\overset{1}{G}(y,\lambda)r(\lambda-\mu)\right)=\beta h\overset{2}{G}(y,\lambda)/(\lambda-\mu)$，由(1.5.15)式可以得到

$$\mathrm{tr}_1\overset{1}{\Lambda}(\lambda)\overset{1}{T}_{\mathrm{L}}{}^{-1}(\lambda)\left\{\overset{1}{T}_{\mathrm{L}}(\lambda),\overset{2}{V}(y,\mu)\right\}$$

$$=\frac{\beta h}{\lambda-\mu}\left(\overset{2}{G}_y(y,\lambda)+\left[\overset{2}{G}(y,\lambda),\overset{2}{V}(y,\mu)\right]\right) \quad (1.5.17)$$

再将(1.5.17)式中的 y 换成 x，λ 和 μ 对调，然后对 μ 做回路积分，则有：

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \mathrm{d}\mu\,\mathrm{tr}_1\overset{1}{\Lambda}(\mu)\overset{1}{T}_{\mathrm{L}}{}^{-1}(\mu)\left\{\overset{1}{T}_{\mathrm{L}}(\mu),\overset{2}{V}(x,\lambda)\right\}$$

$$= \frac{\beta h}{2\pi i} \oint_C \frac{d\mu}{\mu - \lambda} \left(\overset{2}{G}_r(x, \mu) + \left[\overset{2}{G}(x, \mu), \overset{2}{V}(x, \lambda) \right] \right) \tag{1.5.18}$$

比较(1.5.11)式和(1.5.18)式,最终得到

$$\delta \overset{2}{V}(x, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C d\mu (\beta h)^{-1} \mathrm{tr}_1 \left(\overset{1}{\Lambda}(\mu) \overset{1}{T}{}_L^{-1}(\mu) \left\{ \overset{1}{T}_L(\mu), \overset{2}{V}(x, \lambda) \right\} \right) \tag{1.5.19}$$

通常的 Riemann-Hilbert 变换在 Lax-pair 系统的应用中,选择 $\Lambda(\mu)$的出发点是假定 $\Lambda(\mu) = \mu^m I_a$, I_a 为李代数生成元。这时 $\Lambda(\mu) \equiv \Lambda_a^{(m)}$,因此$[\Lambda_a^{(m)}, \Lambda_b^{(n)}] = c_{ab}^c \Lambda_c^{(m+n)}$,即满足圈代数(loop algebra),它称为种子代数关系。所谓 Riemann-Hilbert 变换形式(1.5.6),实质是说在保证 Lax-pair 协变形式时,相应变分对易子的对易关系仍然是圈代数 ,即仅像"穿衣"一样,不改变问题的实质。然而这种选择不是唯一的,因为 $\Lambda(\mu)$的选择原则只有两条:i)在本问题中,$\Lambda_x = 0$,即只依赖于谱参数以及ii)$\Lambda(\mu)$应满足群的要求,即不越出所讨论的群。例如可选择为

$$\Lambda(\mu) = \alpha(\beta h) \mu^m T_L(\mu) \quad (\alpha \text{ 为无穷小参数}) \tag{1.5.20}$$

则对固定 m,(1.5.19)式变成

$$\delta^{(m)} V(x, \lambda) = \alpha \left\{ \frac{1}{2\pi i} \oint_C d\mu \mu^m \mathrm{tr} T_L(\mu), V(x, \lambda) \right\} \tag{1.5.21}$$

考虑到(1.4.11)式并完成留数积分后得:

$$\delta^{(m)} V(x, \lambda) = \alpha \{ \tau^{(m+1)}, V(x, \lambda) \} \tag{1.5.22}$$

这样,就可证明:保证 Lax-pair 形式不变的无穷小 Darboux 变换可以用 V 自身的泊松括号表示出来,由于 $\{\tau^{(m)}, \tau^{(n)}\} = 0$,可知亦有

$$\{\delta^{(m)}, \delta^{(n)}\} = 0$$

也就是说，这些变分是由守恒量引起的。(1.5.17)式形式的 $r(u)$ 矩阵代表了一大类经典哈密顿可积系统。因而至少对相当多的物理模型，基本泊松括号与 Lax-pair 的解空间不变性是相容的。这里要强调的是，(1.5.22)式所示的变分性质与过去讨论 Kac-Moody 代数形式的变分性质完全不同。这里 $\delta^{(m)}$ 是由第$(m+1)$阶守恒量 $\tau^{(m+1)}$ 引起的。

结束本章前，需强调指出：用 Lax-pair 与基本泊松括号结合起来讨论非线性物理模型的可积性不仅是漂亮的，而且对除时间变量外空间为一维的非线性量子场论的量子化是必要的。因为只有线性方程才能量子化，因此非线性场方程首先要线性化。Lax-pair 是最简单的方式：二阶方程变为一阶，但方程个数增加了一倍。在上面讨论中，只强调了(1.1.1)式，另一个随时间演化的线性方程等价于正则运动方程。通过经典正则形式的讨论也明确了将来量子化的方式。

首先简要回忆一下正则量子化的三部曲：

a）场方程必须是线性的，因此场量可以作傅里叶展开，展开中以平面波或其他合适的函数族作为正交函数族。

b）平面波展开中的系数 $a_k^{\pm}$ 表示产生粒子与湮没粒子算符的关键在于场量满足正则对易关系。

c）将 $a_k^{\pm}$ 作用在 Fock 空间中，建立态理论(当然，如果考虑基态能量为正，还要进一步研究态空间)。

将这个思想应用于非线性可积系统，会发现必须仍将这些原则贯彻到底，但由于处理的是非线性问题，一定会有一些新的特点。现在线性方程是(1.1.1)式，于是要量子化 Φ，但由于 1)中平面波实质是指渐近行为，而 $a_k^{\pm}$ 是渐近行为展开式的系数，故需考虑 Φ 的渐近行为，它就是 $T_L(\lambda)$，即转移矩阵。与过去不同点在于，

1)中 $a_k^\pm$ 自己在辅助空间中常常不是矩阵，现在 $T(\lambda)$ 的辅助空间(即 Φ 所在的矩阵空间)为矩阵，而每个矩阵元 $a(\lambda)$，$b(\lambda)$ 等应当处于 $a_k^\pm$ 的地位。此外，现在谱参数是一维的，故量子化对象推广为 $T(\lambda) = \| T_{ab}(\lambda) \|$ $(a, b = 1, 2, \cdots, N)$，其中每个元素 $T_{ab}(\lambda)$ 为量子算符。与 2)相应，诸 $T_{ab}(\lambda)$ 间的对易关系应当同场函数的正则对易关系相符合。在已知 $T_{ab}(\lambda)$ 对易关系的基础上，类似 3)建立 Fock 空间，从而建立起量子理论。以后要详细讨论这些问题，它们构成了 YBE 相关的完全可积量子理论的主要部分。

附录1 证明(1.4.24)式与(1.4.27)式结合等价于(1.1.2)式

由于(1.1.1)式与(1.1.2)式结合得到(1.1.4)式，所以证明的思路是从(1.4.24)式～(1.4.27)式推导出方程(1.1.4)。将(1.4.24)式～(1.4.27)式写成如下形式：

$$H(\lambda_0) = \mathrm{tr}_1 \overset{1}{T}_L(\lambda_0) \tag{1.1}$$

$$\overset{2}{M}(x, \lambda) = \mathrm{tr}_1 \overset{1}{T}{}_L^-(x, \lambda_0) \overset{1}{T}{}_L^+(x, \lambda_0) r(\lambda_0 - \lambda) \tag{1.2}$$

其中

$$\begin{cases} \overset{1}{T}{}_L^-(x, \lambda_0) = P\exp\left\{\int_x^L \mathrm{d}x' \overset{1}{V}(x', \lambda_0)\right\} \\ \overset{1}{T}{}_L^-(x, \lambda_0) = P\exp\left\{\int_{-L}^x \mathrm{d}x' V(x', \lambda_0)\right\} \end{cases} \tag{1.3}$$

正则方程：

$$\overset{2}{V}_t(x, \lambda) = \left\{ H(\lambda_0), \overset{2}{V}(x, \lambda) \right\} \tag{1.4}$$

首先将(1.1)式代入(1.4)式，并注意到(1.1.12a)式，则有

$$\overset{2}{V}_t(x,\lambda)=\mathrm{tr}_1\left\{\overset{1}{T}_L(\lambda_0),\overset{2}{V}(x,\lambda)\right\}$$

$$=\mathrm{tr}_1\lim_{\substack{N\to 0\\ \Delta\to 0}}\sum_{j=1}^{N}\left(\prod_{i=j+1}^{N}\left[I+\overset{1}{V}(x_i,\lambda_0)(x_{i+1}-x_i)\right]\right)$$

$$\cdot\left\{\overset{1}{V}(x_j,\lambda_0),\overset{2}{V}(x,\lambda)\right\}(x_{j+1}-x_j)$$

$$\cdot\left(\prod_{k=1}^{j-1}\left[I+\overset{1}{V}(x_k,\lambda_0)(x_{k+1}-x_k)\right]\right)$$

再将基本泊松括号(1.2.10)式代入上式,考虑到

$$\sum_{j=1}^{N}\Delta\to\int_{-L}^{L}\mathrm{d}x$$

得到

$$\overset{2}{V}_t(x,t)=\mathrm{tr}_1\overset{1}{T}{}_L^{+}(x,\lambda_0)\left[r(\lambda_0-\lambda),\overset{1}{V}(x,\lambda_0)+\overset{2}{V}(x,\lambda)\right]\overset{1}{T}{}_L^{-}(x,\lambda_0)\tag{1.5}$$

利用$r(\lambda)$矩阵的(1.2.3)式形式,经过简单计算,由(1.5)式给出

$$\overset{2}{V}_t(x,\lambda)=\mathrm{tr}_1 f^{ab}(\lambda_0-\lambda)\overset{1}{T}{}_L^{-}(x,\lambda_0)\overset{1}{T}{}_L^{+}(x,\lambda_0)\cdot\left(\left[\overset{1}{I}_a,\overset{1}{V}(x,\lambda_0)\right]\overset{2}{I}_b+\overset{1}{I}_a\left[\overset{2}{I}_b,\overset{2}{V}(x,\lambda)\right]\right)\tag{1.6}$$

其次由(1.2)式出发,计算 M_x:

$$\overset{2}{M}_x(x,\lambda)=\mathrm{tr}_1\Big(\Big(\big(\overset{1}{T}{}_L^{-}(x,\lambda_0)\big)_x\overset{1}{T}{}_L^{+}(x,\lambda_0)+\overset{1}{T}{}_L^{-}(x,\lambda_0)\big(\overset{1}{T}{}_L^{+}(x,\lambda_0)\big)_x\Big)r(\lambda_0-\lambda)$$

注意到 x 在(1.3)式中排列顺序的位置,有

$$(\overset{1}{T}{}_L^{-}(x,\lambda))_x=\overset{1}{V}(x,\lambda)\overset{1}{T}{}_L^{-}(x,\lambda)$$

$$\left(\overset{1}{T}_L^+(x, \lambda)\right)_x = -\overset{1}{T}_L^+(x, \lambda)\overset{1}{V}(x, \lambda)$$

从而得到

$$\begin{aligned}
&\overset{2}{M}_x(x, \lambda) \\
&\quad = \mathrm{tr}_1(\overset{1}{V}(x, \lambda)\overset{1}{T}_L^-(x, \lambda_0)\overset{1}{T}_L^+(x, \lambda_0) \\
&\qquad - \overset{1}{T}_L^-(x, \lambda_0)\overset{1}{T}_L^+(x, \lambda_0))r(\lambda_0 - \lambda) \\
&\quad = \mathrm{tr}_1 f^{ab}(\lambda_0 - \lambda)\overset{1}{T}_L^-(x, \lambda_0)\overset{1}{T}_L^+(x, \lambda_0)[\overset{1}{I}_a, \overset{1}{V}(x, \lambda_0)]\overset{2}{I}_b
\end{aligned} \tag{1.7}$$

最后计算$[V, M]$，

$$\begin{aligned}
&[\overset{2}{V}(x, \lambda), \overset{2}{M}(x, \lambda)] \\
&\quad = \mathrm{tr}_1[\overset{2}{V}(x, \lambda), \overset{1}{T}_L^-(x, \lambda_0)\overset{1}{T}_L^+(x, \lambda_0)r(\lambda_0 - \lambda)] \\
&\quad = \mathrm{tr}_1\overset{1}{T}_L^-(x, \lambda_0)\overset{1}{T}_L^+(x, \lambda_0)[\overset{2}{V}(x, \lambda), r(\lambda_0 - \lambda)] \\
&\quad = \mathrm{tr}_1 f^{ab}(\lambda_0 - \lambda)\overset{1}{T}_L^-(x, \lambda_0)\overset{1}{T}_L^+(x, \lambda_0)\overset{1}{I}_a[\overset{2}{V}(x, \lambda), \overset{2}{I}_b]
\end{aligned} \tag{1.8}$$

由(1.6)式～(1.8)式，立刻得到

$$\overset{2}{V}_t(x, \lambda) - \overset{2}{M}_x(x, \lambda) + [V(x, \lambda), M(x, \lambda)] = 0 \tag{1.9}$$

这样，就完成了证明。

参 考 文 献

1. Miura R M, Vanderbiet (eds). Bäckland Transformations, the Inverse Scattering Method, Solitons and Their Applications. Lecture Notes in Mathematics. Belin: Springer-Verlag, 1974
2. Lamb G L. Elements of Soliton Theory. New York: Widey, 1980; Matveev V B.

Salle M B. Darboux Tansformation and Solitons. Berlin: Springer-Verlag, 1991

3. Ablowitz M J, Sequr H. Soliton and the Inverse Scattering Transform. Philadelphia: SIAM, 1981

   Calogero F, Degasperis A. Spectral Transforms and Solitons I. Amsterdam: North-Holland, 1982

4. 谷超豪等. 孤粒子理论与应用. 杭州:浙江科技出版社,1990;郭柏灵,庞小峰. 孤粒子. 北京:科学出版社,1987

5. Lax P D. Commun Pure Appl Math. 1968, 21:467

6. Faddeev L D, Takhtajan L A. Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons. Berlin: Springer-Verlag, 1987

7. 佐佐木重夫;苏步青译. 黎曼几何学. 北京:科学出版社,1964

8. Reshetikhin N Yu, Faddeev L D. Theor Math Phys. 1983, 56:323

9. Kulish P P, Sklyanin E K. Quantum Spectral Transform Method, Recent Developments. In: Hietarinta J, Montonen M, eds. Lecture Note in Physics, Vol. 151. Singapore: World Scientific Publ Co Ltd, 1982. 61

10. Belavin A A, Drinfeld V G. Triangle Equations and Simple Lie Algebras. In: Novikov S P, ed. Mathematical Physics Reviews (Sectionc, Vol 4). Amsterdam: OPA, 1984

11. Chau L L. Geometrical Integrability and Equation of Motion in Physics: A Unifying View. In: Song X C, ed. Nankai Lecture Notes, Integrable Systems. Singapore: World Scientific Publ Co Ltd, 1990

12. Gu C H, Hu H S. The Soliton Behavior of the Principle Chiral Fields. In: Yang C N etal, eds. Singapore: World Scientific Publ Co Ltd, 1993

13. Chau L L, Ge M L. J Math Phys, 1989, 30:166

14. Ge M L, Wu Y S. Phys Lett, 1982, B108:411

    Chau L L, Ge M L, Wu Y S. Phys Rev, 1982, D25:1086; 1983, D26:3581

    Chau L L, Ge M L, Popowicz Z. Phys Rev Lett, 1984, 52:1940

15. Nakamura Y, Veno K. Phys Lett, 1982, B107:273

    Wu Y S. Commun Math Phys, 1983, 10:461

16. Wu Y S, Ge M L. Lax-pair, R-H Transforms and Affine Algebra for Hidden Symmetries in Certain Nonlinear Field Theories. In: Lepowsky J, Mandelstam, Singer I M, eds. Vertex Operators in Math Phys. Berlin: Springer-Verlag, 1983

第 二 章

非线性可积模型的量子化与 QYBE 的物理起源

QYBE 的建立起源于两个方面的物理研究：一是一维量子多体问题；二是统计力学中的二维精确可解问题。在对具有 δ 函数势相互作用的一维量子多体问题的研究中，QYBE 是在 1967 年由杨振宁作为自洽条件首先发现的。随后，在研究统计力学中的二维精确可解模型时，R. J. 巴克斯特（1972 年）也独立地建立了称之为 Triangle-star 关系。随着各方面的研究成果的积累，人们发现 QYBE 普遍存在于量子可积问题，并且起着核心的作用。

对 1＋1 维量子可积模型和统计力学中的二维精确可解模型的研究，目前主要有两种方法：一是早期的 Bethe-Ansatz 方法及其推广（H. A. Bethe，1931；L. Hulthen，1938；C. N. Yang 和 C. P. Yang，1966～1969；E. H. Lieb，1967；R. J. Baxter，1971 等）；二是后期发展起来的量子逆散射方法（quantum inverse scattering method），也就是场论方法（L. D. Faddeev、E. K. Sklyanin 和 L. A. Takhtajin，1978～1979；H. B. Thacker 和 D. Wilkinson，1979；J. Honerkamp，1979 等）。文献中常见的 Bethe-Ansatz 方法是一次量子化方法，量子逆散射方法是二次量子化方法，一般说前者比后者要广，但对某些具体模型它们得到的物理结果是一致的。

本章内容安排如下：为了和第一章的内容更好地衔接起来，首

先使用量子逆散射方法，介绍由经典可积模型到量子可积模型的量子化理论。然后，将通过杨振宁和巴克斯特的早期工作，简明扼要地介绍QYBE的物理起源。

§2.1 非线性可积模型的量子化理论

我们知道，在原有的经典场论中，场量满足的是线性方程。正则量子化理论是将场量的泊松括号变为对应的对易括号，然后将正则变量用产生算符和湮没算符表示，相应的系统哈密顿量也用产生(湮没)算符写出来。在此基础上构造Fock空间，在粒子数表象中讨论哈密顿量的对角化问题。对于非线性可积模型，经典场论的正则量子化方法是不能直接使用的，因为这时场量所遵从的运动方程是非线性方程。所以，研究一维量子非线性场论的出发点是Lax-pair中的线性方程(1.1.1)和基本泊松括号(1.2.10)式，所采用的研究方法是由Faddeev学派等创建的量子逆散射方法[1~5]。下面围绕着QYBE分几个步骤介绍量子化的有关理论。

(1) 局域转移矩阵 $L_n(\lambda)$ 和它的交换关系

首先考虑Lax-pair中的方程(1.1.1)。如同§1.1中的方法，将一维坐标 x 格点化。格点化后，方程(1.1.1)变为如下形式：

$$\Phi_{n+1}(\lambda) = L_n(\lambda)\Phi_n(\lambda),\ 1 \leqslant n \leqslant N \qquad (2.1.1)$$

其中 $\Phi_n(\lambda) \equiv \Phi(x_n, t; \lambda)$，$L_n(\lambda)$ 是经典局域转移矩阵。在格点间距 Δ 的一阶修正下，$L_n(\lambda)$ 可以写成

$$L_n(\lambda) = 1 + \Delta V_n(\lambda),\ V_n(\lambda) \equiv V(x_n, t; \lambda) \qquad (2.1.2)$$

格点化之后，基本泊松括号(1.2.10)式改写为

$$\left\{\overset{1}{V}_n(\lambda), \overset{2}{V}_m(\mu)\right\} = \frac{1}{\Delta}\delta_{nm}\left[r(\lambda-\mu), \overset{1}{V}_n(\lambda) + \overset{2}{V}_n(\mu)\right]$$

利用上式，并注意到(2.1.2)式，则在 Δ 的一阶近似下，得到

$$\{\overset{1}{L}_n(\lambda),\ \overset{2}{L}_m(\mu)\} = \delta_{nm}\left[r(\lambda-\mu),\ \overset{1}{L}_n(\lambda)\,\overset{2}{L}_n(\mu)\right] \tag{2.1.3}$$

这里需要指出：(2.1.1)、(2.1.3)式是从连续模型作格点近似得到的，而在实际物理问题中，有些非线性经典可积模型本身就是格点模型。在此种情况下，(2.1.1)、(2.1.3)式是基本关系式。下面以 Toda 链(TC)为例说明这一问题。

TC 模型的运动方程是

$$\ddot{q}_n = \mathrm{e}^{q_{n+1}-q_n} - \mathrm{e}^{q_n-q_{n-1}} \tag{2.1.4}$$

正则变量 p_n，q_n 满足的泊松括号和系统的哈密顿量分别为

$$\{p_n,\ q_m\} = \delta_{nm} \tag{2.1.5}$$

和

$$H = \sum_n \left(\frac{p_n^2}{2} + \mathrm{e}^{q_{n+1}-q_n}\right) \tag{2.1.6}$$

相应的边界条件分为三种类型：i)非周期链：$-\infty < n < \infty$，$|n| \to \infty$ 时，$q_n \to 0$，$p_n \to 0$；ii)周期链：格点长度为 N，$p_{N+1} = p_1$，$q_{n+1} = q_1$；iii)自由链：格点长度为 N，省略 $\exp\{q_{N+1} - q_n\}$ 这样项。对 TC 模型，$L_n(\lambda)$矩阵和 $r(\lambda)$矩阵分别为

$$L_n(\lambda) = \begin{pmatrix} p_n - \lambda & -\mathrm{e}^{q_n} \\ \mathrm{e}^{-q_n} & 0 \end{pmatrix} \tag{2.1.7}$$

和

$$r(\lambda) = -\frac{1}{\lambda}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \tag{2.1.8}$$

其中(2.1.8)式和 NSE 的 $r(\lambda)$具有相同的形式。

此外，$L_n(\lambda)$的形式不是唯一的。如果对 $L_n(\lambda)$做变换：

$$\Phi'_n(\lambda) = g\Phi_n(\lambda),\ L'_n(\lambda) = gL_n(\lambda)g^{-1} \tag{2.1.9}$$

其中 g 是与格点位置无关的数值矩阵，并且满足关系式：

$$[r(\lambda),\ g \otimes g] = 0 \tag{2.1.10}$$

则(2.1.1)式和(2.1.3)式保持形式不变，即

$$\begin{cases} \Phi'_{n+1}(\lambda) = L'_n(\lambda)\Phi'_n(\lambda) \\ \{\overset{1}{L}{}'_n(\lambda),\ \overset{2}{L}{}'_m(\mu)\} = \delta_{nm}[r(\lambda-\mu),\ \overset{1}{L}{}'_n(\lambda)\overset{2}{L}{}'_n(\mu)] \end{cases} \tag{2.1.11}$$

(2.1.11)式的证明如下：由(2.1.9)式和(2.1.1)式，有

$$\begin{aligned} \Phi'_{n+1}(\lambda) &= g\Phi_{n+1}(\lambda) = gL_n(\lambda)\Phi_n(\lambda) \\ &= gL_n(\lambda)g^{-1}g\Phi_n(\lambda) = L'_n(\lambda)\Phi'_n(\lambda) \end{aligned}$$

再由(2.1.3)式和(2.1.11)式可以推导出：

$$\begin{aligned} \{\overset{1}{L}{}'_n(\lambda),\ \overset{2}{L}{}'_m(\mu)\} &= \overset{1}{g}\overset{2}{g}\{\overset{1}{L}_n(\lambda),\ \overset{2}{L}_m(\mu)\}\overset{1}{g}{}^{-1}\overset{2}{g}{}^{-1} \\ &= \delta_{nm}\overset{1}{g}\overset{2}{g}[r(\lambda-\mu),\ \overset{1}{L}_n(\lambda)\overset{2}{L}_n(\mu)]\overset{1}{g}{}^{-1}\overset{2}{g}{}^{-1} \\ &= \delta_{nm}(r(\lambda-\mu)\overset{1}{g}\overset{1}{L}_n(\lambda)\overset{1}{g}{}^{-1}\overset{2}{g}\overset{2}{L}_n(\mu)\overset{2}{g}{}^{-1} \\ &\quad -\overset{1}{g}\overset{1}{L}_n(\lambda)\overset{1}{g}{}^{-1}\overset{2}{g}\overset{2}{L}_n(\mu)\overset{2}{g}{}^{-1}r(\lambda-\mu)) \\ &= \delta_{nm}[r(\lambda-\mu),\ \overset{1}{L}{}'_n(\lambda)\overset{2}{L}{}'_n(\mu)] \end{aligned}$$

例如，对 TC 模型，可选取满足(2.1.11)式的 g 矩阵：

$$g = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix},\ g^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} \tag{2.1.12}$$

使得 $L_n(\lambda)$变为

$$L_n'(\lambda) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} p_n - \lambda - 2\mathrm{ich}q_n & \mathrm{i}(p_n - \lambda) - 2\mathrm{sh}q_n \\ -\mathrm{i}(p_n - \lambda) - 2\mathrm{sh}q_n & p_n - \lambda + 2\mathrm{ich}q_n \end{pmatrix} \tag{2.1.13}$$

下面考虑量子化过程。将经典场量变为算符，然后在对应原理

$$\{\ ,\ \} = \frac{-\mathrm{i}}{\hbar}[\ ,\ ] \tag{2.1.14}$$

下，场量满足的泊松括号变为相应的对易括号。量子化后的方程(2.1.1)仍然具有原来的形式：

$$\Phi_{n+1}(\lambda) = L_n(\lambda)\Phi_n(\lambda),\ 1 \leqslant n \leqslant N \tag{2.1.15}$$

但是，$L_n(\lambda)$和 $\Phi_n(\lambda)$的矩阵元是算符，而不是普通函数。一般情况下，$L_n(\lambda)$可以写成格点间距 Δ 的级数展开形式：

$$L_n(\lambda) = 1 + \Delta L_n^{(1)}(\lambda) + \Delta^2 L_n^{(2)}(\lambda) + \cdots \tag{2.1.16}$$

其中 $L_n^{(1)} = V_n(\lambda)$。当然，基本泊松括号也要相应地变为量子形式。但是这种量子关系不能在(2.1.14)式下直接从(2.1.3)式得到，因为这样只有 $\hbar$ 的一阶形式，而不能包括 $\hbar$ 的高阶项。所以，代替(2.1.3)式的量子对易关系被假设为：

$$R(\lambda - \mu)\overset{1}{L}_n(\lambda)\overset{2}{L}_n(\mu) = \overset{2}{L}_n(\mu)\overset{1}{L}_n(\lambda)R(\lambda - \mu) \tag{2.1.17a}$$

$$\left[\overset{1}{L}_n(\lambda),\ \overset{2}{L}_m(\mu)\right] = 0,\ m \neq n \tag{2.1.18a}$$

其中 $R(\lambda)$是与格点位置无关且仅依赖于 λ 的矩阵函数。(2.1.17a)式和(2.1.18a)式的矩阵元形式为：

$$\begin{aligned} &R_{ik;\,pq}(\lambda - \mu)(L_n(\lambda))_{pj}(L_n(\mu))_{ql} \\ &= (L_n(\mu))_{kq}(L_n(\lambda))_{ip}R_{pq;\,jl}(\lambda - \mu) \end{aligned} \tag{2.1.17b}$$

$$\left[(L_n(\lambda))_{ij},\ (L_m(\mu))_{kl}\right]=0 \quad m\neq n \qquad (2.1.18b)$$

对(2.1.17)式需要注意的是，在量子情况下，$\overset{2}{L}_n(\mu)\ \overset{1}{L}_n(\lambda)\neq\overset{1}{L}_n(\lambda)\ \overset{2}{L}_n(\mu)$，这是与经典情况不同的。

(2.1.17)式和(2.1.18)式的建立自然地会产生这样一个问题，它们的经典近似是否能退回到泊松括号(2.1.3)式？回答是肯定的。如果 $R(\lambda)$ 可以写成如下的形式：

$$R(\lambda)=1+\mathrm{i}\hbar\, r(\lambda)+o(\hbar^2) \qquad (2.1.19)$$

则(2.1.17)式退化为

$$\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\overset{1}{L}_n(\lambda),\ \overset{2}{L}_n(\mu)]=r(\lambda-\mu)\overset{1}{L}_n(\lambda)\overset{2}{L}_n(\mu)-\overset{2}{L}_n(\mu)\overset{1}{L}_n(\lambda)r(\lambda-\mu)$$

在经典近似下，方程左边的对易括号退回到泊松括号；方程右边，$\overset{2}{L}_n(\mu)\ \overset{1}{L}_n(\lambda)=\overset{1}{L}_n(\lambda)\ \overset{2}{L}_n(\mu)$，即上式变为

$$\{\overset{1}{L}_n(\lambda),\ \overset{2}{L}_n(\mu)\}=[r(\lambda-\mu),\ \overset{1}{L}_n(\lambda)\ \overset{2}{L}_n(\mu)]$$

再考虑到(2.1.18)式的经典近似，则量子关系式(2.1.17)和(2.1.18)退回到(2.1.3)式。

量子方程(2.1.15)和量子交换关系(2.1.17)、(2.1.18)式存在使其形式不变的变换：

$$\Phi_n'(\lambda)=G(\lambda)\Phi_n(\lambda) \qquad (2.1.20a)$$

$$L_n'(\lambda)=G(\lambda)L_n(\lambda)G^{-1}(\lambda) \qquad (2.1.20b)$$

$$R'(\lambda-\mu)=(G(\lambda)\otimes G(\mu))R(\lambda-\mu)(G^{-1}(\lambda)\otimes G^{-1}(\mu)) \qquad (2.1.20c)$$

其中，变换矩阵 $G(\lambda)$ 与格点位置无关，它的矩阵元是非算符的。(2.1.15)、(2.1.18)式的证明是非常容易的，这里只给出(2.1.17)

式的证明。

用$\overset{1}{G}(\lambda)\overset{2}{G}(\mu)$左乘(2.1.17a)式，$\overset{1}{G}{}^{-1}(\lambda)\overset{2}{G}{}^{-1}(\mu)$右乘(2.1.17a)式，有

$$
\begin{aligned}
&\overset{1}{G}(\lambda)\,\overset{2}{G}(\mu)R(\lambda-\mu)\,\overset{1}{L}_n(\lambda)\,\overset{2}{L}_n(\mu)\,\overset{1}{G}{}^{-1}(\lambda)\,\overset{2}{G}{}^{-1}(\mu)\\
&\quad=\overset{1}{G}(\lambda)\,\overset{2}{G}(\mu)R(\lambda-\mu)\,\overset{1}{G}{}^{-1}(\lambda)\,\overset{2}{G}{}^{-1}(\mu)\,\overset{1}{G}(\lambda)\\
&\qquad\cdot\overset{1}{L}_n(\lambda)\,\overset{1}{G}{}^{-1}(\lambda)\,\overset{2}{G}(\mu)\,\overset{2}{L}_n(\mu)\,\overset{2}{G}{}^{-1}(\mu)\\
&\quad=R'(\lambda-\mu)\,\overset{1}{L}{}'_n(\lambda)\,\overset{2}{L}{}'_n(\mu)\\
&\qquad\cdot\overset{1}{G}(\lambda)\,\overset{2}{G}(\mu)\,\overset{2}{L}_n(\mu)\,\overset{1}{L}_n(\lambda)R(\lambda-\mu)\,\overset{1}{G}{}^{-1}(\lambda)\,\overset{2}{G}{}^{-1}(\mu)\\
&\quad=\overset{2}{G}(\mu)\,\overset{2}{L}_n(\mu)\,\overset{2}{G}{}^{-1}(\mu)\,\overset{1}{G}(\lambda)\,\overset{1}{L}_n(\lambda)\,\overset{1}{G}{}^{-1}(\lambda)\\
&\qquad\cdot\overset{1}{G}(\lambda)\,\overset{2}{G}(\mu)R(\lambda-\mu)\,\overset{1}{G}{}^{-1}(\lambda)\,\overset{2}{G}{}^{-1}(\mu)\\
&\quad=\overset{2}{L}{}'_n(\mu)\,\overset{1}{L}{}'_n(\lambda)R'(\lambda-\mu)
\end{aligned}
$$

因而，(2.1.17b)式变为：

$$
R'(\lambda-\mu)\,\overset{1}{L}{}'_n(\lambda)\,\overset{2}{L}{}'_n(\mu)=\overset{2}{L}{}'_n(\mu)\,\overset{1}{L}{}'_n(\mu)R'(\lambda-\mu)
$$

它保持了(2.1.17)式的原有形式。由上述变换可以看出$L_n(\lambda)$的形式不是唯一的。对给定的$L_n(\lambda)$，如果

$$
[R(\lambda-\mu),\ G(\lambda)\otimes G(\mu)]=0 \tag{2.1.21}
$$

则由(2.1.20b)式给出的$L'_n(\lambda)$也满足(2.1.17)式、(2.1.18)式，并且具有同一$R(\lambda)$矩阵。这方面的例子很多，下面将加以介绍。

对具体的物理模型，需要确定相应的$L_n(\lambda)$和$R(\lambda)$。在量子逆散射方法中，对连续经典可积模型需要完成两个程序：i)借助于$V_n(\lambda)$构造$L_n(\lambda)$，一般只考虑Δ的一阶近似；ii)给定了$L_n(\lambda)$之

后，由(2.1.17)式解出 $R(\lambda)$。$R(\lambda)$的矩阵元允许差一共同因子，也就是说，如果 $R(\lambda)$是解，则$f(\lambda)R(\lambda)$也是解，其中$f(\lambda)$是 λ 的任意函数。当然，对格点可积模型，例如 TC 模型，第一个程序是不需要的，而是直接对经典的 $L_n(\lambda)$作量子化。

结合上面所讨论的内容，这里我们主要介绍两种类型的 $R(\lambda)$ 矩阵：$R(\lambda)$的有理解和三角解。它们覆盖了许多量子可积模型。

在讨论这两类 $R(\lambda)$矩阵之前，为了运算方便，将$L_n(\lambda)$和$R(\lambda)$的矩阵元重新标记，写成$(L_n(\lambda))^c_b$和 $R^{ab}_{cd}(\lambda)$。如果 $L_n(\lambda)$是 $N\times N$ 矩阵，则 $R(\lambda)$是 $N^2\times N^2$ 矩阵，相应的矩阵元指标选取为“自旋”指标：$a,\cdots,d\in\left(-\dfrac{N-1}{2},-\dfrac{N-1}{2}+1,\cdots,\dfrac{N-1}{2}\right)$。这种标记方法和原有的矩阵(或矩阵张量积)的标记方法有如下关系：

$$(L_n)_{ab}=(L_n)^a_b\quad R_{ab;cd}=R^{ab}_{cd}\tag{2.1.22}$$

由这种标记方法，可以将矩阵写成(例如，$N=2$，$a,\cdots,d\in[-1/2,1/2]$)：

$$L_n(\lambda)=\begin{pmatrix}(L_n)^{1/2}_{1/2} & (L_n)^{1/2}_{-1/2}\\ (L_n)^{-1/2}_{1/2} & (L_n)^{-1/2}_{-1/2}\end{pmatrix}$$

和

$$R(\lambda)=\begin{pmatrix}R^{1/2\,1/2}_{1/2\,1/2} & R^{1/2\,1/2}_{1/2\,-1/2} & R^{1/2\,1/2}_{-1/2\,1/2} & R^{1/2\,1/2}_{-1/2\,-1/2}\\ R^{1/2\,-1/2}_{1/2\,1/2} & R^{1/2\,-1/2}_{1/2\,-1/2} & R^{1/2\,-1/2}_{-1/2\,1/2} & R^{1/2\,-1/2}_{-1/2\,-1/2}\\ R^{-1/2\,1/2}_{1/2\,1/2} & R^{-1/2\,1/2}_{1/2\,-1/2} & R^{-1/2\,1/2}_{-1/2\,1/2} & R^{-1/2\,1/2}_{-1/2\,-1/2}\\ R^{-1/2\,-1/2}_{1/2\,1/2} & R^{-1/2\,-1/2}_{1/2\,-1/2} & R^{-1/2\,-1/2}_{-1/2\,1/2} & R^{-1/2\,-1/2}_{-1/2\,-1/2}\end{pmatrix}$$

相应地，量子交换关系(2.1.17b)式、(2.1.18b)式改写为：

$$\begin{cases}R^{ab}_{ef}(\lambda-\mu)(L_n(\lambda))^e_c(L_n(\mu))^f_d=(L_n(\mu))^b_f(L_n(\lambda))^a_eR^{ef}_{cd}(\lambda-\mu)\\ [(L_n(\lambda))^a_c,\ (L_m(\mu))^b_d]=0,\ m\neq n\end{cases}\tag{2.1.23}$$

1) $R(\lambda)$矩阵的有理解。假定 $R(\lambda)$具有如下形式：

$$R(\lambda) = \lambda + \alpha P \tag{2.1.24}$$

其中 α 是任意常数，P 是辅助空间上的置换矩阵，它的矩阵元为

$$P_{cd}^{ab} = \delta_{ad}\delta_{bc} \tag{2.1.25}$$

对 $a, \cdots, d \in [-1/2, 1/2]$，按照 $R(\lambda)$的矩阵写法，有

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \tag{2.1.26}$$

同时，假定 $L_n(\lambda)$可写成

$$L_n(\lambda) = L_n^{(0)} + \lambda^{-1} L_n^{(1)} \tag{2.1.27}$$

其中 $L_n^{(0)}$ 是数值矩阵，并且选取 $(L_n^{(0)})_b^a = \delta_{ab} f_a$，$L_n^{(1)}$ 是与谱参数 λ 无关的算符矩阵。将(2.1.24)式和(2.1.27)式代入(2.1.17a)式，注意到

$$[\overset{1}{L}{}_n^{(0)}, \overset{2}{L}{}_n^{(0)}] = [\overset{1}{L}{}_n^{(1)}, \overset{2}{L}{}_n^{(0)}] = [\overset{1}{L}{}_n^{(0)}, \overset{2}{L}{}_n^{(1)}] = 0$$

$$P \overset{2}{L}_n(\mu) \overset{1}{L}_n(\lambda) P = \overset{1}{L}_n(\mu) \overset{2}{L}_n(\lambda)$$

可以导出

$$\begin{aligned} & R(\lambda-\mu) \overset{1}{L}_n(\lambda) \overset{2}{L}_n(\mu) - \overset{2}{L}_n(\mu) \overset{1}{L}_n(\lambda) R(\lambda-\mu) \\ &= (\lambda-\mu)[\overset{1}{L}_n(\lambda), \overset{2}{L}_n(\mu)] + \alpha P[\overset{1}{L}_n(\lambda) \overset{2}{L}_n(\mu) - \overset{1}{L}_n(\mu) \overset{2}{L}_n(\lambda)] \\ &= \frac{\lambda-\mu}{\lambda\mu}\left([\overset{1}{L}{}_n^{(1)}, \overset{2}{L}{}_n^{(1)}] - \alpha P(\overset{1}{L}{}_n^{(1)} \overset{2}{L}{}_n^{(0)} - \overset{1}{L}{}_n^{(0)} \overset{2}{L}{}_n^{(1)})\right) = 0 \end{aligned}$$

即，(2.1.17a)式成立的条件是：

$$[\overset{1}{L}{}_n^{(1)}, \overset{2}{L}{}_n^{(1)}] = \alpha P(\overset{1}{L}{}_n^{(1)} \overset{2}{L}{}_n^{(0)} - \overset{1}{L}{}_n^{(0)} \overset{2}{L}{}_n^{(1)}) \tag{2.1.28a}$$

或

$$[(L_n^{(1)})_c^a,\ (L_n^{(1)})_d^b] = \alpha(\delta_{ad} f_a (L_n^{(1)})_c^b - \delta_{bc} f_b (L_n^{(1)})_d^a) \tag{2.1.28b}$$

显然,代换 $L_n(\lambda) \to \lambda L_n(\lambda)$,并不影响上面的结论。下面给出几个具有(2.1.24)式和(2.1.27)式结构的例子。

【例 1】 XXX 模型。它的经典来源可看作是耦合常数 $J_1 = J_2 = J_3 = 1$ 情况下的 Landau-Lifshitz 方程,或各向同性海森伯铁磁链模型(H.F 模型)。利用 §1.2 中例 3 的结果,在(1.1.14)式下($\hbar = 1$),场量 $S^a(x,t)$ $(a = 1, 2, 3)$ 满足对易关系:

$$[S^a(x,t),\ S^b(y,t)] = -\mathrm{i}\varepsilon_{abc} S^c(x,t)\delta(x-y) \tag{2.1.29a}$$

格点化后,定义平均算符

$$S_n^a = -\int_{x_n}^{x_n-\Delta} \mathrm{d}x S^a(x,t) \tag{2.1.30}$$

则(2.1.29a)式变为

$$[S_n^a,\ S_m^b] = \mathrm{i}\delta_{nm}\varepsilon_{abc} S_n^c \tag{2.1.31}$$

相应的 $L_n(\lambda)$ 由(1.2.31)式和(2.1.16)式的一阶近似给出:

$$L_n^{\mathrm{XXX}}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 - \mathrm{i}\lambda^{-1}S_n^3 & -\mathrm{i}\lambda^{-1}S_n^- \\ -\mathrm{i}\lambda^{-1}S_n^+ & 1 + \mathrm{i}\lambda^{-1}S_n^3 \end{pmatrix} \tag{2.1.32}$$

其中 $$S_n^{\pm} = S_n^1 \pm \mathrm{i}S_n^2$$

容易看出,这个 $L_n(\lambda)$ 属于(2.1.27)式类型,并且有

$$f_a = 1,\ a = 1/2,\ -1/2;\ L_n^{(1)} = -\mathrm{i}\begin{pmatrix} S_n^3 & S_n^- \\ S_n^+ & -S_n^3 \end{pmatrix} \tag{2.1.33}$$

将(2.1.33)式代入(2.1.28b)式,得到

$$\alpha = -\mathrm{i} \tag{2.1.34}$$

例如,计算矩阵元:$a = b = c = 1/2$, $d = -1/2$,

$$\begin{aligned}[(L_n^{(1)})_{1/2}^{1/2},\ (L_n^{(1)})_{-1/2}^{1/2}] &= -[S_n^3,\ S_n^-] = S_n^- \\ &= -\alpha(L_n^{(1)})_{-1/2}^{1/2} = \mathrm{i}\alpha S_n^{-1}\end{aligned}$$

即得到(2.1.34)式,同理,可以计算其他的矩阵元。由此得到

$$R^{\mathrm{XXX}}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda - \mathrm{i} & & & \\ & \lambda & -\mathrm{i} & \\ & -\mathrm{i} & \lambda & \\ & & & \lambda - \mathrm{i} \end{pmatrix} \tag{2.1.35}$$

由于 $R(\lambda)$允许相差一共同因子,所以可以将(2.1.35)式写成

$$R^{\mathrm{XXX}}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \beta(\lambda) & \alpha(\lambda) & \\ & \alpha(\lambda) & \beta(\lambda) & \\ & & & 1 \end{pmatrix},\ \alpha(\lambda) = \frac{-\mathrm{i}}{\lambda - \mathrm{i}},\ \beta(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda - \mathrm{i}} \tag{2.1.36}$$

一般情况下,S_n^a 是格点 n 上的任意自旋算符。对自旋为 1/2 的特殊情况

$$S_n^a = \frac{1}{2}\sigma_n^a$$

其中 σ_n^a 是格点 n 上的泡利算符,满足关系式

$$\sigma_n^a\sigma_m^b = \begin{cases} \delta_{ab} + \mathrm{i}\varepsilon_{abc}\sigma_n^c, & n = m \\ \sigma_m^b\sigma_n^a, & n \neq m \end{cases} \tag{2.1.29b}$$

相应的哈密顿量为

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}(\sigma_n^1\sigma_{n+1}^1 + \sigma_n^2\sigma_{n+1}^2 + \sigma_n^3\sigma_{n+1}^3) \tag{2.1.37}$$

并且具有周期性边界条件：$\sigma_{N+1}^a = \sigma_1^a$。它描述的是自旋为1/2的近邻相互作用的铁磁链模型。

【例2】 NSE。将泊松括号(1.1.8)式变为对易括号，得到场量 ψ 和 ψ^+(ψ 的厄米共轭)满足的对易关系为：

$$\begin{cases}[\psi(x,t),\psi^+(y,t)] = \delta(x-y)\\ [\psi(x,t),\psi(y,t)] = [\psi^+(x,t),\psi^+(y,t)] = 0\end{cases} \tag{2.1.38}$$

定义

$$\psi_n = \Delta^{-1/2}\int_{x_n}^{x_n+\Delta} \mathrm{d}x\psi(x,t),\ \psi_n^+ = \Delta^{-1/2}\int_{x_n}^{x_n+\Delta} \mathrm{d}x\psi^+(x,t) \tag{2.1.39}$$

由(2.1.38)式，有

$$[\psi_n,\psi_m^+] = \delta_{nm},\ [\psi_n,\psi_m] = [\psi_n^+,\psi_m^+] = 0 \tag{2.1.40}$$

相应的 $L_n(\lambda)$ 矩阵可以通过XXX模型的 $L_n(\lambda)$ 矩阵导出。具体作法如下：令

$$\begin{cases}S_n^1 = \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{c\Delta}}(\psi_n^+\rho_n + \rho_n\psi_n),\ S_n^2 = \dfrac{1}{\sqrt{c\Delta}}(\rho_n\psi_n - \psi_n^+\rho_n)\\ S_n^3 = -\dfrac{2}{c\Delta}\left(1 + \dfrac{c\Delta}{2}\psi_n^+\psi_n\right),\ \rho_n = \left(1 + \dfrac{c\Delta}{4}\psi_n^+\psi_n\right)^{1/2}\end{cases} \tag{2.1.41}$$

不难验证，由(2.1.41)式定义的 S_n^a，$a = 1, 2, 3$，满足(2.1.32)式。例如，利用关系式：

$$\psi_n\rho(\psi_n^+\psi_n) = \rho(\psi_n^+\psi_n + 1)\psi_n,\ \psi_n^+\rho(\psi_n^+\psi_n + 1) = \rho(\psi_n^+\psi_n)\psi_n^+ \tag{2.1.42}$$

其中 $\rho(\psi_n^+\psi_n) \equiv \rho_n$ 表示 ρ_n 是 $\psi_n^+\psi_n$ 的函数，有

$$[S_n^1, S_n^2] = \frac{2\mathrm{i}}{c\Delta}[\psi_n^+\rho_n, \rho_n\psi_n] = \frac{2\mathrm{i}}{c\Delta}(\psi_n^+\rho_n^2\psi_n - \rho_n\psi_n\psi_n^+\rho_n)$$

$$= \frac{2\mathrm{i}}{c\Delta}(\psi_n^+\rho_n^2\psi_n - \psi_n\rho(\psi_n^+\psi_n - 1)\rho(\psi_n^+\psi_n - 1)\psi_n^+)$$

$$= \frac{2\mathrm{i}}{c\Delta}\left(\psi_n^+\left(1 + \frac{c\Delta}{4}\psi_n^+\psi_n\right)\psi_n - \psi_n\left(1 + \frac{c\Delta}{4}(\psi_n^+\psi_n - 1)\right)\psi_n^+\right)$$

$$= -\frac{2\mathrm{i}}{c\Delta}\left(1 + \frac{c\Delta}{2}\psi_n^+\psi_n\right) = \mathrm{i}S_n^3$$

可类似地验证其他关系式。将(2.1.41)式代入(2.1.32)式得到

$$L_n^{\mathrm{XXX}}(\lambda) = \frac{\mathrm{i}2}{\lambda c\Delta}\begin{pmatrix} 1 - \mathrm{i}\,\dfrac{\lambda c\Delta}{2} + \dfrac{c\Delta}{2}\psi_n^+\psi_n & -\mathrm{i}\sqrt{c\Delta}\psi_n^+\rho_n \\ -\mathrm{i}\sqrt{c\Delta}\rho_n\psi_n & -1 - \mathrm{i}\,\dfrac{\lambda c\Delta}{2} - \dfrac{c\Delta}{2}\psi_n^+\psi_n \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\mathrm{i}2}{\lambda c\Delta}\begin{pmatrix} 1 - \mathrm{i}\,\dfrac{\lambda c\Delta}{2} + \dfrac{c\Delta}{2}\psi_n^+\psi_n & \mathrm{i}\sqrt{c\Delta}\psi_n^+\rho_n \\ -\mathrm{i}\sqrt{c\Delta}\rho_n\psi_n & 1 + \mathrm{i}\,\dfrac{\lambda c\Delta}{2} + \dfrac{c\Delta}{2}\psi_n^+\psi_n \end{pmatrix}\sigma_3 \tag{2.1.43}$$

其中 σ_3 是 2×2 泡利矩阵第三分量。定义

$$L_n^{\mathrm{NS}}(\lambda) = -\frac{\mathrm{i}\lambda\Delta}{2}L_n^{\mathrm{XXX}}\left(\frac{\lambda}{c}\right)\sigma_3 \tag{2.1.44}$$

则有

$$L_n^{\mathrm{NS}}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 - \mathrm{i}\,\dfrac{\lambda\Delta}{2} + \dfrac{c\Delta}{2}\psi_n^+\psi_n & \mathrm{i}\sqrt{c\Delta}\psi_n^+\rho_n \\ -\mathrm{i}\sqrt{c\Delta}\rho_n\psi_n & 1 + \mathrm{i}\,\dfrac{\lambda\Delta}{2} + \dfrac{c\Delta}{2}\psi_n^+\psi_n \end{pmatrix} \tag{2.1.45}$$

(2.1.45)式给出 $L_n^{\mathrm{NS}}(\lambda)$就是 NSE 的 $L_n(\lambda)$。由定义(2.1.39)式，容易看出，ψ_n 和 ψ_n^+ 正比于 $\Delta^{1/2}$，而 ρ_n 又是 $\psi_n^+\psi_n$ 的函数，所以(2.1.45)式是 Δ 的无穷级数形式。如果仅考虑 Δ 的一阶项，则(2.1.45)式退化为

$$L_n^{\mathrm{NS}}(\lambda)=\begin{pmatrix}1-\mathrm{i}\dfrac{\lambda\Delta}{2} & \mathrm{i}\sqrt{c\Delta}\psi_n^+\\ -\mathrm{i}\sqrt{c\Delta}\psi_n & 1+\mathrm{i}\dfrac{\lambda\Delta}{2}\end{pmatrix}\tag{2.1.46}$$

(2.1.46)式可以通过经典 NSE 的 $V_n(\lambda)$进行量子化后得到。由(2.1.44)式可清楚地看出，XXX 模型中 $L_n(\lambda/c)$对应于 NSE 中的 $L_n(\lambda)$，所以 $R(\lambda)$矩阵也必需有相应的对应关系，使得(2.1.17)式保持不变。由此，在(2.1.36)式中，将 $\lambda\to\lambda/c$，可以得到 NSE 的 $R(\lambda)$矩阵：

$$R^{\mathrm{NS}}(\lambda)=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & \beta(\lambda) & \alpha(\lambda) & \\ & \alpha(\lambda) & \beta(\lambda) & \\ & & & 1\end{pmatrix},\ \alpha(\lambda)=\frac{-\mathrm{i}c}{\lambda-\mathrm{i}c},\ \beta(\lambda)=\frac{\lambda}{\lambda-\mathrm{i}c}\tag{2.1.47}$$

此外还需指出的是，(2.1.44)式定义的 $L_n^{\mathrm{NS}}(\lambda)$和 $L_n^{\mathrm{XXX}}(\lambda)$差一个 σ_3 矩阵，相当于 $L_n^{\mathrm{XXX}}(\lambda)\to L_n^{\mathrm{XXX}}(\lambda)\sigma_3$，从而有

$$\overset{1}{L}{}_n^{\mathrm{XXX}}(\lambda)\,\overset{2}{L}{}_n^{\mathrm{XXX}}(\mu)\to\overset{1}{L}{}_n^{\mathrm{XXX}}(\lambda)\,\overset{2}{L}{}_n^{\mathrm{XXX}}(\mu)\,\overset{1}{\sigma}_3\,\overset{2}{\sigma}_3$$

$$\overset{2}{L}{}_n^{\mathrm{XXX}}(\mu)\,\overset{1}{L}{}_n^{\mathrm{XXX}}(\lambda)\to\overset{2}{L}{}_n^{\mathrm{XXX}}(\mu)\,\overset{1}{L}{}_n^{\mathrm{XXX}}(\lambda)\,\overset{1}{\sigma}_3\,\overset{2}{\sigma}_3$$

考虑到

$$[R(\lambda-\mu),\ \overset{1}{\sigma}_3\,\overset{2}{\sigma}_3]=0$$

所以这种变换保持了

$$R^{\mathrm{NS}}(\lambda-\mu)\overset{1}{L}{}_n^{\mathrm{NS}}(\lambda)\overset{2}{L}{}_n^{\mathrm{NS}}(\mu)=\overset{2}{L}{}_n^{\mathrm{NS}}(\mu)\overset{1}{L}{}_n^{\mathrm{NS}}(\lambda)R^{\mathrm{NS}}(\lambda-\mu)$$

最后再做一点说明：由(2.1.40)式～(2.1.42)式，不难计算出

$$\sum_{a=1}^{3}(S_n^a)^2=S(S+1),\ S=-\frac{2}{c\Delta} \tag{2.1.48}$$

而 NSE 是连续模型，所以最终的物理结果要求 $\Delta\to 0$。当 $c<0$(对应束缚态)，这意味着自旋量子数 S 很大时，XXX 模型才能近似对应 NS 模型。

【例 3】 TC 模型。经典正则共轭变量 q_n, p_n 量子化后，变为算符。它们遵从的对易关系是

$$[q_n,\ p_m]=\mathrm{i}\delta_{nm} \tag{2.1.49}$$

1) $R(\lambda)$矩阵的有理解。TC 模型的 $L_n(\lambda)$仍具有经典情况下的(2.1.7)式形式：

$$L_n^{\mathrm{TC}}(\lambda)=\begin{pmatrix}p_n-\lambda & -\mathrm{e}^{q_n}\\ \mathrm{e}^{-q_n} & 0\end{pmatrix} \tag{2.1.50}$$

但是(2.1.50)式中的 q_n 和 p_n 现在是算符。它也属于(2.1.27)式类型，由(2.1.50)式容易看出

$$f_{1/2}=-1,\ f_{-1/2}=0,\ L_n^{(1)}=\begin{pmatrix}p_n & -\mathrm{e}^{q_n}\\ \mathrm{e}^{-q_n} & 0\end{pmatrix} \tag{2.1.51}$$

由(2.1.28b)式和(2.1.51)式确定出 $\alpha=\mathrm{i}$。由此得到

$$R^{\mathrm{TC}}(\lambda)=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & \beta(\lambda) & \alpha(\lambda) & \\ & \alpha(\lambda) & \beta(\lambda) & \\ & & & 1\end{pmatrix},\ \alpha(\lambda)=\frac{\mathrm{i}}{\lambda+\mathrm{i}},\ \beta(\lambda)=\frac{\lambda}{\lambda+\mathrm{i}} \tag{2.1.52}$$

对变换(2.1.20b)式,取 $G(\lambda)=g$,g 由(2.1.12)给出。容易证明,$[p, g\otimes g]=0$。这导致 $[R^{\mathrm{TC}}(\lambda-\mu), g\otimes g]=0$。从而 $L_n^{\mathrm{TC}}(\lambda)$ 变为

$$L_n^{\mathrm{TC}}(\lambda)=gL_n^{\mathrm{TC}}(\lambda)g^{-1}$$
$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} p_n-\lambda-2\mathrm{i}\,\mathrm{ch}q_n & \mathrm{i}(p_n-\lambda)-2\mathrm{sh}q_n \\ -\mathrm{i}(p_n-\lambda)-2\mathrm{sh}q_n & p_n-\lambda+2\mathrm{i}\,\mathrm{ch}q_n \end{pmatrix} \tag{2.1.53}$$

2) $R(x)$矩阵的三角解。为方便起见,令 $x=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda}$, $y=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu}$,(2.1.17a)式可以改写为

$$R(xy^{-1})\overset{1}{L}_n(x)\overset{2}{L}_n(y)=\overset{2}{L}_n(y)\overset{1}{L}_n(x)R(xy^{-1}) \tag{2.1.54}$$

假设

$$R(x)=xA-x^{-1}B \tag{2.1.55}$$

其中,A 和 B 是 4×4 矩阵:

$$A=\begin{pmatrix} q & & & \\ & 1 & q-q^{-1} & \\ & & 1 & \\ & & & q \end{pmatrix},\ B=PA^{-1}P \tag{2.1.56}$$

P 由(2.1.26)式给出,q 是任意常数。假定 $L_n(\lambda)$有如下结构:

$$L_n(x)=xL_n^+-x^{-1}L_n^- \tag{2.1.57}$$

其中

$$L_n^+=\begin{pmatrix} K_n & wX_n^+ \\ 0 & K_n^{-1} \end{pmatrix},\ L_n^-=\begin{pmatrix} K_n^{-1} & 0 \\ -wX_n^- & K_n \end{pmatrix},\ w\equiv q-q^{-1} \tag{2.1.58}$$

有关 $X_n^{\pm}$,K_n 的对易关系将由形如(2.1.54)式的 RTT 关系确定。

将(2.1.55)式和(2.1.57)式代入(2.1.54)式,比较 x、y 的同次幂,有

$$A\overset{1}{L}{}_n^{\pm}\overset{2}{L}{}_n^{\pm}=\overset{2}{L}{}_n^{\pm}\overset{1}{L}{}_n^{\pm}A,\quad A\overset{1}{L}{}_n^{+}\overset{2}{L}{}_n^{-}=\overset{2}{L}{}_n^{-}\overset{1}{L}{}_n^{+}A \tag{2.1.59a}$$

$$B\overset{1}{L}{}_n^{\pm}\overset{2}{L}{}_n^{\pm}=\overset{2}{L}{}_n^{\pm}\overset{1}{L}{}_n^{\pm}B,\quad B\overset{1}{L}{}_n^{-}\overset{2}{L}{}_n^{+}=\overset{2}{L}{}_n^{+}\overset{1}{L}{}_n^{-}B \tag{2.1.59b}$$

$$A\overset{1}{L}{}_n^{-}\overset{2}{L}{}_n^{+}-\overset{2}{L}{}_n^{+}\overset{1}{L}{}_n^{-}A=B\overset{1}{L}{}_n^{+}\overset{2}{L}{}_n^{-}-\overset{2}{L}{}_n^{-}\overset{1}{L}{}_n^{+}B \tag{2.1.59c}$$

由(2.1.56)式容易证明,(2.1.59b)式等价于(2.1.59a)式,例如

$$\begin{aligned}B\overset{1}{L}{}_n^{\pm}\overset{2}{L}{}_n^{\pm}-\overset{2}{L}{}_n^{\pm}\overset{1}{L}{}_n^{\pm}B&=P(A^{-1}\overset{2}{L}{}_n^{\pm}\overset{1}{L}{}_n^{\pm}-\overset{1}{L}{}_n^{\pm}\overset{2}{L}{}_n^{\pm}A^{-1})P\\&=PA^{-1}(\overset{2}{L}{}_n^{\pm}\overset{1}{L}{}_n^{\pm}A-A\overset{1}{L}{}_n^{\pm}\overset{2}{L}{}_n^{\pm})A^{-1}P\\&=0\end{aligned}$$

所以只需考虑(2.1.59a)式和(2.1.59c)式。再将(2.1.56)式和(2.1.58)式代入(2.1.59a)式、(2.1.59c)式,得到如下代数关系:

$$K_nX_n^{\pm}=q^{\mp1}X_n^{\pm}K_n,\ [X_n^{+},X_n^{-}]=-w^{-1}(K_n^2-K_n^{-2}) \tag{2.1.60}$$

也就是说,对(2.1.55)式~(2.1.58)式给出的 $R(\lambda)$ 和 $L_n(\lambda)$ 只要满足(2.1.60)式,则有(2.1.54)式成立。

为了和已知的物理模型更好地联系起来,我们需要从两方面讨论:

a) 在变换(2.1.20b)式和(2.1.20c)式下,取

$$G(x)=\begin{pmatrix}x^{-1/2}&\\&x^{1/2}\end{pmatrix} \tag{2.1.61}$$

则由(2.1.55)式、(2.1.56)式定义的 $R(x)$ 和由(2.1.57)式、(2.1.58)式定义的 $L_n(x)$ 分别变为

$$R'(x)=\begin{pmatrix} qx-q^{-1}x^{-1} & & & \\ & x-x^{-1} & w & \\ & w & x-x^{-1} & \\ & & & qx-q^{-1}x^{-1} \end{pmatrix} \tag{2.1.62}$$

和

$$L_n'(x)=\begin{pmatrix} xK_n-x^{-1}K_n^{-1} & wX_n^+ \\ wX_n^- & xK_n^{-1}-x^{-1}K_n \end{pmatrix} \tag{2.1.63}$$

b) 再对 $L_n'(x)$ 作变换：

$$L_n''(x)=-\mathrm{i}\sigma_2 L_n'(x),\ \sigma_2=\mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.1.64}$$

利用

$$R'^{ab}_{cd}(x)=0,\ a+b\neq c+d,\ R'^{ab}_{cd}(x)=R'^{-a-b}_{-c-d}(x) \tag{2.1.65}$$

易证

$$[R'(xy^{-1}),\ \sigma_2\otimes\sigma_2]=0 \tag{2.1.66}$$

这表明对 $L_n''(x)$ 有

$$R'(xy^{-1})\overset{1}{L}{}_n''(x)\overset{2}{L}{}_n''(y)=\overset{2}{L}{}_n''(y)\overset{1}{L}{}_n''(x)R'(xy^{-1})$$

(2.1.63)式和(2.1.64)式给出 $L_n''(x)$ 的具体形式为

$$L_n''(x)=\begin{pmatrix} -wX_n^- & x^{-1}K_n-xK_n^{-1} \\ xK_n-x^{-1}K_n^{-1} & wX_n^+ \end{pmatrix} \tag{2.1.67}$$

下面给出与上面讨论有关的具体例子。

【例 4】 XXZ 模型。这个模型类似于 XXX 模型，差别仅在于耦合常数 $J_1=J_2=1$，$J_3=\cos\eta\neq 1$，η 是任意常数。对自旋为 1/2 的情况，系统的哈密顿量为

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}(\sigma_n^1\sigma_{n+1}^1 + \sigma_n^2\sigma_{n+1}^2 + \cos\eta\,\sigma_n^3\sigma_{n+1}^3) \tag{2.1.68}$$

其中泡利算符 σ_n^a 的对易关系已由(2.1.29b)式给出。相应的$L_n(x)$具有(2.1.63)式的形式，并且

$$K_n = e^{i\frac{\eta}{2}\sigma_3},\ X_n^{\pm} = \frac{1}{2}\sigma_n^{\mp},\ q = e^{i\eta} \tag{2.1.69}$$

其中 $\sigma_n^{\pm} = \sigma_n^1 \pm i\sigma_n^2$。容易验证(2.1.69)式满足(2.1.60)式。由(2.1.69)式得到

$$L_n^{XXZ}(\lambda) = \begin{pmatrix} w_4(\lambda) + w_3(\lambda)\sigma_n^3 & W\sigma_n^- \\ W\sigma_n^+ & w_4(\lambda) - w_3(\lambda)\sigma_n^3 \end{pmatrix} \tag{2.1.70}$$

其中

$$w_4(\lambda) \pm w_3(\lambda) = \sin\left(\lambda \pm \frac{\eta}{2}\right),\ W = \frac{1}{2}\sin\eta \tag{2.1.71}$$

和

$$\begin{cases} R^{XXZ}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \beta(\lambda) & \alpha(\lambda) & \\ & \alpha(\lambda) & \beta(\lambda) & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \\ \alpha(\lambda) = \dfrac{\sin\eta}{\sin(\lambda+\eta)} \\ \beta(\lambda) = \dfrac{\sin\lambda}{\sin(\lambda+\eta)} \end{cases} \tag{2.1.72}$$

【例 5】 SGE。量子化后的正则共轭场量 φ 和 π 满足对易关系

$$\begin{cases} [\varphi(x,t),\ \pi(y,t)] = i\delta(x-y) \\ [\varphi(x,t),\ \varphi(y,t)] = [\pi(x,t),\ \pi(y,t)] = 0 \end{cases} \tag{2.1.73}$$

定义

$$q_n = \frac{1}{\Delta}\int_{x_n}^{x_n+\Delta} dx\varphi(x, t), \quad p_n = \int_{x_n}^{x_n+\Delta} dx\pi(x, t) \quad (2.1.74)$$

容易验证,q_n、p_n 满足对易关系

$$[q_n, p_m] = i\delta_{nm} \quad (2.1.75)$$

引入算符:

$$u_n^{\pm} = \exp\left\{\pm i\frac{\beta}{4}p_n\right\}, \quad v_n^{\pm} = \Delta\exp\left\{\pm i\frac{\beta}{2}q_n\right\} \quad (2.1.76)$$

利用

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \cdots$$

可以证明 $u_n^{\pm}$, $v_n^{\pm}$ 遵从交换关系

$$u_n^{\varepsilon}v_n^{\varepsilon'} = v_n^{\varepsilon'}u_n^{\varepsilon}\exp\{i\varepsilon\varepsilon'\beta^2/8\} \quad (\varepsilon, \varepsilon' = \pm) \quad (2.1.77)$$

SGE 的 $L_n(x)$具有(2.1.67)的形式,K_n, $X_n^{\pm}$ 由下式给出:

$$K_n = v_n^{+}, \quad X_n^{\pm} = \mp\frac{4}{wm}w_n^{\pm} \quad (2.1.78)$$

将(2.1.78)式代入(2.1.60)式,前式给出

$$K_nX_n^{\pm} = \mp\frac{4}{wm}v_n^{+}u_n^{\pm} = \mp\frac{4}{wm}u_n^{\pm}v_n^{+}\exp\{\mp i\beta^2/8\}$$

$$= X_n^{\pm}K_n\exp\{\mp i\beta^2/8\}$$

从而得到

$$q = \exp\{i\gamma\}, \quad \gamma = \beta^2/8 \quad (2.1.79)$$

计算后一式

$$[X_n^{+}, X_n^{-}] = 0, \quad K_n^2 - K_n^{-2} = \Delta^2 2i\sin\beta q_n$$

在 Δ 的一阶近似下,忽略 Δ^2 项,可以使得(2.1.60)式的后一式成

立。最后得

$$L_n^{SG}(\lambda) = \begin{pmatrix} u_n^- & \frac{m}{4}(x^{-1}v_n^- - xv_n^+) \\ \frac{m}{4}(xv_n^- - x^{-1}v_n^+) & u_n^- \end{pmatrix} \tag{2.1.80}$$

其中，$x = \exp\{\lambda\}$。由(2.1.62)式和(2.1.79)式写出

$$\begin{cases} R^{SG}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \beta(\lambda) & \alpha(\lambda) & \\ & \alpha(\lambda) & \beta(\lambda) & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \\ \alpha(\lambda) = \dfrac{\mathrm{i}\sin\gamma}{\mathrm{sh}(\lambda + \mathrm{i}\gamma)} \\ \beta(\lambda) = \dfrac{\mathrm{sh}\lambda}{\mathrm{sh}(\lambda + \mathrm{i}\gamma)} \end{cases} \tag{2.1.81}$$

上面结合具体物理模型讨论了 $R(\lambda)$矩阵的有理解和三角解。除这两类解之外，还有一种类型解——椭圆解，典型的例子是 XYZ 模型。XYZ 模型描述的是具有近邻相互作用、自旋为 1/2 的磁链系统。它的经典模型来源可以看作是 Landau-Lifishitz 方程($J_1 \neq J_2 \neq J_3$)。XYZ 模型的 $L_n(\lambda)$和 $R(\lambda)$分别是 2×2 矩阵和 4×4 矩阵，它们的矩阵元用 Jacobi 椭圆函数表示。这里不作更多的介绍，有兴趣的读者可参阅有关文献[1～4，12，13，15]。

(2) QYBE

类似§1.3 中对 CYBE 的讨论，考虑在三个辅助空间中定义的 $L_n(\lambda)$矩阵。为此引入 $\overset{i}{L}_n(\lambda)$，$i = 1, 2, 3$，定义为

$$\overset{1}{L}_n(\lambda) = L_n(\lambda) \otimes I \otimes I, \quad \overset{2}{L}_n(\lambda) = I \otimes L_n(\lambda) \otimes I, \quad \overset{3}{L}_n(\lambda) = I \otimes I \otimes L_n(\lambda)$$

由基本量子交换关系式(2.1.17)，不难看出，不同空间上的 $L_n(\lambda)$之

间的交换，是借助于 $R(\lambda)$ 矩阵实现的。如果考虑 $\overset{1}{L}_n(u_1)\overset{2}{L}_n(u_2)\overset{3}{L}_n(u_3)$ 到 $\overset{3}{L}_n(u_3)\overset{2}{L}_n(u_2)\overset{1}{L}_n(u_1)$ 过程，那么这个过程必然是通过 $R(\lambda)$ 对空间逐次交换完成。假如交换方式不是唯一的，那么必然对 $R(\lambda)$ 矩阵存在限制条件，以保证不同的交换方式是等价的。这种限制条件就是 QYBE。下面给出具体的推导过程。

为区分在不同空间上的 $R(\lambda)$ 矩阵，将处在第 i 个空间和第 j 个空间上的 $R(\lambda)$ 标记为 $R_{ij}(\lambda)$，相应地将(2.1.17)式改写为

$$R_{ij}(u_{ij})\overset{i}{L}_n(u_i)\overset{j}{L}_n(u_j)=\overset{j}{L}_n(u_j)\overset{i}{L}_n(u_i)R_{ij}(u_{ij}) \qquad (2.1.82)$$

其中 $u_{ij}\equiv u_i-u_j$；$i, j=1, 2, 3$，代表谱参数。由 $\overset{1}{L}_n\overset{2}{L}_n\overset{3}{L}_n$ 到 $\overset{3}{L}_n\overset{2}{L}_n\overset{1}{L}_n$ 有两种交换方式，第一种方式是

$$\begin{aligned}
&R_{12}(u_{12})R_{13}(u_{13})R_{23}(u_{23})\overset{1}{L}_n(u_1)\overset{2}{L}_n(u_2)\overset{3}{L}_n(u_3)\\
&=R_{12}(u_{12})R_{13}(u_{13})\overset{1}{L}_n(u_1)\overset{3}{L}_n(u_3)\overset{2}{L}_n(u_2)R_{23}(u_{23})\\
&=R_{12}(u_{12})\overset{3}{L}_n(u_3)\overset{1}{L}_n(u_1)\overset{2}{L}_n(u_2)R_{13}(u_{13})R_{23}(u_{23})\\
&=\overset{3}{L}_n(u_3)\overset{2}{L}_n(u_2)\overset{1}{L}_n(u_1)R_{12}(u_{12})R_{13}(u_{13})R_{23}(u_{23})
\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}
&R_{12}(u_{12})R_{13}(u_{13})R_{23}(u_{23})\\
&\quad\cdot\overset{1}{L}_n(u_1)\overset{2}{L}_n(u_2)\overset{3}{L}_n(u_3)\big(R_{12}(u_{12})R_{13}(u_{13})R_{23}(u_{23})\big)^{-1}\\
&=\overset{3}{L}_n(u_3)\overset{2}{L}_n(u_2)\overset{1}{L}_n(u_1)
\end{aligned}$$

第二种方式是

$$\begin{aligned}
&R_{23}(u_{23})R_{13}(u_{13})R_{12}(u_{12})\overset{1}{L}_n(u_1)\overset{2}{L}_n(u_2)\overset{3}{L}_n(u_3)\\
&=R_{23}(u_{23})R_{13}(u_{13})\overset{2}{L}_n(u_2)\overset{1}{L}_n(u_1)\overset{3}{L}_n(u_3)R_{12}(u_{12})
\end{aligned}$$

$$= R_{23}(u_{23}) \overset{2}{L}_n(u_2) \overset{3}{L}_n(u_3) \overset{1}{L}_n(u_1) R_{13}(u_{13}) R_{12}(u_{12})$$

$$= \overset{3}{L}_n(u_3) \overset{2}{L}_n(u_2) \overset{1}{L}_n(u_1) R_{23}(u_{23}) R_{13}(u_{13}) R_{12}(u_{12})$$

即

$$R_{23}(u_{23}) R_{13}(u_{13}) R_{12}(u_{12}) \overset{1}{L}_n(u_1) \overset{2}{L}_n(u_2) \overset{3}{L}_n(u_3) \cdot \left(R_{23}(u_{23}) R_{13}(u_{13}) R_{12}(u_{12}) \right)^{-1} = \overset{3}{L}_n(u_3) \overset{2}{L}_n(u_2) \overset{1}{L}_n(u_1)$$

比较这两种交换方式，得到

$$\left(R_{23}(u_{23}) R_{13}(u_{13}) R_{12}(u_{12}) \right)^{-1} R_{12}(u_{12}) R_{13}(u_{13}) R_{23}(u_{23}) \cdot \overset{1}{L}_n(u_1) \overset{2}{L}_n(u_2) \overset{3}{L}_n(u_3)$$
$$= \overset{1}{L}_n(u_1) \overset{2}{L}_n(u_2) \overset{3}{L}_n(u_3) \left(R_{23}(u_{23}) R_{13}(u_{13}) \cdot R_{12}(u_{12}) \right)^{-1} R_{12}(u_{12}) R_{13}(u_{13}) R_{23}(u_{23})$$

或

$$\left[\left(R_{23}(u_{23}) R_{13}(u_{13}) R_{12}(u_{12}) \right)^{-1} R_{12}(u_{12}) R_{13}(u_{13}) \cdot R_{23}(u_{23}),\ \overset{1}{L}_n(u_1) \overset{2}{L}_n(u_2) \overset{3}{L}_n(u_3) \right] = 0$$

这一结果导致

$$\left(R_{23}(u_{23}) R_{13}(u_{13}) R_{12}(u_{12}) \right)^{-1} R_{12}(u_{12}) R_{13}(u_{13}) R_{23}(u_{23}) = \text{常数} \times I_{123} \tag{2.1.83}$$

$I_{123} = I \otimes I \otimes I$。对方程(2.1.83)两边分别取行列式，注意到，对矩阵 A, B 有 $\det AB = \det A \cdot \det B$，可计算出方程左边的行列式等于 I_{123}的行列式，从而确定常数等于 1。由此得到

$$R_{12}(u_{12})R_{13}(u_{13})R_{23}(u_{23}) = R_{23}(u_{23})R_{13}(u_{13})R_{12}(u_{12}) \tag{2.1.84}$$

这就是 QYBE。前面已经讨论过的 $R(\lambda)$矩阵的有理解和三角解及后来提到的椭圆解都可以由 QYBE 直接解出。从(2.1.17)式及有关讨论中可看出,QYBE 的解的重要意义在于确定了局域量子算符(格点上)之间的交换关系。以下介绍它也决定了整体量子转移矩阵的交换关系。对给定的一种类型的 QYBE 的解,则相应地确定了一种代数交换关系,对代数关系的不同物理实现,也就对应于不同的物理模型。例如对有理解,前面已介绍了 XXX 模型、NSE、TC 模型的 $L_n(\lambda)$的不同物理实现。当然,QYBE 的解不仅仅限于 2×2 矩阵,它有着任意 $N^2\times N^2$ 的矩阵表示,并且有着各种结构的丰富表现方式。这些将在以后的章节里给予讨论。

(3) 整体转移矩阵 $T(\lambda)$和它的交换关系

上面介绍了局域性辅助函数满足的矩阵方程和量子交换关系,其中(2.1.15)、(2.1.17)及(2.1.18)式是基本的关系式。从这些关系式出发,讨论量子化后的整体转移矩阵。

与经典可积模型的讨论类似,以 x_1 点作为初始点,用(2.1.15)式作逐次迭代,有

$$\Phi_{N+1}(\lambda) = L_N(\lambda)L_{N-1}(\lambda)\cdots L_1(\lambda)\Phi_1(\lambda) \tag{2.1.85}$$

它描述了从 $\Phi_1(\lambda)$,通过 $L_n(\lambda)$,到 $\Phi_{N+1}(\lambda)$ 的转移过程。假设 $\Phi_n(\lambda)$具有边界条件:

$$\Phi_1(\lambda) = I \tag{2.1.86}$$

定义

$$\begin{aligned} T_N(\lambda) \equiv \Phi_{N+1}(\lambda) &= \prod_{n=1}^{\frown} L_n(\lambda) \\ &= L_N(\lambda)L_{N-1}(\lambda)\cdots L_1(\lambda) \end{aligned} \tag{2.1.87}$$

其中$\frown$标记$L_n(\lambda)$的排列顺序:按格点1，⋯，N,从右到左排列。由(2.1.87)式所定义的$T_N(\lambda)$就是量子整体转移矩阵。对于连续量子可积模型,为了保证所有物理结论的正确性,要求$\Delta\to 0$，即从格点情况退回到连续情况,所以最后要对$T_N(\lambda)$取$\Delta\to 0$的极限。

通过量子交换关系(2.1.17)式和(2.1.18)式,可建立$T_N(\lambda)$的量子交换关系。具体作法如下:首先考虑在两个辅助空间上的$\overset{1}{T}_N(\lambda)\overset{2}{T}_N(\mu)$。由定义式(2.1.87)式,有

$$\overset{1}{T}_N(\lambda)\,\overset{2}{T}_N(\mu)=(\overset{1}{L}_N(\lambda)\cdots\overset{1}{L}_1(\lambda))(\overset{2}{L}_N(\mu)\cdots\overset{2}{L}_1(\mu))$$

利用(2.1.18)式,可以将$\overset{2}{L}_N(\mu)$与$\overset{1}{L}_1(\lambda)$，⋯，$\overset{1}{L}_{N-1}(\lambda)$交换,最后放在$\overset{1}{L}_N(\lambda)$的右边。类似地,对$\overset{2}{L}_{N-1}(\mu)$到$\overset{2}{L}_2(\mu)$依次作交换,从而得到

$$\begin{aligned}&\overset{1}{T}_N(\lambda)\,\overset{2}{T}_N(\mu)\\&=(\overset{1}{L}_N(\lambda)\,\overset{2}{L}_N(\mu))(\overset{1}{L}_{N-1}(\lambda)\,\overset{2}{L}_{N-1}(\mu))\cdots(\overset{1}{L}_1(\lambda)\,\overset{2}{L}_1(\mu))\end{aligned}$$

用$R(\lambda-\mu)$从左边作用到上式,再利用(2.1.17)式可导出

$$\begin{aligned}&R(\lambda-\mu)\,\overset{1}{T}_N(\lambda)\,\overset{2}{T}_N(\mu)\\&\quad=(\overset{2}{L}_N(\mu)\,\overset{1}{L}_N(\lambda))R(\lambda-\mu)\\&\qquad\cdot(\overset{1}{L}_{N-1}(\lambda)\,\overset{2}{L}_{N-1}(\mu))\cdots(\overset{1}{L}_1(\lambda)\,\overset{2}{L}_1(\mu))\\&\quad=\cdots\\&\quad=(\overset{2}{L}_N(\mu)\,\overset{1}{L}_N(\lambda))(\overset{2}{L}_{N-1}(\mu)\,\overset{1}{L}_{N-1}(\lambda))\cdots\\&\qquad\cdot(\overset{2}{L}_1(\mu)\,\overset{1}{L}_1(\lambda))R(\lambda-\mu)\end{aligned}$$

再由

$$(\overset{2}{L}_N(\mu)\,\overset{1}{L}_N(\lambda))\cdots(\overset{2}{L}_1(\mu)\,\overset{1}{L}_1(\lambda))$$

$$= (\overset{2}{L}_N(\mu)\cdots\overset{2}{L}_1(\mu))(\overset{1}{L}_N(\lambda)\cdots\overset{1}{L}_1(\lambda)) = \overset{2}{T}_N(\mu)\overset{1}{T}_N(\lambda)$$

最后得到

$$R(\lambda-\mu)\overset{1}{T}_N(\lambda)\overset{2}{T}_N(\mu) = \overset{2}{T}_N(\mu)\overset{1}{T}_N(\lambda)R(\lambda-\mu) \tag{2.1.88}$$

这就是$T_N(\lambda)$所遵从的量子交换关系式,被称为RTT关系。

RTT关系的重要性在于:i)它给出了量子整体转移矩阵$T_N(\lambda)$的矩阵元之间的交换关系;ii)由$T_N(\lambda)$生成出系统的守恒量。将(2.1.88)式改写为

$$R(\lambda-\mu)\overset{1}{T}_N(\lambda)\overset{2}{T}_N(\mu)R(\lambda-\mu)^{-1} = \overset{2}{T}_N(\mu)\overset{1}{T}_N(\lambda)$$

对上式取迹,得到

$$[\tau_N(\lambda),\ \tau_N(\mu)] = 0 \tag{2.1.89}$$

其中$\tau_N(\lambda)$定义为

$$\tau_N(\lambda) = \mathrm{tr}T_N(\lambda) \tag{2.1.90}$$

将$\tau_N(\lambda)$展成λ的级数形式(无穷级数或有限级数):

$$\tau_N(\lambda) = \sum_n \lambda^{-n}c_n \tag{2.1.91}$$

则由(2.1.89)式给出

$$[c_n,\ c_m] = 0$$

这意味着$\{c_n\}$构成可对易集合。如果系统的哈密顿量可由某一个c_n(或某些项的线性组合)给出,那么其余的c_n是系统的守恒量。

这里需要指出的是,如同经典情况一样,为了保证$T_N(\lambda)$不依赖于时间t和均匀收敛,对某些物理模型需要重新定义$T(\lambda)$。在构造守恒量集合时,有时用$\tau_N(\lambda)$的函数作级数展开,以便于从展开系数中确定哈密顿量。下面以NSE为例作具体说明。

首先考察由(2.1.46)式给出的$L_n(\lambda)$。假定$\psi_n^+\psi_n\sim\Delta$(因为ψ_n

与 $\psi_n^+ \sim \Delta^{1/2}$，所以可以作这样假设)，则 $\psi_n\psi_n^+ = 1 + \psi_n^+\psi_n \sim 1 + \Delta$。那么在 Δ 的一级近似下，有

$$\overset{1}{L}_n(\lambda)\overset{2}{L}_n(\mu) = L_n(\lambda)\otimes L_n(\mu)$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1-\frac{\mathrm{i}\Delta}{2}(\lambda+\mu) & & & \\ & 1-\frac{\mathrm{i}\Delta}{2}(\lambda-\mu) & 0 & \\ & c\Delta & 1+\mathrm{i}\,\frac{\Delta}{2}(\lambda-\mu) & \\ & & & 1+\mathrm{i}\,\frac{\Delta}{2}(\lambda+\mu) \end{pmatrix}$$

$$= W_1(\lambda, \mu)$$

上式具有对角分块的形式，所以写成

$$W_1(\lambda, \mu)$$

$$= \text{Block diag}\left(1 - \frac{\mathrm{i}\Delta}{2}(\lambda+\mu), [W_1(\lambda, \mu)]_{\mathrm{mid}}, 1 + \mathrm{i}\,\frac{\Delta}{2}(\lambda+\mu)\right)$$

$$[W_1(\lambda, \mu)]_{\mathrm{mid}} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\mathrm{i}\Delta}{2}(\lambda-\mu) & 0 \\ c\Delta & 1 + \mathrm{i}\,\frac{\Delta}{2}(\lambda-\mu) \end{pmatrix} \tag{2.1.92a}$$

其中 $[W_1(\lambda, \mu)]_{\mathrm{mid}}$ 表示 $W_1(\lambda, \mu)$ 的中心块。类似地，对 $\overset{2}{L}_n(\mu)\overset{1}{L}_n(\lambda)$ 作 Δ 的一级近似，得到

$$W_2(\mu, \lambda)$$

$$= \text{Block diag}\left(1 - \frac{\mathrm{i}\Delta}{2}(\lambda+\mu), [W_2(\mu,\lambda)]_{\mathrm{mid}}, 1 + \mathrm{i}\,\frac{\Delta}{2}(\lambda+\mu)\right)$$

$$[W_2(\mu,\ \lambda)]_{\mathrm{mid}} = \begin{pmatrix} 1-\dfrac{\mathrm{i}\Delta}{2}(\lambda-\mu) & c\Delta \\ 0 & 1+\mathrm{i}\dfrac{\Delta}{2}(\lambda-\mu) \end{pmatrix} \tag{2.1.92b}$$

将格点化的插入点由 N 变成 $2N$，令 $x_{2N+1}=L,\ x_1=-L$，则有 $L=\Delta N$。当 $L\to\infty$ 时，$2N$ 个 $W_1(\lambda,\ \mu)$ 的乘积是发散的（对 $W_2(\mu,\ \lambda)$ 亦如此），从而导致 $\overset{1}{T}_N(\lambda)\overset{2}{T}_N(\mu)\left(\overset{2}{T}_N(\mu)\overset{1}{T}_N(\lambda)\right)$ 发散。为了保证 $\overset{1}{T}_N(\lambda)\overset{2}{T}_N(\mu)$ 和 $\overset{2}{T}_N(\mu)\overset{1}{T}_N(\lambda)$ 的收敛性，要求

$$\overset{1}{T}_N(\lambda)\,\overset{2}{T}_N(\mu)\to W_1(\lambda,\ \mu)^{-N}\,\overset{1}{T}_N(\lambda)\,\overset{2}{T}_N(\mu)W_1(\lambda,\ \mu)^{-N}$$

$$\overset{2}{T}_N(\mu)\,\overset{1}{T}_N(\lambda)\to W_2(\mu,\ \lambda)^{-N}\,\overset{2}{T}_N(\mu)\,\overset{1}{T}_N(\lambda)W_2(\mu,\ \lambda)^{-N}$$

为此，用 $W_2(\mu,\ \lambda)^{-N}$左乘(2.1.88)式，$W_1(\lambda,\ \mu)^{-N}$右乘(2.1.88)式，并且注意到

$$R(\lambda-\mu)W_1(\lambda,\ \mu)=W_2(\mu,\ \lambda)R(\lambda-\mu) \tag{2.1.93}$$

可得到

$$\begin{aligned} &R(\lambda-\mu)W_1(\lambda,\ \mu)^{-N}\,\overset{1}{T}_N(\lambda)\,\overset{2}{T}_N(\mu)W_1(\lambda,\ \mu)^{-N} \\ &=W_2(\mu,\ \lambda)^{-N}\,\overset{2}{T}_N(\mu)\,\overset{1}{T}_N(\lambda)W_2(\mu,\ \lambda)^{-N}R(\lambda-\mu) \end{aligned} \tag{2.1.94}$$

此外，类似于经典情况的讨论，Φ_n 的边界 Φ_{2N+1} 和 Φ_1 是发散的 $(L\to\infty)$，所以需要重新定义

$$T(\lambda)=\lim_{\substack{\Delta\to 0\\ L\to\infty}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\lambda L}{2}\sigma_3}T_N(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\lambda L}{2}\sigma_3} \tag{2.1.95}$$

由(2.1.94)式和(2.1.95)式，经过简单计算，有

$$R_+(\lambda-\mu)\overset{1}{T}(\lambda)\overset{2}{T}(\mu)=\overset{2}{T}(\mu)\overset{1}{T}(\lambda)R_-(\lambda-\mu) \tag{2.1.96a}$$

其中

$$R_\pm(\lambda-\mu)=U_2^\pm(\mu,\lambda)R(\lambda-\mu)U_1^\pm(\lambda,\mu) \tag{2.1.96b}$$

$$\begin{cases} U_1^\pm(\lambda,\mu)=\lim\limits_{\substack{\Delta\to 0\\ L\to\infty}} W_1(\lambda,\mu)^{\mp N}\left(e^{\mp i\frac{\lambda L}{2}\sigma_3}\otimes e^{\mp i\frac{\lambda L}{2}\sigma_3}\right) \\ U_2^\pm(\mu,\lambda)=\lim\limits_{\substack{\Delta\to 0\\ L\to\infty}} \left(e^{\pm i\frac{\lambda L}{2}\sigma_3}\otimes e^{\pm i\frac{\lambda L}{2}\sigma_3}\right)W_2(\mu,\lambda)^{\pm N} \end{cases} \tag{2.1.97}$$

为了得到 $R_\pm(\lambda-\mu)$ 的明显矩阵形式，首先要计算 $U_1^\pm(\lambda,\mu)$ 和 $U_2^\pm(\mu,\lambda)$。在 Δ 的一级近似下，将 $W_1(\lambda,\mu)$中的矩阵元写成

$$1\pm\frac{i\Delta}{2}(\lambda+\mu)\cong e^{\pm i\frac{\Delta}{2}(\lambda+\mu)}$$

$$[W_1(\lambda,\mu)]_{\text{mid}}\cong\exp\left\{\begin{pmatrix} -\frac{i\Delta}{2}(\lambda-\mu) & 0 \\ c\Delta & i\frac{\Delta}{2}(\lambda-\mu)\end{pmatrix}\right\}$$

由此可以计算出

$$W_1(\lambda,\mu)^N=\text{Block diag}\left(e^{-i(\lambda+\mu)L/2},\ [W_1(\lambda,\mu)^N]_{\text{mid}},\ e^{i(\lambda+\mu)L/2}\right)$$

$$[W_1(\lambda,\mu)^N]_{\text{mid}}=\begin{pmatrix} e^{-i(\lambda-\mu)L/2} & 0 \\ \frac{2c}{\lambda-\mu}\sin\frac{\lambda-\mu}{2}L & e^{i(\lambda-\mu)L/2}\end{pmatrix} \tag{2.1.98a}$$

类似地，有

$$W_2(\mu,\lambda)^N=\text{Block diag}\left(e^{-i(\lambda+\mu)L/2},\ [W_2(\mu,\lambda)^N]_{\text{mid}},\ e^{i(\lambda+\mu)L/2}\right)$$

$$[W_2(\mu,\lambda)^N]_{\text{mid}} = \begin{pmatrix} e^{-i(\lambda-\mu)L/2} & \frac{2e}{\lambda-\mu}\sin\frac{\lambda-\mu}{2}L \\ 0 & e^{i(\lambda-\mu)L/2} \end{pmatrix} \tag{2.1.98b}$$

利用(2.1.98a)式和(2.1.98b)式及

$$\lim_{L\to\infty}\frac{1}{\lambda-\mu}e^{\pm i(\lambda-\mu)L} = \pm i\pi\delta(\lambda-\mu)$$

$$P\frac{1}{\lambda-\mu} \pm i\pi\delta(\lambda-\mu) = \frac{1}{\lambda-\mu\mp i\varepsilon},\ \varepsilon\to 0$$

可以计算出

$$U_i^{\pm}(\lambda,\mu) = \text{Block diag}(1,[U_i^{\pm}(\lambda,\mu)]_{\text{mid}},1),\ i=1,2$$

$$[U_1^{\pm}(\lambda,\mu)]_{\text{mid}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{ic}{\lambda-\mu\mp i\varepsilon} & 1 \end{pmatrix}$$

$$[U_2^{\pm}(\lambda,\mu)]_{\text{mid}} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{ic}{\lambda-\mu\mp i\varepsilon} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.1.99}$$

再将(2.1.99)式和(2.1.74)式(乘 λ^{-1})代入(2.1.96b)式，经过简单的运算，得到

$$R_{\pm}(\lambda-\mu) = \text{Block diag}\left(P\frac{1}{\lambda-\mu},[R_{\pm}(\lambda-\mu)]_{\text{mid}},P\frac{1}{\lambda-\mu}\right)$$

$$[R_{\pm}(\lambda-\mu)]_{\text{mid}} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda+ic}{(\lambda-\mu+i\varepsilon)(\lambda-\mu-i\varepsilon)} & \pm i\pi\delta(\lambda-\mu) \\ \mp i\pi\delta(\lambda-\mu) & \frac{1}{\lambda-\mu-i\varepsilon} \end{pmatrix} \tag{2.1.100}$$

这样，(2.1.96)式和(2.1.100)式决定了 NSE 的 $T(\lambda)$矩阵元满足

的交换关系。将 $T(\lambda)$ 写成

$$T(\lambda)=\begin{pmatrix} A(\lambda) & \sqrt{c}\,B^{+}(\lambda) \\ \sqrt{c}\,B(\lambda) & A^{+}(\lambda) \end{pmatrix} \tag{2.1.101}$$

(2.1.96)式和(2.1.100)式给出：

$$\begin{cases} [A(\lambda),\ A(\mu)]=[A(\lambda),\ A^{+}(\mu)] \\ \qquad\qquad =[B(\lambda),\ B(\mu)]=0 \\ A(\lambda)B^{+}(\mu)=\left(1+\dfrac{\mathrm{i}c}{\lambda-\mu+\mathrm{i}\varepsilon}\right)B^{-}(\mu)A(\lambda) \\ B(\mu)A(\lambda)=\left(1+\dfrac{\mathrm{i}c}{\lambda-\mu+\mathrm{i}\varepsilon}\right)A(\lambda)B(\mu) \\ B(\lambda)B^{+}(\mu)=\left(1+\dfrac{\mathrm{i}c}{\lambda-\mu+\mathrm{i}\varepsilon}\right)\left(1-\dfrac{\mathrm{i}c}{\lambda-\mu-\mathrm{i}\varepsilon}\right)B^{+}(\mu)B(\lambda) \\ \qquad\qquad +2\pi A^{+}(\lambda)A(\lambda)\delta(\lambda-\mu) \end{cases} \tag{2.1.102}$$

显然交换关系(2.1.102)式在 $\lambda=\mu$ 时存在奇异性，但是在实际使用时，仅考虑 $\lambda\neq\mu$ 的情况。

NSE 的哈密顿量可以由 $A(\lambda)$ 确定。将 $\ln A(\lambda)$ 无穷级数展开：

$$\ln A(\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\lambda^{-n} \tag{2.1.103}$$

由(2.1.102)式给出 $A(\lambda)$ 和 $A(\mu)$ 对易，从而 $[c_n,\ c_m]=0$。类似经典情况，$A(\lambda)$ 可以由 $\psi^{+}(x)$、$\psi(x)$（略去 t）表示为

$$A(\lambda)=1-c\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\theta(y_2<y_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(y_1-y_2)}\psi^{+}(y_1)\psi(y_2)$$

$$+(-c)^2\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_4\theta(y_4<\cdots<y_1)$$

$$\cdot\, e^{i\lambda(y_1-y_2+y_3-y_4)}\psi^+(y_1)\psi^+(y_3)\psi(y_2)\psi(y_4)$$
$$+\cdots \tag{2.1.104}$$

再利用(2.1.104)式对 $\ln A(\lambda)$ 展开，然后和(2.1.103)式相比较，得到

$$N=\frac{1}{\mathrm{i}c}c_1,\ P=\frac{1}{\mathrm{i}c}c_2-\frac{1}{2}c_1,\ H=\frac{1}{\mathrm{i}c}c_3+c_2+\frac{\mathrm{i}c}{6}c_1$$

$$\begin{cases}N=\int_{-\infty}^{\infty}\psi^+(x,t)\psi(x,t)\mathrm{d}x\\ P=\frac{\mathrm{i}}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(\psi_x^+(x,t)\psi(x,t)-\psi^+(x,t)\psi_x(x,t))\mathrm{d}x\\ H=\int_{-\infty}^{\infty}(\psi_x^+(x,t)\psi_x(x,t)\\ \qquad +c\psi^+(x,t)\psi^+(x,t)\psi(x,t)\psi(x,t))\mathrm{d}x\end{cases} \tag{2.1.105}$$

上面以NSE为例介绍了由RTT关系决定的量子整体转移矩阵的交换关系和由此而得到的守恒量集合。而且尤为重要的是，通过RTT关系可解决守恒量集合同时对角化问题。这就是下面所要介绍的内容。

(4) 守恒量集合的本征态

还是以NSE为例，介绍构造守恒量集合的本征态的主要两个步骤：寻找真空态和构造本征态。对NSE，由(2.1.102)式的最后关系式可以看出，B^+和B的交换关系类似于产生算符和湮没算符的对易关系。实际上，可以通过引入

$$\begin{aligned}\phi(\lambda)&=(2\pi A^+(\lambda)A(\lambda))^{-1/2}B(\lambda)\\ \phi^+(\lambda)&=B^+(\lambda)(2\pi A^+(\lambda)A(\lambda))^{-1/2}\end{aligned} \tag{2.1.106}$$

再利用(2.1.102)式，不难推导出 ϕ 和 ϕ^+ 满足正则对易关系：

$$[\phi(\lambda), \phi(\mu)] = [\phi^+(\lambda), \phi^+(\mu)] = 0$$
$$[\phi(\lambda), \phi^+(\mu)] = \delta(\lambda - \mu) \tag{2.1.107}$$

所以可以将 B^+ 和 B 分别看成某种粒子的产生算符和湮没算符，并且用 B 定义真空态。

先考虑坐标 $x \in [-L, L]$，$L < \infty$ 的情况。将转移矩阵写成

$$T_L(\lambda) = \lim_{\Delta \to 0} T_N(\lambda) = \begin{pmatrix} A_L(\lambda) & \sqrt{c}\, B_L^+(\lambda) \\ \sqrt{c}\, B_L(\lambda) & A_L^+(\lambda) \end{pmatrix} \tag{2.1.108}$$

由 NSE 的 $R(\lambda)$ 矩阵(2.1.47)式和 RTT 关系(2.1.88)式给出所需要的代数关系：

$$[A_L(\lambda), A_L(\mu)] = [B_L^+(\lambda), B_L^+(\mu)] = 0$$
$$A_L(\lambda)B_L^+(\mu) = \sigma(\lambda - \mu)B_L^+(\mu)A_L(\lambda) + \gamma(\lambda - \mu)B_L^+(\lambda)A_L(\mu)$$
$$A_L^+(\lambda)B_L^+(\mu) = \sigma(\mu - \lambda)B_L^+(\mu)A_L(\lambda) + \gamma(\mu - \lambda)B_L^+(\lambda)A_L^+(\mu) \tag{2.1.109}$$

其中

$$\gamma(\lambda - \mu) = -\frac{\mathrm{i}c}{\lambda - \mu};\ \sigma(\lambda - \mu) = \frac{\lambda - \mu + \mathrm{i}c}{\lambda - \mu} \tag{2.1.110}$$

定义真空态 $|0\rangle$：

$$B_L(\lambda)|0\rangle = 0 \tag{2.1.111}$$

为了使(2.1.111)式成立，要求 $\psi(x, t)|0\rangle = 0$。在这种情况下，由(2.1.46)式有：

$$L_1(\lambda)|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 - \mathrm{i}\frac{\lambda\Delta}{2} & \mathrm{i}\sqrt{c\Delta}\psi_1^+ \\ 0 & 1 + \mathrm{i}\frac{\lambda\Delta}{2} \end{pmatrix}|0\rangle$$

$$L_2(\lambda)L_1(\lambda)|0\rangle = \begin{bmatrix} \left(1 - \mathrm{i}\,\frac{\lambda\Delta}{2}\right)^2 & (L_2(\lambda)L_1(\lambda))^{1/2}_{-1/2} \\ 0 & \left(1 + \mathrm{i}\,\frac{\lambda\Delta}{2}\right)^2 \end{bmatrix}|0\rangle$$

以此类推，$2N$ 个 $L(\lambda)$乘积作用到$|0\rangle$上，仍为上三角矩阵，从而保证了 $B_L(\lambda)|0\rangle = 0$。并且有

$$\begin{aligned} A_L(\lambda)|0\rangle &= \left(1 - \mathrm{i}\,\frac{\lambda\Delta}{2}\right)^{2N}|0\rangle \simeq \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda L}|0\rangle \\ A_L^+(\lambda)|0\rangle &= \left(1 + \mathrm{i}\,\frac{\lambda\Delta}{2}\right)^{2N}|0\rangle \simeq \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda L}|0\rangle \end{aligned} \tag{2.1.112}$$

假设 $\mathrm{tr}T_L(\lambda)$的本征态是

$$|\lambda_1, \cdots, \lambda_n\rangle_L = B_L^+(\lambda_1)\cdots B_L^+(\lambda_n)|0\rangle \tag{2.1.113}$$

其中，当 $i \neq j$ 时，$\lambda_i \neq \lambda_j$。将 $A_L(\lambda)$作用到(2.1.113)式上，有

$$\begin{aligned} &A_L(\lambda)|\lambda_1, \cdots, \lambda_n\rangle_L \\ &= (\sigma(\lambda - \lambda_1)B_L^+(\lambda_1)A_L(\lambda) + \gamma(\lambda - \lambda_1)B_L^+(\lambda)A_L(\lambda_1)) \\ &\quad \cdot B_L^+(\lambda_2)\cdots B_L^+(\lambda_n)|0\rangle \\ &= \sigma(\lambda - \lambda_1)\sigma(\lambda - \lambda_2)B_L^+(\lambda_1)B_L^+(\lambda_2)A_L(\lambda)B_L^+(\lambda_3)\cdots B_L^+(\lambda_n)|0\rangle \\ &\quad + \gamma(\lambda - \lambda_1)\sigma(\lambda_1 - \lambda_2)B_L^+(\lambda_2)B_L^+(\lambda)A_L(\lambda_1)B_L^+(\lambda_3)\cdots B_L^-(\lambda_n)|0\rangle \\ &\quad + (\sigma(\lambda - \lambda_1)\gamma(\lambda - \lambda_2) + \gamma(\lambda - \lambda_1)\gamma(\lambda_1 - \lambda_2))B_L^+(\lambda_1)B_L^+(\lambda) \\ &\quad \cdot A_L(\lambda_2)B_L^+(\lambda_3)\cdots B_L^+(\lambda_n)|0\rangle \end{aligned}$$

由(2.1.110)式容易计算出

$$\sigma(\lambda-\lambda_1)\gamma(\lambda-\lambda_2)+\gamma(\lambda-\lambda_1)\gamma(\lambda_1-\lambda_2)=\gamma(\lambda-\lambda_2)\sigma(\lambda_2-\lambda_1)$$

所以

$$A_L(\lambda)|\lambda_1, \cdots, \lambda_n\rangle_L$$

$$= \sigma(\lambda - \lambda_1)\sigma(\lambda - \lambda_2)B_L^+(\lambda_1)B_L^+(\lambda_2)A_L(\lambda)B_L^+(\lambda_3)\cdots B_L^+(\lambda_n)|0\rangle$$

$$+ \sum_{j=1}^{2}\gamma(\lambda - \lambda_j)\Big(\prod_{i\neq j}^{2}\sigma(\lambda_j - \lambda_i)B_L^+(\lambda_i)\Big)B_L^+(\lambda)A_L(\lambda_j)B_L^+(\lambda_3)\cdots$$

$$\cdot B_L^+(\lambda_n)|0\rangle$$

按此做法，继续交换 A_L 和 B_L^+，直到 A_L 作用到真空态上，最后得到

$$A_L(\lambda)|\lambda_1, \cdots, \lambda_n\rangle_L$$

$$= \Lambda(\lambda;\ \lambda_1, \cdots, \lambda_n)|\lambda_1, \cdots, \lambda_n\rangle_L$$

$$+ \sum_{j=1}^{n}\Lambda_j(\lambda;\ \lambda_1, \cdots, \lambda_n)\prod_{i\neq j}^{n}B_L^+(\lambda_i)B_L^+(\lambda)|0\rangle \tag{2.1.114}$$

其中

$$\Lambda(\lambda;\ \lambda_1, \cdots, \lambda_n) = e^{-i\lambda L}\prod_{i=1}^{n}\sigma(\lambda - \lambda_i)$$

$$\Lambda_j(\lambda;\ \lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \gamma(\lambda - \lambda_j)\prod_{i\neq j}^{n}\sigma(\lambda_j - \lambda_i)e^{-i\lambda_j L} \tag{2.1.115}$$

类似的计算可以给出

$$A_L^+(\lambda)|\lambda_1, \cdots, \lambda_n\rangle_L = \Lambda'(\lambda;\ \lambda_1, \cdots, \lambda_n)|\lambda_1, \cdots, \lambda_n\rangle_L$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\Lambda_j'(\lambda;\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\prod_{i\neq j}^{n}B_L^+(\lambda_i)B_L^+(\lambda)|0\rangle \tag{2.1.116}$$

其中

$$\Lambda'(\lambda;\ \lambda_1, \cdots, \lambda_n) = e^{i\lambda L}\prod_{i=1}^{n}\sigma(\lambda_i - \lambda)$$

$$\Lambda_j'(\lambda;\ \lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \gamma(\lambda_j - \lambda)\prod_{i\neq j}^{n}\sigma(\lambda_i - \lambda_j)e^{i\lambda_j L} \tag{2.1.117}$$

由(2.1.114)式和(2.1.116)式立刻得到

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{tr} T_{\mathrm{L}}(\lambda) |\lambda_1, \cdots, \lambda_n\rangle_{\mathrm{L}} \\
= & (A_{\mathrm{L}}(\lambda) + A_{\mathrm{L}}^{+}(\lambda)) |\lambda_1, \cdots, \lambda_n\rangle_{\mathrm{L}} \\
= & (\Lambda(\lambda; \lambda_1, \cdots, \lambda_n) + \Lambda'(\lambda; \lambda_1, \cdots, \lambda_n)) |\lambda_1, \cdots, \lambda_n\rangle_{\mathrm{L}} \\
& + \sum_{j=1}^{n} (\Lambda_j(\lambda; \lambda_1, \cdots, \lambda_n) \\
& + \Lambda_j'(\lambda; \lambda_1, \cdots, \lambda_n)) \prod_{i \neq j}^{n} B_{\mathrm{L}}^{+}(\lambda_i) B_{\mathrm{L}}^{+}(\lambda) |0\rangle
\end{aligned}
\tag{2.1.118}
$$

显然，只有在

$$
\Lambda_j(\lambda; \lambda_1, \cdots, \lambda_n) = -\Lambda_j'(\lambda; \lambda_1, \cdots, \lambda_n) \tag{2.1.119a}
$$

的条件下，$|\lambda_1, \cdots, \lambda_n\rangle_{\mathrm{L}}$ 是 $\mathrm{tr}T_{\mathrm{L}}(\lambda)$的本征态。将(2.1.115)式和(2.1.117)式代入(2.1.119a)式，有

$$
\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\lambda_j L} = \prod_{i \neq j}^{n} \frac{\sigma(\lambda_j - \lambda_i)}{\sigma(\lambda_i - \lambda_j)} = \prod_{i \neq j}^{n} \frac{\lambda_j - \lambda_i + \mathrm{i}c}{\lambda_j - \lambda_i - \mathrm{i}c} \tag{2.1.119b}
$$

(2.1.119b)式是 λ_j, $j = 1, \cdots, n$ 的限制方程。它和用 Bethe-Ansatz 方法研究周期性边界条件下玻色气体所得到的约束方程是一致的。有关这方面内容，将在下一节介绍。

通过上面的讨论，可以看出：由(2.1.119b)式确定了 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$，也就确定了 $T_{\mathrm{L}}(\lambda)$的本征态 $|\lambda_1, \cdots, \lambda_n\rangle_{\mathrm{L}}$，相应的本征值是 $\Lambda(\lambda; \lambda_1, \cdots, \lambda_n) + \Lambda'(\lambda; \lambda_1, \cdots, \lambda_n)$。由此，$|\lambda_1, \cdots, \lambda_n\rangle_{\mathrm{L}}$ 也是由 $T_{\mathrm{L}}(\lambda)$生成出的守恒量集合的共同本征态。

完成对 $L < \infty$ 的情况的讨论之后，转向 $L \to \infty$ 时守恒量集合的本征态问题。由(2.1.95)式和(2.1.108)式给出

$$
T(\lambda) = \lim_{L \to \infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\lambda L}{2}\sigma_3} T_{\mathrm{L}}(\lambda) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\lambda L}{2}\sigma_3} \tag{2.1.120a}
$$

写成矩阵元形式有

$$\begin{cases} A(\lambda) = \lim\limits_{L\to\infty} e^{i\lambda L} A_L(\lambda), \; B^+(\lambda) = \lim\limits_{L\to\infty} B_L^+(\lambda) \\ A^+(\lambda) = \lim\limits_{L\to\infty} e^{-i\lambda L} A_L^+(\lambda), \; B(\lambda) = \lim\limits_{L\to\infty} B_L(\lambda) \end{cases} \tag{2.1.120b}$$

真空态仍选取为 $B(\lambda)|0\rangle = 0$，则由(2.1.112)式和(2.1.120b)式，我们知道 $A(\lambda)|0\rangle = |0\rangle$。由于 NSE 的粒子数、动量、能量是由 $A(\lambda)$生成的，所以要构造 $A(\lambda)$的本征态。类似于 $L < \infty$ 的有限情况，假定本征态为

$$|\lambda_1, \cdots, \lambda_n\rangle = B^+(\lambda_1)\cdots B^+(\lambda_n)|0\rangle \tag{2.1.121}$$

将 $A(\lambda)$作用到(2.1.121)式，然后利用(2.1.102)式 $(\lambda \neq \mu)$，交换 A 和 B^+，则得到

$$A(\lambda)|\lambda_1, \cdots, \lambda_n\rangle = \left(\prod_{j=1}^{n} \frac{\lambda - \lambda_j + ic}{\lambda - \lambda_j}\right)|\lambda_1, \cdots, \lambda_n\rangle \tag{2.1.122}$$

为了写出物理量的本征值，需要计算 $\ln A(\lambda)$作用在$|\lambda_1, \cdots, \lambda_n\rangle$上的本征值。利用(2.1.102)式给出的

$$A(\lambda)B^+(\mu)A(\lambda)^{-1} = \frac{\lambda - \mu + ic}{\lambda - \mu}B^+(\mu) \quad (\lambda \neq \mu)$$

有

$$\frac{\partial A(\lambda)}{\partial \lambda}B^+(\mu)A(\lambda) - A(\lambda)B^+(\mu)A(\lambda)^{-1}\frac{\partial A(\lambda)}{\partial \lambda}A(\lambda)^{-1}$$

$$= \frac{\lambda - \mu + ic}{\lambda - \mu}\left(\frac{\partial \ln A(\lambda)}{\partial \lambda}B^+(\mu) - B^+(\mu)\frac{\partial \ln A(\lambda)}{\partial \lambda}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{\lambda - \mu + ic}{\lambda - \mu}\right)B^+(\mu)$$

将上式整理后，得到

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}[\ln A(\lambda),\ B^+(\mu)] = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\ln\frac{\lambda-\mu+\mathrm{i}c}{\lambda-\mu}\right)B^+(\mu)$$

注意到 $c=0$ 时，$[A(\lambda),\ B^+(\mu)]=0$，从而推出

$$[\ln A(\lambda),\ B^+(\mu)] = \ln\frac{\lambda-\mu+\mathrm{i}c}{\lambda-\mu}B^+(\mu) \qquad (2.1.123)$$

这样，可将 $\ln A(\lambda)$ 作用到 $|\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_n\rangle$，利用(2. 1. 123)式逐次交换 $\ln A(\lambda)$ 和 $B^+(\lambda_j)$，$j=1,\ \cdots,\ n$，最后得到

$$\ln A(\lambda)|\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_n\rangle = \ln\left(\prod_{j=1}^{n}\frac{\lambda-\lambda_j+\mathrm{i}c}{\lambda-\lambda_j}\right)|\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_n\rangle \qquad (2.1.124)$$

将(2. 1. 124)式两边同时对 λ^{-1} 的无穷级数展开，不难得到

$$c_m|\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_n\rangle = (-1)^m\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{(\lambda_j-\mathrm{i}c)^m-\lambda_j^m}{m}\right)|\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_n\rangle \qquad (2.1.125)$$

从而可由(2. 1. 105)式和(2. 1. 125)式给出

$$\begin{cases} N|\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_n\rangle = n|\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_n\rangle \\ P|\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_n\rangle = \left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\right)|\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_n\rangle \\ H|\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_n\rangle = \left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^2\right)|\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_n\rangle \end{cases} \qquad (2.1.126)$$

由(2. 1. 126)式看出，$|\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_n\rangle$ 描述的是具有动量 $\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_n$ 的“自由”玻色子，其中 $\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_n$ 由 Bethe-Ansatz 关系决定，这里谱参数 λ 具有粒子动量的意义。有关它的束缚态能谱和散射等问题，将在下一节里作介绍。

本节将围绕着 QYBE 的解，主要描述量子局域转移矩阵和整体转移矩阵的基本理论。在这一部分内容中，初步展示了 RTT 关

系的重要作用:它决定了量子可对易算符集合,并且解决了它们同时对角化问题。当然 RTT 关系的重要作用不仅仅限于处理上述问题,它还有其他方面的重要应用,这将在以后有关章节中讨论。此外,用量子逆散射方法可研究许多其他物理问题,如物理真空态和激发态,S 矩阵及关联函数的计算等,有兴趣的读者可阅读文献[1～5, 15]。

§2.2 QYBE 的起源(Ⅰ)——量子多体问题

为使读者对 QYBE 的物理来源有所了解,简要地介绍杨振宁教授早期的研究成果。

QYBE 的来源之一是一维量子多体问题。具体物理模型是具有 δ 函数势相互作用的定态薛定谔方程:

$$\left[-\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+2c\sum_{i<j}\delta(x_i-x_j)\right]\psi(x_1, \cdots, x_N)=E\psi(x_1, \cdots, x_N) \tag{2.2.1}$$

其中 c 是耦合常数。下面分别介绍玻色子与费米子两种情形。

(1) 玻色子情况

系统的 N 个粒子是玻色子(玻色气体)。首先考虑 $N=2$ 的情况,然后推广到任意 N 的情况。对两个粒子体系,方程(2.2.1)的波函数可写成

$$\psi(x_1, x_2)=\psi_{12}(x_1, x_2)\theta(x_2-x_1)+\psi_{21}(x_1, x_2)\theta(x_1-x_2) \tag{2.2.2}$$

其中 $\theta(x)$ 是阶跃函数。对玻色子,要求波函数满足交换对称性,即

$$\psi(x_1, x_2)=\psi(x_2, x_1) \tag{2.2.3}$$

将(2.2.3)式代入(2.2.2)式,得到

$$\psi_{12}(x_1,\ x_2) = \psi_{21}(x_2,\ x_1) \tag{2.2.4}$$

由 $x_1 \neq x_2$ 时，$\psi(x_1,\ x_2)$是平面波解。注意到 $x_1 = x_2$ 时 $\psi(x_1,\ x_2)$的连续性和(2.2.4)式，有

$$\begin{cases}\psi_{12}(x_1,\ x_2) = A_{12}e^{ik_1x_1+ik_2x_2} + A_{21}e^{ik_1x_2+ik_2x_1} \\ \psi_{21}(x_1,\ x_2) = A_{12}e^{ik_2x_1+ik_1x_2} + A_{21}e^{ik_1x_1+ik_2x_2}\end{cases} \tag{2.2.5}$$

将(2.2.5)式代入定态薛定谔方程(2.2.1)，得到能量 E 和 k_i，$i = 1,\ 2$ 的关系：

$$E = k_1^2 + k_2^2 \tag{2.2.6}$$

当 $c > 0$ 时，$\psi(x_1,\ x_2)$是散射态，k_i 是实数；当 $c < 0$ 时，$\psi(x_1,\ x_2)$是束缚态，k_i 是复数。

下面考虑 $x_1 = x_2$ 时由 δ 函数引起的波函数跃变。为此引入质心坐标 x 和相对坐标 y

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2),\ y = x_2 - x_1$$

则(2.2.2)式变为

$$\psi(x,\ y) = e^{ikx}\phi(y) \tag{2.2.7}$$

其中 $k = k_1 + k_2$，$\phi(y)$为

$$\begin{aligned}\phi(y) = {} & \theta(y)(A_{12}e^{i(k_2-k_1)y/2} + A_{21}e^{-i(k_2-k_1)y/2}) \\ & + \theta(-y)(A_{12}e^{-i(k_2-k_1)y/2} + A_{21}e^{i(k_2-k_1)y/2})\end{aligned} \tag{2.2.8}$$

并且，由(2.2.1)式要求 $\phi(y)$满足定态方程

$$2\left[-\frac{\partial^2}{\partial y^2} + c\delta(y)\right]\phi(y) = E\phi(y) \tag{2.2.9}$$

在 $y = 0$ 点，$\phi(y)$的一阶微商必须满足跃变条件：

$$\left.\frac{\partial \phi(y)}{\partial y}\right|_{0^+} - \left.\frac{\partial \phi(y)}{\partial y}\right|_{0^-} = c\phi(\theta) \tag{2.2.10}$$

从而有

$$\frac{A_{21}}{A_{12}} = -\frac{c - \mathrm{i}(k_2 - k_1)}{c + \mathrm{i}(k_2 - k_1)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta(k_2 - k_1)} \tag{2.2.11}$$

其中

$$\Delta(k_2 - k_1) = +\mathrm{i}\ln\frac{\mathrm{i}(k_2 - k_1) + c}{\mathrm{i}(k_2 - k_1) - c} \tag{2.2.12}$$

假定粒子在(0, L)内运动,波函数具有周期性边界条件:

$$\psi(0, x_2) = \psi(L, x_2) \tag{2.2.13}$$

将(2.2.2)式和(2.2.5)式代入(2.2.13)式,得到

$$A_{12} = A_{21}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1 L},\ A_{21} = A_{12}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_2 L} \tag{2.2.14}$$

从而由(2.2.11)式和(2.2.14)式给出

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_i L} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta(k_j - k_i)},\ i \neq j = 1, 2$$

对上式取对数,得到 k_i 满足的约束方程:

$$k_i L = 2\pi n_i + \sum_{i \neq j}\Delta(k_j - k_i),\ n_i = \text{整数} \tag{2.2.15}$$

上面得到的两个粒子的结果可以推广到 N 个粒子。对任意 N 个粒子,波函数的形式是两个粒子情况的推广

$$\psi(x_1, \cdots, x_N) = \sum_p \psi_{p_1\cdots p_N}(x_1, \cdots, x_N)\theta(x_{p_1} < \cdots < x_{p_N}) \tag{2.2.16}$$

其中 $\theta(x_{p_1} < \cdots < x_{p_N}) = \theta(x_{p_N} - x_{p_{(N-1)}})\cdots\theta(x_{p_2} - x_{p_1})$, $p_1\cdots p_N$ 是 1, …, N 的某种排列, $\sum_p$ 是对所有排列取和。显然(2.2.16)式的右边一共有 $N!$ 项。由玻色子的全同性,要求

$$\psi(x_1, \cdots, x_N) = \psi(x_2, \cdots, x_N, x_1) \tag{2.2.17}$$

将(2.2.16)式代入(2.2.17)式，有

$$\psi_{1\cdots N}(x_2, \cdots, x_N, x_1) = \psi_{2\cdots N1}(x_1, \cdots, x_N)$$

$$\psi_{2\cdots N1}(x_2, \cdots, x_N, x_1) = \psi_{3\cdots N12}(x_1, \cdots, x_N)$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

$$\psi_{(N-1)N1\cdots(N-2)}(x_2, \cdots, x_N, x_1) = \psi_{N1\cdots N-1}(x_1, \cdots, x_N)$$

考虑到这一结果，波函数 $\psi_{p_1\cdots p_N}$的 Bethe-Ansatz 是

$$\psi_{p1\cdots pN}(x_1, \cdots, x_N) = \sum_{p'} A_{p'1\cdots p'N}\exp\left\{\mathrm{i}\sum_{j=1}^{N} k_{p'j}x_{pj}\right\} \tag{2.2.18}$$

在区域 $x_{p1} < \cdots < x_{pj} < x_{p(j+1)} < \cdots < x_{pN}$ 和 $x_{p1} < \cdots < x_{p(j+1)} < x_{pj} < \cdots < x_{pN}$，考虑由 δ 函数引起的跃变。由(2.2.18)式给出

$$\begin{aligned}&\psi_{p1\cdots pjp(j+1)\cdots pN}(x_1, \cdots, x_N)\\ &= \sum_{p'} A_{p'1\cdots p'jp'(j+1)\cdots p'N}\exp\{\mathrm{i}(k_{p'1}x_{p1} + \cdots\\ &\quad + k_{p'j}x_{pj} + k_{p'(j+1)}x_{p(j+1)} + \cdots + x_{p'N}x_{pN})\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\psi_{p1\cdots p(j+1)pj\cdots pN}(x_1, \cdots, x_N)\\ &= \sum_{p'} A_{p'1\cdots p'jp'(j+1)\cdots p'N}\exp\{\mathrm{i}(k_{p'1}x_{p1} + \cdots\\ &\quad + k_{p'j}x_{p(j+1)} + k_{p'(j+1)}x_{p'j} + \cdots + x_{p'N}x_{pN}\}\end{aligned}$$

类似于两个粒子情况，对 x_{pj}和 $x_{p(j+1)}$ 取质心坐标系，然后计算波函数的导数在 $x_{pj} = x_{p(j+1)}$ 点的跃变，得到系数 A 的关系式：

$$\frac{A_{p1\cdots pjp(j+1)\cdots pN}}{A_{p1\cdots p(j+1)pj\cdots pN}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta(k_{p(j+1)} - k_{pj})} \tag{2.2.19}$$

在(0, L)区域内附加上周期性边界条件：

$$\psi(0, x_2, \cdots, x_N) = \psi(L, x_2, \cdots, x_N) \quad (2.2.20)$$

则由(2.2.16)式和(2.2.20)式给出：

$$\psi_{12\cdots N}(0, x_2, \cdots, x_N) = \psi_{2\cdots N1}(L, x_2, \cdots, x_N) \quad (2.2.21)$$

再将(2.2.18)式代入上式，有

$$A_{p_1\cdots p_N} = A_{p_2\cdots p_N p_1} e^{ik_{p_1}L} \quad (2.2.22)$$

另一方面，(2.2.17)式给出

$$\begin{aligned} A_{p_1\cdots p_N} &= A_{p_2 p_1 p_3\cdots p_N} \exp\{i\Delta(k_{p_2} - k_{p_1})\} \\ &= A_{p_2 p_3 p_1 p_4\cdots p_N} \exp\{i(\Delta(k_{p_2} - k_{p_1}) + \Delta(k_{p_3} - k_{p_1}))\} \\ &= \cdots = A_{p_2\cdots p_N p_1} \exp\left\{i \sum_{l\neq 1}^{N} \Delta(k_{p_l} - k_{p_1})\right\} \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

比较(2.2.22)式和(2.2.23)式，并且令 $p_1 = i$，$p_l = j$，得到

$$e^{ik_i L} = \exp\left\{i \sum_{j\neq i}^{N} \Delta(k_j - k_i)\right\} \quad (2.2.24)$$

对上式取对数，得到 k_i，$i = 1, \cdots, N$，满足的约束方程

$$k_i L = 2\pi n_i + \sum_{j\neq i}^{N} \Delta(k_j - k_i),\ n_i = \text{整数} \quad (2.2.25)$$

这里需要指出的是，由定义式(2.2.12)，可以将(2.2.24)式写成

$$e^{ik_j L} = \prod_{i\neq j}^{N} \frac{k_j - k_i + ic}{k_j - k_i - ic}$$

将 $L \to 2L$（也就是粒子运动空间 $[0, L] \to [-L, L]$），$k_j \to \lambda_j$，$N \to n$，则上式就是§2.1中NSE的限制方程(2.1.119b)。事实上，定态薛定谔方程(2.2.1)的二次量子化就是量子NSE，所以物理结果应该是一致的。从而也可以看出，这里所使用的Bethe-Ansatz方法和

前面所使用的量子逆散射方法所得的物理结论是一致的。

类似于两粒子情况，系统的动量和能量由下式给出：

$$P = \sum_{j=1}^{N} k_j,\ E = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} k_j^2 \tag{2.2.26}$$

其中 k_i 由(2.2.15)式决定。

下面对束缚态能谱、散射振幅和物理真空的激发态作简单的描述。

1) 束缚态能谱。当耦合常数 $c < 0$ 时，体系处于束缚态，k_i 是复数，并且 $i \neq j$ 时，$k_i \neq k_j$，否则 $\psi(\lambda_1, \cdots, \lambda_N) = 0$。由 $\Delta(k_j - k_i)$ 的定义(2.2.12)式可以看出，如果 $\{k_i\}_{i=1}^N$ 是方程(2.2.15)的解，那么 $\{k_i^*\}_{i=1}^N$ 也是方程的解。同时还要求总动量 $P = \sum\limits_{i=1}^{N} k_i$ 是实数。例如，$N = 2$ 时，设 $k_1 = a + \mathrm{i}b$，$b > 0$，必有 $k_2 = a - \mathrm{i}b$。由约束方程

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1 L} = \frac{2b + c}{2b - c}$$

容易看出，当 $x \to \infty$ 时，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1 L} \to 0$，从而有 $b = -\dfrac{c}{2}$。相应地有

$$E = \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}c^2$$

其中 $-c^2/4$ 是束缚态能量。对任意 N，$L \to \infty$ 时，有

$$k_j = \frac{P}{N} + \frac{\mathrm{i}}{2}(N - 2j + 1)c,\ j = 1, \cdots, N \tag{2.2.27}$$

其中 $k = \sum\limits_{i=1}^{N} k_i^2$ 是总动量。当 $c < 0$ 时为束缚态

$$\begin{aligned} E &= \sum_{j=1}^{N} k_j^2 = \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{k}{N} + \frac{1}{2}(N+1)(\mathrm{i}c) - j(\mathrm{i}c) \right]^2 \\ &= \frac{k^2}{N} - \frac{1}{12}N(N^2 - 1)c^2 \end{aligned} \tag{2.2.28}$$

这里要指出，(2.2.27)式所示的“弦假设”，只是一种可行的方案，并不一定有唯一性。(2.2.28)式右边第二项就是 N 个粒子的束缚态能量。

2) 散射振幅。当 $c>0$ 时，玻色子处于散射状态，称为玻色气体。系统的波函数是每个粒子的平面波叠加，要求 k_i，$i=1,\cdots,N$ 是实数。首先考察两个粒子情况。在 $x_1<x_2$ 区域，波函数由(2.2.2)式和(2.2.5)式给出，写成：

$$\psi(x_1,\ x_2)=A_{12}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1x_1+\mathrm{i}k_2x_2}+\frac{A_{21}}{A_{12}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1x_2+\mathrm{i}k_2x_1}\right)$$

假定 $k_1>k_2$，则在 $L\to\infty$ 时，$\exp\{\mathrm{i}(k_1x_1+k_2x_2)\}$ 和 $\exp\{\mathrm{i}(k_2x_1+k_1x_2)\}$ 分别是粒子的入射波和出射波(如图 2.1 所示)。

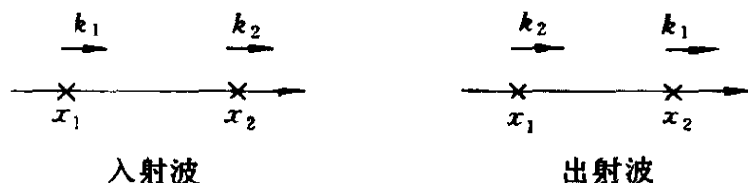


图 2.1

两个粒子的散射振幅为

$$S(k_2,\ k_1)=\frac{A_{21}}{A_{12}}=\frac{\mathrm{i}(k_2-k_1)-c}{\mathrm{i}(k_2-k_1)+c} \tag{2.2.29}$$

类似地，对 $N=3$ 时，入射波和出射波 ($x_1<x_2<x_3$ 区域) 分别由 $\exp\{\mathrm{i}(k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3)\}$ 和 $\exp\{\mathrm{i}(k_3x_1+k_2x_2+k_1x_1)\}$ 描述，见图 2.2。

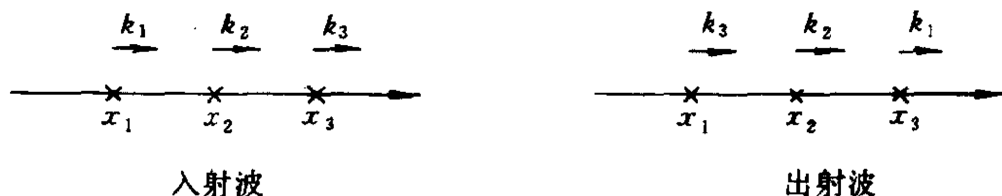


图 2.2

相应的散射振幅为

$$S(k_3, k_2, k_1) = \frac{A_{321}}{A_{123}}$$

从 A_{321}到 A_{123}有两条路径：一个是先交换 1 和 2，其次交换 1 和 3，最后交换 2 和 3，即

$$\begin{aligned} A_{321} &= S(k_2, k_1)A_{312} = S(k_2, k_1)S(k_3, k_1)A_{132} \\ &= S(k_2, k_1)S(k_3, k_1)S(k_3, k_2)A_{123} \end{aligned}$$

另一个是先交换 2 和 3，其次交换 1 和 3，最后交换 1 和 2，即

$$\begin{aligned} A_{321} &= S(k_3, k_2)A_{231} = S(k_3, k_2)S(k_3, k_1)A_{213} \\ &= S(k_3, k_2)S(k_3, k_1)S(k_2, k_1)A_{123} \end{aligned}$$

比较这两种交换方式，有

$$S(k_2, k_1)S(k_3, k_1)S(k_3, k_2) = S(k_3, k_2)S(k_3, k_1)S(k_2, k_1) \tag{2.2.30}$$

(2.2.30)式的正确性是显然的。(2.2.30)式虽然是恒等式，但它实际上是 QYBE，只不过 S 不是矩阵表示。在第二部分内容中，将 S 推广为矩阵形式(S 矩阵)，由这种交换方式不同而给出自洽条件就是 QYBE。由上面的讨论，得到三体散射振幅

$$S(k_3, k_2, k_1) = S(k_3, k_2)S(k_3, k_1)S(k_2, k_1) \tag{2.2.31}$$

它是因子化的，即是两体散射振幅的乘积形式。推广到 N 个粒子，有

$$S(k_N, \cdots, k_1) = \frac{A_{N\cdots 1}}{A_{1\cdots N}} = \prod_{i<j}^{N} S(k_j, k_i) \tag{2.2.32}$$

3）物理基态和低激发态。首先考虑约束方程(2.2.25)。当 $k \to 0$ 时，相因子 $\Delta(k)$在 $k = 0$ 的两边有 2π 的跃变。由此，将$\Delta(k)$重写为

$$\Delta(k)=\theta(k)+\begin{cases}\pi, & k<0\\ -\pi, & k>0\end{cases} \tag{2.2.33}$$

其中

$$\theta(k)=-2\mathrm{tg}^{-1}\frac{k}{c},\ |\theta|<\pi \tag{2.2.34}$$

将(2.2.33)式中的跃变部分吸收到 $2\pi n_i$ 中,则(2.2.33)式改写为

$$k_iL=2\pi I_i+\sum_{j\neq i}^{N}\theta(k_j-k_i),\ i=1,\cdots,N \tag{2.2.35}$$

其中

$$I_i=\begin{cases}\text{整数}, & N=\text{奇数}\\ \text{半整数}, & N=\text{偶数}\end{cases} \tag{2.2.36}$$

当 $c\to\infty$ 时,$\theta(k)\to 0$,从而有 $k_i\to\frac{2\pi}{L}I_i$。注意到 $i\neq j$ 时,$k_i\neq k_j$,否则 $\psi(x_1,\cdots,x_N)=0$,所以要求 $I_i\neq I_j\ (i\neq j)$。一般可选择 $I=\{I_i\}_{i=1}^N=-\frac{N-1}{2},-\frac{N-1}{2}+1,\cdots,\frac{N-1}{2}$。这时 N 个粒子占满量子数 I。

由(2.2.35)式给出

$$k_{i+1}-k_i=\frac{1}{L}\Big(\sum_{j\neq i+1}\theta(k_{j+1}-k_i)-\sum_{j\neq i}\theta(k_j-k_i)\Big)+\frac{2\pi}{L} \tag{2.2.37}$$

注意到 $k_{i+1}-k_i\propto L^{-1}$,则量

$$\rho(k_i)=1/L(k_{i+1}-k_i) \tag{2.2.38}$$

在 $L\to\infty$ 时是连续有界函数。在物理基态时,假定 k 的取值范围限制在"费米表面"$[-k_F,k_F]$中,在 dk 内的粒子数密度为 $L\rho(k)dk$,并且 $L\to\infty$, $N\to\infty$ 时,粒子数密度 $D=\frac{N}{L}$ 有限,有

$$D = \int_{-k_F}^{k_F} \rho(k)\mathrm{d}k \tag{2.2.39}$$

基态能量密度

$$\mathscr{E} = \frac{E}{L} = \int_{-k_F}^{k_F} \rho(k)k^2\mathrm{d}k \tag{2.2.40}$$

相应的方程(2.2.37)变为积分方程

$$2\pi\rho(k) = 1 + \int_{-k_F}^{k_F} K(k-k')\rho(k')\mathrm{d}k' \tag{2.2.41}$$

其中

$$K(k) = \frac{\mathrm{d}\theta(k)}{\mathrm{d}k} = \frac{2c}{k^2+c^2} \tag{2.2.42}$$

当 θ 给定后，原则上可由(2.2.40)式和(2.2.41)式确定 k_F 和 $\rho(k)$，从而确定基态能量密度 $\mathscr{E}$。

在上面讨论的基础上，考虑单粒子从基态“费米面”上的激发。当从基态激发出具有动量 k_p 的粒子，同时在基态量子数 I 中产生出一个空穴，假定相应空穴粒子的动量为 k_h。这时，“费米面”上粒子 q_i $(i=1,\cdots,N-1)$ 所满足的约束方程是

$$q_iL = 2\pi I_i + \sum_{j\neq i}\theta(q_j-q_i) + \theta(k_p-q_i) - \theta(k_h-q_i) \tag{2.2.43}$$

将(2.2.43)式和(2.2.35)式相减，得到

$$(q_i-k_i)L = \sum_j[\theta(q_j-q_i)-\theta(k_j-k_i)] + \theta(k_p-q_i) - \theta(k_h-q_i)$$

当$L\to\infty$，$(q_i-k_i)L\to w(k_i)$，则这个方程转化为积分方程

$$w(k)=\int_{-k_F}^{k_F}K(k-k')[w(k')-w(k)]\rho(k')\mathrm{d}k'$$

$$+\theta(k_p-k)-\theta(k_h-k)$$

再引入$F(k)\equiv w(k)\rho(k)$，用$w(k)$乘(2.2.43)式，得到$F(k)$满足的积分方程：

$$2\pi F(k)=w(k)+\int_{-k_F}^{k_F}K(k-k')w(k)\rho(k')\mathrm{d}k'$$

$$=\int_{-k_F}^{k_F}K(k-k')F(k')\mathrm{d}k'+\theta(k_p-k)-\theta(k_h-k)$$

$$(2.2.44)$$

定义K算符

$$K\cdot G(k)=\int_{-k_F}^{k_F}K(k-k')G(k')\frac{\mathrm{d}k'}{2\pi} \qquad (2.2.45)$$

其中$G(k)$是k的函数，并利用

$$\theta(k_p-k)-\theta(k_h-k)=\int_{k_h}^{k_p}\frac{\mathrm{d}\theta(k'-k)}{\mathrm{d}k'}\mathrm{d}k'$$

$$=\int_{k_h}^{k_p}K(k'-k)\mathrm{d}k'$$

$$=\int_{k_h}^{k_p}K(k-k')\mathrm{d}k'$$

可以将积分方程(2.2.44)改写为

$$(1-K)\cdot F(k)=\int_{k_{\mathrm{h}}}^{k_{\mathrm{p}}}K(k-k')\frac{\mathrm{d}k'}{2\pi} \tag{2.2.46}$$

上式的解为

$$F(k)=\int_{k_{\mathrm{F}}}^{k_{\mathrm{p}}}(1-K)^{-1}K(k-k')\frac{\mathrm{d}k'}{2\pi}$$

$$\equiv\int_{k_{\mathrm{F}}}^{k_{\mathrm{p}}}L(k,k')\frac{\mathrm{d}k'}{2\pi}$$

其中

$$L(k,k')=(1-K)^{-1}\cdot K(k-k')=\sum_{n=0}^{\infty}K^{n}\cdot K(k-k')$$

$$=K(k-k')+\int_{-k_{\mathrm{F}}}^{k_{\mathrm{F}}}\frac{\mathrm{d}k''}{2\pi}K(k-k'')K(k'-k'')+\cdots \tag{2.2.47}$$

上面所做的仅是准备工作，目的是确定激发能量。激发能量 E_{e} 为

$$E_{\mathrm{e}}=k_{\mathrm{p}}^{2}-k_{\mathrm{h}}^{2}+\lim_{L\to\infty}\sum_{i}(q_i^2-k_i^2)$$

利用

$$\lim_{L\to\infty}\sum_{i}(q_i^2-k_i^2)=\lim_{L\to\infty}\sum_{i}\frac{(q_i-k_i)(q_i+k_i)}{k_{i+1}-k_i}(k_{i+1}-k_i)$$

$$\approx\lim_{L\to\infty}\sum_{i}2k_i w(k_i)\rho(k_i)\Delta k_i$$

$$=\int_{-k_{\mathrm{F}}}^{k_{\mathrm{F}}}2kF(k)\mathrm{d}k$$

可以得到

$$E_e = k_p^2 - k_h^2 + \int_{-k_F}^{k_F} 2kF(k)\mathrm{d}k$$

$$= k_p^2 - k_h^2 + \int_{k_h}^{k_p} \frac{\mathrm{d}k'}{2\pi} \int_{-k_F}^{k_F} 2kL(k, k')\mathrm{d}k \qquad (2.2.48)$$

下面的问题是计算出上式右边的积分。为此，引入函数 $\varepsilon(k)$，它是积分方程

$$\varepsilon(k) = h^2 - \mu_0 + \int_{-k_F}^{k_F} \frac{\mathrm{d}k'}{2\pi} K(k - k')\varepsilon(k') \qquad (2.2.49)$$

的解。其中 μ_0 是化学势，由条件 $\varepsilon(\pm k_F) = 0$ 来确定。把(2.2.49)式对 k 微商，然后对积分项分步积分，容易导出

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon(k)}{\mathrm{d}k} = 2k + \int_{-k_F}^{k_F} \frac{\mathrm{d}k'}{2\pi} K(k - k') \frac{\mathrm{d}\varepsilon(k')}{\mathrm{d}k'}$$

对上式进行逐次迭代，得到

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon(k)}{\mathrm{d}k} = 2k + \int_{-k_F}^{k_F} \frac{1}{2\pi} 2k' K(k - k')$$

$$+ \int_{-k_F}^{k_F} \frac{\mathrm{d}k'\mathrm{d}k''}{(2\pi)^2} 2k' K(k - k'')K(k' - k'') + \cdots$$

将这个关系式与(2.2.47)式相比较，有

$$\int_{-k_F}^{k_F} \frac{\mathrm{d}k'}{2\pi} 2k' L(k, k') = \frac{\mathrm{d}\varepsilon(k)}{\mathrm{d}k} - 2k \qquad (2.2.50)$$

再将(2.2.50)式代入(2.2.48)式，最后得到

$$E_e = k_p^2 - k_h^2 + \int_{k_h}^{k_p} \left[\frac{d\varepsilon(k)}{dk} - 2k \right] dk$$
$$= \varepsilon(k_p) - \varepsilon(k_h) \tag{2.2.51}$$

因此 $\varepsilon(k_p)$和 $\varepsilon(k_h)$分别是激发粒子所携带的能量和空穴所携带的能量。它们由能谱积分方程(2.2.49)式所确定。

上面仅是对零温度下体系的能谱问题给出简单的讨论，更多的内容，特别是在有限温度下的热力学方面的内容，可参阅有关原始论文[3～7，10]。

形如(2.2.1)式的一维多体问题等价于非线性薛定谔方程的量子场论，具体证明可见本章附录。另外，类似的 Bethe-Ansatz 亦可用于带质量的 Thirring 模型，见附录。

(2) 费米子情况

在玻色子情况时，波函数中的坐标和动量是在同一置换 P 下进行排列的。而对费米子，情况是完全不同的。杨振宁教授给出波函数的 Bethe-Ansatz 是

$$\psi(x_1, \cdots, x_N) = \sum_{Q,P} A_P(Q) \exp\left\{ \mathrm{i} \sum_{j=1}^{N} k_{P_j} x_{Q_j} \right\} \theta(x_{Q_1} < \cdots < x_{Q_N}) \tag{2.2.52}$$

其中 $P = P_1 \cdots P_N$, $Q = Q_1 \cdots Q_N$ 是 $1, \cdots, N$ 的某两种排列，$\sum_{Q,P}$ 是对所有 Q, P 的排列取和。对给定的 Q, P 的一种排列顺序，则确定了 $A_P(Q)$的一个元素，这样的元素一共有 $N! \times N!$ 个，所以可以将 $A_P(Q)$写成 $N! \times N!$ 矩阵形式。

类似于玻色子系统的讨论，首先考虑由 δ 函数引起的波函数的连接条件。选择两个区域：$x_{Q_1} < \cdots < x_{Q_l} < x_{Q_{(l+1)}} < \cdots < x_{Q_N}$ 和 $x_{Q_1} < \cdots < x_{Q_{(l-1)}} < x_{Q_l} < \cdots < x_{Q_N}$，并分别记为区域 Ⅰ 和区域 Ⅱ 。在这两个区域的波函数由(2.2.52)给出

$$
\begin{cases}
\psi_{\mathrm{I}}(x_1, \cdots, x_N) = \sum_P{}' \Big\{ A_P(Q)\exp\{\mathrm{i}(\cdots + (k_{P_l} + k_{P_{(l+1)}})x \\
\quad + \frac{1}{2}(k_{P_{(l+1)}} - k_{P_l})y + \cdots)\} \\
\quad + A_{P'}(Q)\exp\{\mathrm{i}(\cdots + (k_{P_l} + k_{P_{(l+1)}})x \\
\quad - \frac{1}{2}(k_{P_{(l+1)}} - k_{P_l})y + \cdots)\}\Big\} \\
\psi_{\mathrm{II}}(x_1, \cdots, x_N) = \sum_P{}' \{ A_P(Q')\exp\{\mathrm{i}(\cdots + (k_{P_l} + k_{P_{(l+1)}})x \\
\quad - \frac{1}{2}(k_{P_{(l+1)}} - k_{P_l})y + \cdots)\} \\
\quad + A_{P'}(Q')\exp\{\mathrm{i}(\cdots + (k_{P_l} + k_{P_{(l+1)}})x \\
\quad + \frac{1}{2}(k_{P_{(l+1)}} - k_{P_l})y + \cdots)\}
\end{cases}
\tag{2.2.53}
$$

其中,x 和 y 分别是质心坐标和相对坐标:

$$x = \frac{1}{2}(x_{Q_l} + x_{Q_{(l+1)}}),\quad y = x_{Q_{(l+1)}} - x_{Q_l}$$

$Q' = Q_1 \cdots Q_{(l+1)} Q_l \cdots Q_N$, $P' = P_1 \cdots P_{(l+1)} P_l \cdots P_N$, $\cdots$ 表示 ψ_{I} 和 ψ_{II} 中相同的项,$\sum_P{}'$ 表示除 P_l 和 $P_{(l+1)}$ 的交换之外的所有排列取和。在 $x_{Ql} = x_{Q(l+1)}$ 时,波函数要满足连续条件和导数跃变条件:

$$\psi_{\mathrm{I}}\Big|_{y=0} = \psi_{\mathrm{II}}\Big|_{y=0},\quad \frac{\partial \psi_{\mathrm{I}}}{\partial y}\Big|_{y=0} - \frac{\partial \psi_{\mathrm{II}}}{\partial y}\Big|_{y=0} = c\psi_T\Big|_{y=0} \tag{2.2.54}$$

将(2.2.53)式代入(2.2.52)式,得到

$$A_P(Q) + A_{P'}(Q) = A_P(Q') + A_{P'}(Q')$$

$$\frac{\mathrm{i}}{2}(k_{P(l+1)} - k_{Pl})(A_P(Q) + A_P(Q') - A_{P'}(Q) - A_{P'}(Q')) = c(A_P(Q) + A_{P'}(Q)) \tag{2.2.55}$$

引入交换算符 $P_{l(l+1)}$，使得

$$P_{l(l+1)}(Q_1\cdots Q_l Q_{(l+1)}\cdots Q_N) = Q_1\cdots Q_{(l+1)}Q_l\cdots Q_N$$

从而有

$$A_{P'}(Q') = P_{l(l+1)}A_{P'}(Q),\ A_P(Q') = P_{l(l+1)}A_P(Q)$$

将这个结果代入(2.2.55)式，可解出：

$$A_P(Q) = \frac{\mathrm{i}(k_{P_{(l+1)}} - k_{P_l})P_{l(l+1)} + c}{\mathrm{i}(k_{P_{(l+1)}} - k_{P_l}) - c}A_{P'}(Q)$$

令 $l = a,\ l + 1 = b,\ i = P_a,\ j = P_b$，则上式写成

$$A_{\cdots ij\cdots}(Q) = Y_{ji}^{ab}A_{\cdots ji\cdots}(Q) \tag{2.2.56}$$

其中

$$Y_{ji}^{ab} = \frac{\mathrm{i}(k_j - k_i)P_{ab} + c}{\mathrm{i}(k_j - k_i) - c} \tag{2.2.57}$$

由(2.2.56)式可以看出，Y_{ji}^{ab}的作用是交换 $A_P(Q)$的 P 的排列顺序(由指标 ji 标记)和 Q 的排列顺序(由指标 ab 标记)。为使得各种交换结果是自洽的，Y_{ji}^{ab}不能是任意的，它必然受到某些条件的约束。这些条件来源于：i)用 Y_{ij}^{ab}从左边作用到(2.2.56)式的两边。由于 Y_{ij}^{ab}将 $A_{\cdots ij\cdots}(Q)$变成 $A_{\cdots ji\cdots}(Q)$，所以要求 $Y_{ij}^{ab}Y_{ji}^{ab}$为恒等算符；ii) $Y_{ij}^{ab}Y_{kl}^{cd}$和 $Y_{kl}^{cd}Y_{ij}^{ab}$对 $A_P(Q)$的作用的差别是，一个是先交换 Q 排列中的 c、d，然后再交换 a、b；另一个恰恰相反，所以当 c，d 和 a，b 均不相同时，两者对 $A_P(Q)$的作用是等价的。考虑 P 和 Q 的三个指标的交换，例如，从 $A_{ijk}(abc)$到 $A_{kji}(abc)$的交换过程，交换方式一

共有两种,其一是

$$A_{kji}(abc)=Y_{jk}^{ab}A_{jki}(abc)=Y_{jk}^{ab}Y_{ik}^{bc}A_{jik}(abc)$$
$$=Y_{jk}^{ab}Y_{ik}^{bc}Y_{ij}^{ab}A_{ijk}(abc)$$

其二是

$$A_{kji}(abc)=Y_{ij}^{bc}A_{kij}(abc)=Y_{ij}^{bc}Y_{ik}^{ab}A_{ikj}(abc)$$
$$=Y_{ij}^{bc}Y_{ik}^{ab}Y_{jk}^{bc}A_{ijk}(abc)$$

自洽性要求这两种交换方式是相等的。通过以上的讨论,得到 Y 所满足的自洽条件:

$$Y_{ij}^{ab}Y_{ji}^{ab}=1 \tag{2.2.58}$$

$$Y_{ij}^{ab}Y_{kl}^{cd}=Y_{kl}^{cd}Y_{ij}^{ab}\quad a,b,c,d\text{ 互不相等} \tag{2.2.59}$$

$$Y_{jk}^{ab}Y_{ik}^{bc}Y_{ij}^{ab}=Y_{ij}^{bc}Y_{ik}^{ab}Y_{jk}^{bc} \tag{2.2.60}$$

这就是杨振宁教授(1967年)给出的原始形式[7]。(2.2.58)式称为幺正条件,(2.2.60)式称为 QYBE。需要指出的是,由(2.2.57)式给出的 Y 算符满足(2.2.60)式。(2.2.59)式是显然的,因为当 a、b、c、d 互不相等时,$P^{ab}P^{cd}=P^{cd}P^{ab}$;其余两式的验证不在这里给出,在以后的章节中,将对 QYBE 的解作更系统的讨论。

Y_{ji}^{ab}的物理意义是非常明显的,例如对两个粒子体系,$A_{21}(12)=Y_{12}^{12}A_{12}(12)$,所以 Y_{12}^{12}是散射矩阵。对 $N>2$ 的多粒子情况,散射矩阵可因子化为两两散射矩阵的乘积,这和玻色子情况是非常类似的。

类似前面对玻色子的讨论,下面介绍在周期性边界条件下,动量 k_j 所满足的约束方程。将波函数(2.2.52)式代入周期边界条件(2.2.20)式,不难得到

$$A_{P_1\cdots P_N}(Q_1Q_2\cdots Q_N)=\mathrm{e}^{ik_{P_1}L}A_{P_2\cdots P_NP_1}(Q_2\cdots Q_NQ_1) \tag{2.2.61}$$

令 $P_1, \cdots, P_N = j, 1, \cdots, j-1, j+1, \cdots, N$，并利用

$$A_{j1\cdots(j-1)(j+1)\cdots N}(Q_1Q_2\cdots Q_N) = Y_{1j}^{12}Y_{2j}^{23}\cdots Y_{(j-1)j}^{(j-1)j}A_0(Q)$$

$$A_{1\cdots(j-1)(j+1)\cdots Nj}(Q_2\cdots Q_NQ_1) = P_{12}P_{23}\cdots P_{(N-1)N}Y_{jN}^{N(N-1)} \cdot Y_{j(N-1)}^{(N-1)(N-2)}\cdots Y_{j(j+1)}^{(j+1)j}A_0(Q)$$

则由(2.2.61)式得到

$$e^{ik_jL}A_0(Q) = Y_{(j+1)j}^{(j+1)j}\cdots Y_{(N-1)j}^{(N-1)(N-2)}Y_{Nj}^{N(N-1)}P_{(N-1)N}\cdots \cdot P_{23}P_{12}Y_{1j}^{12}Y_{2j}^{23}\cdots Y_{(j-1)j}^{(j-1)j}A_0(Q) \tag{2.2.62}$$

引入

$$X_{ij} = P_{ij}Y_{ij}^{ij} \tag{2.2.63}$$

直接计算有：

$$\begin{aligned}
&X_{1j}X_{2j}\cdots X_{(j-1)j}\\
&= P_{1j}Y_{1j}^{1j}P_{2j}Y_{2j}^{2j}\cdots P_{(j-1)j}Y_{(j-1)j}^{(j-1)j}\\
&= P_{(j-1)j}P_{1(j-1)}Y_{1j}^{1(j-1)}P_{2(j-1)}Y_{2j}^{2(j-1)}\cdots\\
&\quad \cdot P_{(j-2)(j-1)}Y_{(j-2)j}^{(j-2)(j-1)}Y_{(j-1)j}^{(j-1)j}\\
&= P_{(j-1)j}P_{(j-2)(j-1)}P_{1(j-2)}Y_{1j}^{1(j-2)}P_{2(j-2)}Y_{2j}^{2(j-2)}\cdots\\
&\quad \cdot P_{(j-3)(j-2)}Y_{(j-3)j}^{(j-3)(j-2)}Y_{(j-2)j}^{(j-2)(j-1)}Y_{(j-1)j}^{(j-1)j}\\
&= \cdots = P_{(j-1)j}P_{(j-2)(j-1)}\cdots P_{23}P_{12}Y_{1j}^{12}Y_{2j}^{23}\cdots Y_{(j-1)j}^{(j-1)j}
\end{aligned}$$

类似地

$$X_{(j+1)j}X_{(j+2)j}\cdots X_{Nj} = Y_{(j+1)j}^{(j+1)j}\cdots Y_{(N-1)j}^{(N-1)(N-2)}Y_{N1}^{N(N-1)} \cdot P_{(N-1)N}\cdots P_{(j+1)(j+2)}P_{j(j+1)}$$

从而得到

$$X_{(j+1)j}X_{(j+2)j}\cdots X_{Nj}X_{1j}X_{2j}\cdots X_{(j-1)j}A_0(Q) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_jL}A_0(Q) \tag{2.2.64}$$

这就是 k_j 满足的算符方程。当 $P_{ab}=1$ 时，粒子交换是对称的，(2.2.64)式蜕化为(2.2.24)式，给出玻色子情况。当 $P_{ab}=-1$ 时，粒子交换是反对称的，描述的是费米子。但是，由于 $Y_{ij}^{ab}=-1$，导致在 $x_i=x_j(i\neq j)$ 处，波函数 $\psi(x_1, \cdots, x_N)=0$，即体系是自由费米子系统。所以考虑相互作用时，必须选择 P_{ab}的高维表示。这时，方程(2.2.64)是 k_j 的矩阵方程，解方程(2.2.64)，也就是将方程左边对角化。

下面考虑自旋 1/2 的费米子系统。波函数按置换群的不可约表示 $R=[2^M, 1^{N-2M}]\left(M\leqslant\frac{N}{2}\right)$ 来分类，$P_{ab}\in R$。R 的共轭表示为 $\widetilde{R}=[N-M, M]$，$-P_{ab}\in\widetilde{R}$。对$\widetilde{R}$，(2.2.64)式变为

$$X'_{(j+1)j}X'_{(j+2)j}\cdots X'_{Nj}X'_{1j}X'_{2j}\cdots X'_{(j-1)j}\phi = \mu_j\phi \tag{2.2.65}$$

一般来讲，方程(2.2.64)和(2.2.65)所确定的 $\{k_j\}_{j=1}^N$ 是不同的，但物理上要求解是唯一的，所以这两个方程必须相同，即要求

$$\sigma_j(R) = \mu_j(\widetilde{R})$$

其中 $\sigma_j=\exp\{\mathrm{i}k_jL\}$。杨振宁推广了自旋波的 Bethe-Ansatz 方法，建立了 Yang-Bethe-Ansatz 方程：

$$\begin{cases} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_jL} = \prod\limits_{\beta=1}^{M}\dfrac{\mathrm{i}(k_j-\Lambda_\beta)-c/2}{\mathrm{i}(k_j-\Lambda_\beta)+c/2} \quad (j=1, \cdots, N) \\ \prod\limits_{j=1}^{N}\dfrac{\mathrm{i}(k_j-\Lambda_\alpha)-c/2}{\mathrm{i}(k_j-\Lambda_\alpha)+c/2} = -\prod\limits_{\beta=1}^{M}\dfrac{\mathrm{i}(\Lambda_\alpha-\Lambda_\beta)+c}{\mathrm{i}(\Lambda_\alpha-\Lambda_\beta)-c} \quad (\alpha=1, \cdots, M) \end{cases} \tag{2.2.66}$$

这个方程组决定了参数组 $\{\Lambda_\alpha\}_{\alpha=1}^M$ 和 $\{k_j\}_{j=1}^N$。有关(2.2.66)式的连续化及相应的能谱问题，这里不作介绍。

结束本节之前，有以下两点说明：

1）通常文献中 QYBE 的写法与(2.2.60)式的写法不同。为了所用的标记方法一致起见，取 $a=1$，$b=2$，$c=3$，$k_k-k_j=u$，$k_j-k_i=v$，有 $k_k-k_i=u+v$。令

$$\check{R}_{ab}(u)=Y^{ab}_{jk} \tag{2.2.67}$$

则(2.2.60)式可以改写为

$$\check{R}_{12}(u)\check{R}_{23}(u+v)\check{R}_{12}(v)=\check{R}_{23}(v)\check{R}_{12}(u+v)\check{R}_{23}(u) \tag{2.2.68}$$

这就是现今文献常用的写法之一。相应的 QYBE 的解(2.2.57)式改写为：

$$\check{R}(u)=f(u)(c-\mathrm{i}uP),\ f(u)=-(c+\mathrm{i}u)^{-1} \tag{2.2.69}$$

另一种最常用的写法是，通过定义

$$R(u)=P\check{R}(u) \tag{2.2.70}$$

则(2.2.68)式改写为

$$R_{12}(u)R_{13}(u+v)R_{23}(v)=R_{23}(v)R_{13}(u+v)R_{12}(u) \tag{2.2.71}$$

相应地

$$R(u)=f'(u)(u+\mathrm{i}cP),\ f'(u)=-\mathrm{i}f(u) \tag{2.2.72}$$

(2.2.71)式就是§2.1中的(2.1.84)式。(2.2.69)式和(2.2.72)式是 QYBE 的有理解的不同标记形式。

2）Yang-Bethe-Ansatz 方程(2.2.66)式可以通过 RTT 关系而得到，现简要说明之。利用(2.2.63)式和(2.2.57)式可将 x'_{ij} 写成

$$x'_{ij} = a(k_i - k_j) + b(k_i - k_j)P_{ij}$$
$$a(k) = \frac{k}{k + \mathrm{i}c} \quad b(k) = \frac{\mathrm{i}c}{k + \mathrm{i}c} \tag{2.2.73}$$

(对 x'_{ij}，(2.2.57)式中的 $P_{ij} \to -P_{ij} \in \tilde{R}$)。对于自旋 1/2 的费米子体系，$P_{ij}$可写成

$$P_{ij} = \frac{1}{2}(1 + \boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_j)$$

其中 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ 是泡利算符。引入二维辅助空间 V，定义

$$L_j(k) = a(k_j - k) + b(k_j - k)P_{j\tau} \tag{2.2.74}$$

其中，$P_{j\tau} = (1 + \boldsymbol{\sigma}_j \cdot \boldsymbol{\tau})/2$，$\boldsymbol{\tau}$ 是 V 上的 2×2 泡利矩阵。由$L_j(k)$定义

$$T_N(k) = L_1(k) \cdots L_N(k) \tag{2.2.75}$$

引入 $L_j(k)$和 $T_N(k)$的目的是为了将(2.2.65)式的左边对角化，为此首先建立 $T_N(k)$与它的关系。在辅助空间 V 上对 $T_N(k)$取迹，并且利用 $L_j(k_j) = P_{j\tau}$，$P_{j\tau}L_i(k_j) = X'_{ij}P_{j\tau}$，从而有

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}T_N(k_j) &= \mathrm{tr}(L_1(k_j) \cdots L_{j-1}(k_j)P_{j\tau}L_{j+1}(k_j) \cdots L_N(k_j)) \\ &= \mathrm{tr}(P_{j\tau}L_{j+1}(k_j) \cdots L_N(k_j)L_1(k_j) \cdots L_{j-1}(k_j)) \\ &= \mathrm{tr}(X'_{(j+1)j} \cdots X'_{Nj}X'_{1j} \cdots X'_{(j-1)j}P_{j\tau}) \end{aligned}$$

再利用 $\mathrm{tr}P_{j\tau} = 1$ 可得

$$\mathrm{tr}T_N(k_j) = X'_{(j+1)j} \cdots X'_{Nj}X'_{1j} \cdots X'_{(j-1)j}$$

从而约束方程(2.2.65)变为

$$(\mathrm{tr}T_N(k_j))\phi = \mu_j\phi \tag{2.2.76}$$

由此可以看出，只要将 $\mathrm{tr}T_N(k_j)$对角化，则可以确定 μ_j。将

(2.2.74)式写成矩阵形式

$$L_j(u) = f(u)\begin{pmatrix} 1 - \mathrm{i}u^{-1}S_j^3 & -\mathrm{i}u^{-1}S_j^- \\ -\mathrm{i}u^{-1}S_j^+ & 1 + \mathrm{i}u^{-1}S_j^3 \end{pmatrix}$$

$$u = -\left(\frac{k_j - k}{c} + \frac{\mathrm{i}}{2}\right),\ f(u) = \frac{u}{u - \mathrm{i}/2}$$

$$S_j^3 = \frac{1}{2}\sigma_j^3,\ S_j^{\pm} = \frac{1}{2}(S_j^1 \pm \mathrm{i}S_j^2)$$

它和 XXX 模型的 $L_n(\lambda)$矩阵具有相同的形式,所以它必然满足局域交换关系。虽然在 $L_j(k)$中存在依赖格点 j 的 k_j,但 $R(k-k')$ 与 k_j 无关,即对所有格点 j 的 $R(k-k')$ 是相同的,同时注意到 $T_N(k)$和整体转移矩阵的差别仅是排列顺序不同,而这并不影响 RTT 关系,所以对 $T_N(k)$仍有

$$R(k-k')\overset{1}{T}_N(k)\overset{2}{T}_N(k') = \overset{2}{T}_N(k')\overset{1}{T}_N(k)R(k-k') \tag{2.2.77}$$

其中 $R(k)$具有如下形式:

$$R(k-k') = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \beta(k-k') & \alpha(k-k') & \\ & \alpha(k-k') & \beta(k-k') & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \tag{2.2.78}$$

$$\alpha(k-k') = \frac{-\mathrm{i}c}{k-k'-\mathrm{i}c},\ \beta = \frac{k-k'}{k-k'-\mathrm{i}c}$$

将 $T_N(k)$写成

$$T_N(k) = \begin{pmatrix} A(k) & B(k) \\ C(k) & D(k) \end{pmatrix} \tag{2.2.79}$$

则由(2.2.77)式～(2.2.79)式给出所需要的部分交换关系

$$
\begin{cases}
[B(k), B(k')] = [C(k), C(k')] = 0 \\
A(k)B(k') = \sigma(k-k')B(k')A(k) + \gamma(k-k')B(k)A(k') \\
D(k)B(k') = \sigma(k'-k)B(k')D(k) + \gamma(k'-k)B(k)D(k')
\end{cases}
\tag{2.2.80}
$$

其中

$$
\begin{cases}
\sigma(k-k') = \beta^{-1}(k'-k) = \dfrac{k-k'+\mathrm{i}c}{k-k'} \\
\gamma(k-k') = \beta^{-1}(k-k')\alpha(k-k') = -\dfrac{\mathrm{i}c}{k-k'}
\end{cases}
\tag{2.2.81}
$$

选取

$$
|0\rangle = \bigotimes_{j=1}^{N} |0\rangle_j, \quad |0\rangle_j = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_j
\tag{2.2.82}
$$

使得 $\sigma_j^+ |0\rangle = 0$。将 $T_N(k)$作用到$|0\rangle$,容易计算出

$$
C(k)|0\rangle = 0, \ A(k)|0\rangle = |0\rangle, \ D(k)|0\rangle = \prod_{j=1}^{N}\left(\frac{k_j-k}{k_j-k+\mathrm{i}c}\right)|0\rangle
\tag{2.2.83}
$$

假定 $\mathrm{tr}T_N(k)$的本征态为

$$
\phi = B(v_1)\cdots B(v_M)|0\rangle
\tag{2.2.84}
$$

将 $\mathrm{tr}T_N(k)$作用到(2.2.84)式,类似对 NSE 的作法,逐次交换 A 和 B, D 和 B,不难得出 $\mathrm{tr}T_N(k)$的本征值 $E(k)$为:

$$
E(k) = \prod_{\alpha=1}^{M}\sigma(k-v_\alpha) + \prod_{i=1}^{N}\frac{k_i-k}{k_i-k+\mathrm{i}c}\prod_{\alpha=1}^{M}\sigma(v_\alpha-k)
\tag{2.2.85}
$$

相应的限制方程是

$$\prod_{\beta\neq\alpha}^{M}\sigma(v_\alpha - v_\beta) = \prod_{j=1}^{N}\frac{k_j - v_\alpha}{k_j - v_\alpha + \mathrm{i}c}\prod_{\beta\neq\alpha}^{M}\sigma(v_\beta - v_\alpha) \tag{2.2.86}$$

考虑到(2.2.76)式，取 $k = k_j$，则(2.2.85)式右边第二项为零，而左边 $E(k_j) = \mu_j = \exp\{\mathrm{i}k_j L\}$。从而(2.2.85)式和(2.2.86)式写为

$$\begin{cases} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_j L} = \prod\limits_{\beta=1}^{M}\dfrac{k_j - v_\beta + \mathrm{i}c}{k_j - v_\beta} \\ \prod\limits_{j=1}^{N}\dfrac{k_j - v_\alpha + \mathrm{i}c}{k_j - v_\alpha} = \prod\limits_{\beta=1}^{M}\dfrac{v_\alpha - v_\beta - \mathrm{i}c}{v_\alpha - v_\beta + \mathrm{i}c} \end{cases} \tag{2.2.87}$$

将上式中的 v_α 取成

$$v_\alpha = \Lambda\alpha + \mathrm{i}c/2 \tag{2.2.88}$$

则这个方程就是 Yang-Bethe-Ansatz 方程(2.2.66)。

§2.3 QYBE 的起源(Ⅰ)——统计物理中的二维精确可解模型

统计力学中的第一个二维精确可解模型是 Ising 模型(Onsager，1944)。其他的二维精确可解模型有冰模型(六顶角模型，Lieb，1967)、八顶角模型(Baxter，1972)和 Potts 模型(Z_N 模型，Temperley 和 Lieb，1971；Baxter，1973)等。求解精确可解模型的基本思想是：将求解系统的配分函数转化为对矩阵的迹的运算，然后解决该矩阵的对角化问题。在处理矩阵的对角化问题时，采用的基本方法是早期的 Bethe-Ansatz 方法和后来建立的量子逆散射方法。本节主要介绍在精确求解顶角模型时，由巴克斯特建立的星-角关系(star-triangle relation)[13]。

星-角关系是建立在对八顶角的研究基础上。为简便起见，这里以冰模型为例介绍星-角关系。星-角关系是二维格点模型的普

遍规律,不同的模型,差别仅在于其解的形式不同。

(1) 冰模型和星-角关系

自然界中存在着一些氢束缚晶体,人们最熟悉的例子就是冰。在二维情况下,氧原子形成平面格子,在每一对邻近的氧原子之间有一个氢离子。假定氢离子的运动规律服从冰规则:每个氧原子周围的四个氢离子,如有两个靠近氧原子,其他两个氢离子则远离氧原子。体系的相互作用仅考虑邻近氧原子和氢离子之间的电偶极子作用。以此为基础而得到的平面氧原子-氢离子格点模型就是冰模型(ice model)。

电偶极矩的两个可能方向用箭头标记为:氢离子靠近氧原子时,箭头指向氧原子;远离氧原子时,箭头指向相反,如图2.3所示。

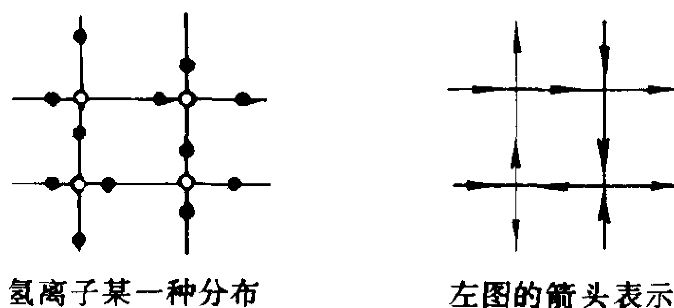


图 2.3

在冰规则限制下,一个氧原子和其周围的四个氢离子所形成的顶角只有六种可能方式,如图2.4所示。

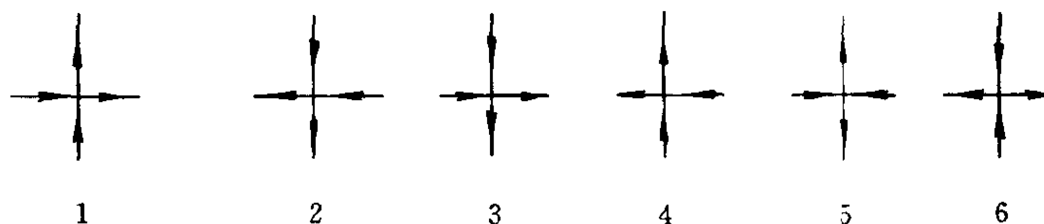


图 2.4

所以冰模型也称为六顶角模型。这六种不同的顶角表示出氧原子和周围四个氢离子的六种不同相互作用情况,它们相应的束缚能

记为 ε_i，$i=1,\cdots,6$，则冰模型的配分函数可写为

$$Z=\sum\exp\{-\mathscr{E}/k_BT\} \tag{2.3.1}$$

其中，$\sum$ 是对平面格点上的氢离子所有允许分布取和，$\mathscr{E}$ 是某一种分布的总能量。当在某一种分布时，出现第 i 个顶角的数目是 n_i，则

$$\mathscr{E}=\sum_{i=1}^{6}n_i\varepsilon_i \tag{2.3.2}$$

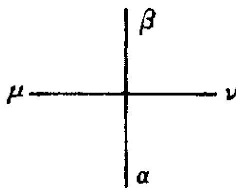


图　2.5

下面的问题是如何精确求解配分函数 Z。为此首先考虑由顶角构成的矩阵形式。

设平面格子由 N 条垂直线和 M 条水平线组成。首先研究 M 条水平线中的某一条上的顶角分布。用指标标记顶角的箭头方向(见图 2.5)。其中 $\mu,\nu,\alpha,\beta=\pm$，“+”表示→或↑；“−”表示←或↓。这样一条水平线上的 N 个顶角可以用图表示(见图 2.6)。

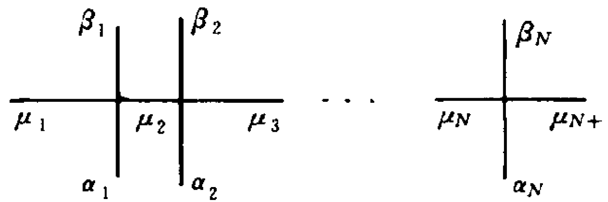


图　2.6

将顶角的玻耳兹曼权 $\exp\{-\varepsilon_i/k_BT\}$ 标记为 $w(\mu,\alpha|\beta,\nu)$，从而有

$$\begin{cases} w(+,+\mid+,+)=\exp\{-\varepsilon_1/k_BT\}\\ w(-,-\mid-,-)=\exp\{-\varepsilon_2/k_BT\}\\ w(+,-\mid-,+)=\exp\{-\varepsilon_3/k_BT\}\\ w(-,+\mid+,-)=\exp\{-\varepsilon_4/k_BT\}\\ w(+,-\mid+,-)=\exp\{-\varepsilon_5/k_BT\}\\ w(-,+\mid-,+)=\exp\{-\varepsilon_6/k_BT\} \end{cases} \tag{2.3.3}$$

考虑到周期性边界条件：$\mu_1 = \mu_{N+1}$，从而可将顶角的线分布写成 $2^N \times 2^N$ 矩阵 V，它的矩阵元为

$$V_\alpha^\beta = \sum_{\mu_1, \cdots, \mu_N} w(\mu_1, \alpha_1 | \beta_1, \mu_2) w(\mu_2, \alpha_2 | \beta_2, \mu_3) \cdots \cdot w(\mu_N, \alpha_N | \beta_N, \mu_1) \tag{2.3.4}$$

其中 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N)$，$\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_N)$。再附加上第一条水平线和第 M 条水平线的周期边界条件，则平面格点上各种允许的顶角分布的和是 M 个 V 矩阵的乘积的迹。由此得到

$$Z_{NM} = \mathrm{tr} V^M \tag{2.3.5}$$

这样，求解配分函数 Z_{NM} 就转化为 V 矩阵的对角化。

在研究对角化之前，必须先给出 $w(\mu, \alpha|\beta, \nu)$的函数形式，为此首先要建立 w 满足的某种关系式。玻耳兹曼权 w 除依赖于极化方向指标 μ, ν, α, β 之外，还依赖于动力学参数(含于能量中)。当动力学参数变化时，矩阵 V 也将随之改变。设 w 变为 w'，相应的 V 变为 V'，则要求

$$VV' = V'V \tag{2.3.6}$$

否则 M 个 V 乘积的结果不是唯一的，导致配分函数不是唯一的。(2.3.6)式确定了 w 之间满足的关系式。具体做法是，定义 4×4 矩阵 $S(\alpha, \beta)$和 $S'(\alpha, \beta)$，它们的矩阵元为

$$S(\mu, \nu | \mu', \nu' | \alpha, \beta) = \sum_\gamma w(\mu, \alpha | \gamma, \mu') w'(\nu, \gamma | \beta, \nu')$$

$$S'(\mu, \nu | \mu', \nu' | \alpha, \beta) = \sum_\gamma w'(\mu, \alpha | \gamma, \mu') w(\nu, \gamma | \beta, \nu') \tag{2.3.7}$$

其中行指标是(μ, ν)，列指标是(μ', ν')。它们可以用图形表示(见图 2.7)。

(2.3.8)

图 2.7

类似地，$(VV')^{\beta}_{\alpha} = V^{\gamma}_{\alpha}V'^{\beta}_{\gamma}$ 和 $(V'V)^{\beta}_{\alpha} = V'^{\gamma}_{\alpha}V^{\beta}_{\gamma}$ 的图示见图 2.8 和图 2.9。

(2.3.9)

图 2.8

(2.3.10)

图 2.9

把(2.3.8)式和(2.3.9)式、(2.3.10)式作比较，容易看出

$$
\begin{aligned}
(VV')^{\beta}_{\alpha} &= \mathrm{tr}S(\alpha_1, \beta_1)S(\alpha_2, \beta_2)\cdots S(\alpha_N, \beta_N) \\
(V'V)^{\beta}_{\alpha} &= \mathrm{tr}S'(\alpha_1, \beta_1)S'(\alpha_2, \beta_2)\cdots S'(\alpha_N, \beta_N)
\end{aligned}
\tag{2.3.11}
$$

如果存在 4×4 非奇导矩阵 M，使得

$$S(\alpha,\ \beta)M = MS'(\alpha,\ \beta) \tag{2.3.12}$$

则(2.3.6)式成立，即 V 和 V' 可交换。这个结论的证明是非常简单的，利用(2.3.12)式，有

$$\begin{aligned}(V'V)_\alpha^\beta &= \mathrm{tr} M^{-1}S(\alpha_1,\ \beta_1)MM^{-1}S(\alpha_2,\ \beta_2)M\cdots M^{-1}S(\alpha_N,\ \beta_N)M \\ &= \mathrm{tr} S(\alpha_1,\ \beta_1)S(\alpha_2,\ \beta_2)\cdots S(\alpha_N,\ \beta_N) \\ &= (VV')_\alpha^\beta\end{aligned}$$

由此可见，选择适当的 M，使得(2.3.12)式成立，就保证了(2.3.6)式。取 M 的矩阵元为 $w''(\nu,\ \mu|\nu',\ \mu')$，其中$(\mu,\ \nu)$是行指标，$(\mu',\ \nu')$是列指标，则(2.3.12)式可写为

$$\begin{aligned}&\sum_{\gamma,\ \mu'',\ \nu''} w(\mu,\ \alpha|\gamma,\ \mu'')w'(\nu,\ \gamma|\beta,\ \nu'')w''(\nu'',\ \mu''|\nu',\ \mu') \\ =& \sum_{\gamma,\ \mu'',\ \nu''} w''(\nu,\ \mu|\nu'',\ \mu'')w'(\mu'',\ \alpha|\gamma,\ \mu')w(\nu'',\ \gamma|\beta,\ \nu')\end{aligned} \tag{2.3.13}$$

这个关系式就是由巴克斯特建立的星-角关系，它是 QYBE 的另一种写法。星-角关系的图形表示见图 2.10。

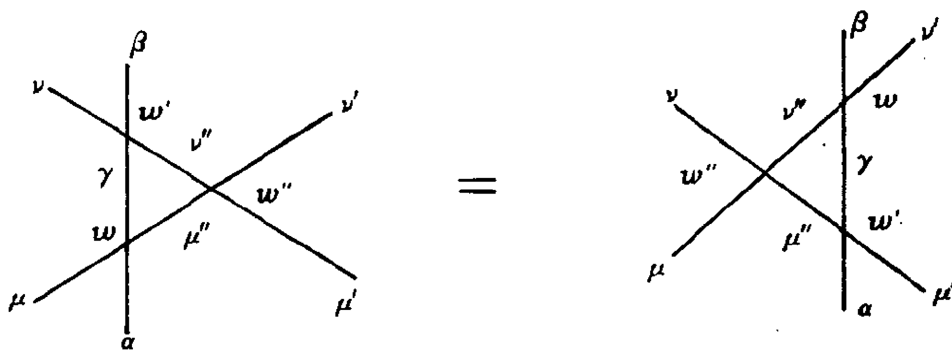


图 2.10

星-角关系(2.3.13)式也可以写成更简捷的形式。通过引入在 N 个二维矢量空间的直积上的张量积矩阵 U_i，$i = 1,\ \cdots,\ N-1$，它的矩阵元定义为

$$(U_i)_\alpha^\beta = \delta(\alpha_1, \beta_1)\cdots\delta(\alpha_{i-1}, \beta_{i-1})$$

$$\cdot w(\alpha_i, \alpha_{i+1} | \beta_i, \beta_{i+1})\delta(\alpha_{i+2}, \beta_{i+2})\cdots\delta(\alpha_N, \beta_N)$$

则(2.3.13)式的等价方程为

$$U_{i+1}U'_iU''_{i+1} = U''_iU'_{i+1}U_i$$

$$U_iU'_j = U'_jU_i, \ |i-j| > 1 \tag{2.3.14}$$

确定了 w 满足的关系式(2.3.13)后，需要解出 w 的具体函数形式。考虑到物理实际情况，可选取 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_4$, $\varepsilon_5 = \varepsilon_6$，这样独立的顶角个数由 6 个蜕化为 3 个，可记为

$$\begin{cases} w(+, + | +, +) = w(-, - | -, -) = a \\ w(+, - | -, +) = w(-, + | +, -) = b \\ w(+, - | +, -) = w(-, + | -, +) = c \end{cases} \tag{2.3.15}$$

由(2.3.13)式，经过直接计算，可以得到 a, b, c 之间满足的关系式：

$$\begin{cases} ac'a'' = bc'b'' + ca'c'' \\ ab'c'' = ba'c'' + cc'b'' \\ cb'a'' = ca'b'' + bc'c'' \end{cases} \tag{2.3.16}$$

消去 a'', b'' 和 c''，得到

$$\Delta = \Delta', \ \Delta = (a^2 + b^2 - c^2)/2ab \tag{2.3.17}$$

类似地，在(2.3.16)式中消去 a', b', c'，也可以得到 $\Delta = \Delta''$。这表明 w 改变时，Δ 保持不变。由 Δ 的定义及 Δ 的不变性，可以看出，比值 b/a 和 c/a 只依赖于一个可变参数。为了将它参数化，引入不变参数 x 和可变参数 t，并且令

$$\frac{b}{a}=\frac{x^2-t^2}{x(1-t^2)}\qquad \frac{c}{a}=\frac{t(x^2-1)}{x(1-t^2)}$$

将其代入(2.3.17)式,容易计算出$\Delta=(x+x^{-1})/2$,即Δ与可变参数t无关,保证了Δ的不变性。令$a=\rho' x(1-t^2)$,ρ'是x,t的任意函数,则有

$$a=\rho' x(1-t^2),\ b=\rho'(x^2-t^2),\ c=\rho' t(x^2-1) \tag{2.3.18}$$

实际上,由于QYBE允许w元素差一个公共因子,所以a的选择并不受限制,这也就是a中出现任意函数ρ'的原因。再令

$$x=-\mathrm{e}^{-\lambda},\ t=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(u-\lambda)},\ \rho'=\frac{1}{2}\rho t^{-1}x^{-1} \tag{2.3.19}$$

则(2.3.18)式改写为

$$a=\rho\mathrm{sh}\,\frac{1}{2}(\lambda-v),\ b=\rho\mathrm{sh}\,\frac{1}{2}(\lambda+v),\ c=\rho\mathrm{sh}\lambda \tag{2.3.20}$$

在(2.3.19)式中,λ是固定参数,不是前面经常使用的可变谱参数,而v是可变参数,它才是谱参数。这时Δ用λ表示为

$$\Delta=-\mathrm{ch}\lambda \tag{2.3.21}$$

经过上面的讨论,显然w变为$w'(w'')$是指v变为$v'(v'')$。再将(2.3.20)式代回(2.3.16)式中的任意一个方程,经过简单计算,在$\lambda\neq 0$(否则$\Delta=0$)下,得到v,v'和v''的限制条件

$$\mathrm{sh}\,\frac{1}{4}(\lambda+v-v'+v'')=0 \tag{2.3.22}$$

显然,(2.3.22)式的解是$v'=\lambda+v+v''$或$v'=\lambda+v+v''+\mathrm{i}\delta m\pi$,$m$是整数。但注意到$v'\to v'+\mathrm{i}\delta m\pi$时,$a'$,$b'$和$c'$是不变

的，所以可以取

$$v' = \lambda + v + v'' \tag{2.3.23}$$

为了使星-角关系写成更简单的形式，将 v 换成 u：

$$u = \frac{1}{2}(\lambda + v) \tag{2.3.24}$$

从而(2.3.23)式变为

$$u' = u + u'' \tag{2.3.25}$$

相应地，(2.3.20)式变为

$$a = \rho \mathrm{sh}(\lambda - u),\ b = \rho \mathrm{sh} u,\ c = \rho \mathrm{sh} \lambda \tag{2.3.26}$$

这就是最后确定的玻耳兹曼权 w 的参数化表达式。参数化后的星-角关系写成

$$\sum_{\gamma,\mu'',\nu''} w(\mu,\alpha|\gamma,\mu'')(u) w(\nu,\gamma|\beta,\nu'')(u+u'') w(\nu'',\mu''(\nu',\mu')(u'')$$

$$= \sum_{\gamma,\mu'',\nu''} w(\nu,\mu|\nu'',\mu'')(u'') w(\mu'',\alpha|\gamma,\mu')(u+u'')$$

$$\cdot w(\nu'',\gamma|\beta,\nu')(u) \tag{2.3.27}$$

或

$$\begin{cases} U_{i+1}(u)U_i(u+u'')U_{i+1}(u'') = U_{i+1}(u'')U_i(u+u'')U_{i+1}(u) \\ U_i(u)U_j(u'') = U_j(u'')U_i(u) \quad |i-j|>1 \end{cases} \tag{2.3.28}$$

(2) 矩阵 V 的对角化

上面通过星-角关系，已确定了 w 对谱参数 u 的明显表达式，这时 V 的矩阵元也就随之完全确定，从而可转向对 V 的对角化讨论。对角化的方法有两种，一是 Bethe-Ansatz，二是量子逆散射。为了和本书的中心内容 QYBE 相配合，这里采用后一种方法，以展示 RTT 关系的重要作用。

首先确定局域转移矩阵 L_n，$n=1, \cdots, N$。为此，考察顶角 $w(\mu_n, \alpha_n | \beta_n, \mu_{n+1})$。标记指标取值：$+=1/2$，$-=-1/2$，则 w 可以用 2×2 泡利矩阵元表示为

$$w(\mu_n, \alpha_n | \beta_n, \mu_{n+1}) = \sum_{j=1}^{4} w_j (\sigma^j)_{\alpha_n}^{\beta_n} (\sigma^j)_{\mu_n}^{\mu_{n+1}} \tag{2.3.29}$$

其中 $\sigma^4 = I$，w_j 由下式给出：

$$w_1 = w_2 = \frac{1}{2}c,\ w_3 = \frac{1}{2}(a-b),\ w_4 = \frac{1}{2}(a+b) \tag{2.3.30}$$

可以直接验证(2.3.29)式和(2.3.30)式的正确性，例如

$$\begin{aligned} w(1/2, -1/2 | 1/2, -1/2) &= w(+, - | +, -) \\ &= \sum_{j=1}^{4} w_j (\sigma^j)_{-1/2}^{1/2} (\sigma^j)_{1/2}^{-1/2} \\ &= w_1 + w_2 = c \end{aligned}$$

利用(2.3.29)式，可以引入 2×2 矩阵 $L_n(u)$，它的矩阵元定义为

$$(L_n(u))_\mu^\nu = \sum_{j=1}^{4} w_j(u) \sigma_n^j (\sigma^j)_\mu^\nu \tag{2.3.31}$$

其中 σ_n^j，$j=1, 2, 3$，是格点 n 上的 2×2 泡利矩阵。它的矩阵形式是

$$L_n(u) = \begin{pmatrix} w_4(u) + w_3(u)\sigma_n^3 & w(u)\sigma_n^- \\ w(u)\sigma_n^+ & w_4(u) - w_3(u)\sigma_n^3 \end{pmatrix} \tag{2.3.32}$$

其中 $w \equiv w_1 = w_2$。比较(2.3.31)式和(2.3.29)式，容易看出，$L_n(u)$是以$w(\mu, \alpha_n | \beta_n, \nu)$中的 μ，ν 作为矩阵指标的，而指标 α_n，β_n 是 2×2 泡利矩阵 σ_n^j 的矩阵指标，矩阵元为$(\sigma^j)_{\alpha_n}^{\beta_n}$，所以将$L_n(u)$

写成 4×4 矩阵时，其矩阵元就是 $w(\mu, \alpha_n | \beta_n, \nu)$。由此引入

$$R_{\alpha\ \mu}^{\beta\ \nu}(u) = w(\mu, \alpha | \beta, \nu) \tag{2.3.33}$$

则星-角关系的左边可以写成

$$R_{\mu'\nu''}^{\nu'\mu'}(u'')(L_n(u))_{\mu}^{\mu''}(L_n(u+u''))_{\nu}^{\nu''} = [R(u'')\overset{1}{L}_n(u)\overset{2}{L}_n(u+u'')]_{\mu\nu}^{\nu'\mu'}$$

右边可以写成

$$(L_n(u+u''))_{\mu''}^{\mu'}(L_n(u))_{\nu''}^{\nu'}R_{\mu\nu}^{\nu''\mu''}(u'') = [\overset{2}{L}_n(u+u'')\overset{1}{L}_n(u)R(u'')]_{\mu\nu}^{\nu'\mu'}$$

从而有局域交换关系

$$R(u'')\overset{1}{L}_n(u)\overset{2}{L}_n(u+u'') = \overset{2}{L}_n(u+u'')\overset{1}{L}_n(u)R(u'') \tag{2.3.34}$$

将上式中的 $u+u''$ 变换成 v，则(2.3.34)式可写成在 § 2.1 中建立的局域转移矩阵所满足的交换关系(2.2.17a)式。再由 $L_n(u)$ 定义转移矩阵

$$T_N(u) = \prod_{n=1}^{\widehat{N}} L_n(u)$$

自然满足 RTT 关系。并且 $R(u)$ 矩阵由玻耳兹曼权 w 给出。由定义(2.3.33)式与(2.3.15)式可将 $R(u)$ 写成：

$$\begin{cases} R(u) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \beta(u) & \alpha(u) & \\ & \alpha(u) & \beta(u) & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \\ \alpha(u) = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\mathrm{sh}\lambda}{\mathrm{sh}(\lambda-u)} \\ \beta(u) = \dfrac{b}{a} = \dfrac{\mathrm{sh}u}{\mathrm{sh}(\lambda-u)} \end{cases} \tag{2.3.35}$$

引入$T_N(u)$的目的是借助它实现V矩阵的对角化。对$T_N(u)$取迹,有

$$
\begin{aligned}
[\mathrm{tr} T_N(u)]_\alpha^\beta &= [\mathrm{tr}(L_1(u)\cdots L_N(u))]_\alpha^\beta \\
&= \sum_{\mu_1,\cdots,\mu_n} w(\mu_1,\alpha_1|\beta_1,\mu_2) \\
&\quad \cdot w(\mu_2,\alpha_2|\beta_2,\mu_3)\cdots w(\mu_n,\alpha_n|\beta_n,\mu_1) \\
&= V_\alpha^\beta(u)
\end{aligned}
\tag{2.3.36}
$$

即

$$
V(u) = \mathrm{tr} T_N(u) \tag{2.3.37}
$$

这样,对$V(u)$的对角化问题就转化为对$\mathrm{tr}T_N(u)$的对角化问题。对角化的步骤和NSE及一维δ函数势相互作用的多体量子力学中所做过的对角化步骤完全相同,只不过这里遇到的是$R(u)$的三角解。为了避免重复,这里只作简单的描述,不再给出详尽的推导过程。

将$T_N(u)$写成

$$
T_N(u) = \begin{pmatrix} A_N(u) & B_N(u) \\ C_N(u) & D_N(u) \end{pmatrix} \tag{2.3.38}
$$

RTT关系给出如下交换关系:

$$
\begin{cases}
[B_N(u), B_N(v)] = [C_N(u), C_N(v)] = 0 \\
A_N(u)B_N(v) = \beta^{-1}(v-u)(B_N(v)A_N(u) \\
\qquad\qquad - \alpha(v-u)B_N(u)A_N(v)) \\
D_N(u)B_N(v) = \beta^{-1}(u-v)(B_N(v)D_N(u) \\
\qquad\qquad - \alpha(u-v)B_N(u)D_N(v))
\end{cases}
\tag{2.3.39}
$$

$|0\rangle$的定义由(2.2.82)式给出,$T_N(u)$作用到$|0\rangle$,有

$$C_N(u)|0\rangle=0,\quad A_N(u)|0\rangle=a(u)^N|0\rangle,\quad D_N(u)|0\rangle=b(u)^N|0\rangle \tag{2.3.40}$$

从而得到 $\mathrm{tr}T_N(u)|0\rangle=(a(u)^N+b(u)^N)|0\rangle$，这意味着 $|0\rangle$ 是 $V(u)$ 的一个本征态，相应的本征值为 a^N+b^N。然后定义

$$|u_1,\cdots,u_n\rangle=\Big(\prod_{j=1}^{n}B_N(u_j)\Big)|0\rangle,\quad n=1,\cdots,N \tag{2.3.41}$$

将 $T_N(u)$ 作用(2.3.41)式，并逐次交换 A_N 和 B_N，D_N 和 B_N，最后得到

$$\mathrm{tr}T_N(u)|u_1,\cdots,u_n\rangle=\Lambda_n(u,u_1,\cdots,u_n)|u_1,\cdots,u_n\rangle \tag{2.3.42}$$

其中

$$\Lambda_n(u;u_1,\cdots,u_n)=a(u)^N\prod_{j=1}^{n}\frac{\mathrm{sh}(\lambda-u_j+u)}{\mathrm{sh}(u_j-u)}+b(u)^N\prod_{j=1}^{n}\frac{\mathrm{sh}(\lambda+u_j-u)}{\mathrm{sh}(u-u_j)}$$

同时，在交换过程中会出现非对角化项，要求这些项的总贡献为零，给出了 $\{u_j\}_{j=1}^{n}$ 必须满足的约束方程：

$$\left(\frac{\mathrm{sh}(\lambda-u_j)}{\mathrm{sh}u_j}\right)^N=\prod_{i=1}^{n}\frac{\mathrm{sh}(\lambda+u_i-u_j)}{\mathrm{sh}(\lambda+u_j-u_i)},\quad n=1,\cdots,N \tag{2.3.43}$$

由(2.3.36)式知道 $\Lambda_n(u;u_1,\cdots,u_n)$ 就是矩阵 $V(u)$ 的本征值。由于 $V(u)$ 是 $2^N\times2^N$ 矩阵，所以它的本征值的总数是 2^N。它对指标 n 的分布是：$n=0$ 时，Λ_0 的个数是 1；$n>0$ 时，Λ_n 的个数是 2^{n-1}。

这里需要指出的是，由(2.3.32)式给出 $L_n(u)$ 等价于 §2.1 中 XXZ 模型的局域转移矩阵，差别仅是这里是用双曲函数表示 w_j，

相应的 R 矩阵也是由双曲函数表示的。所以在六顶角模型中，从二维格点平面上抽出一条水平线则等价于 XXZ 模型中一维格点自旋-1/2 链。由此，用 RTT 关系研究 V 矩阵的对角化是很自然的事情。

解决了 V 矩阵的对角化问题，也就知道了配分函数 Z_{NM}的明显函数表示。在此基础上，可讨论系统的热力学性质，其中最重要的是相变问题。在热力学极限下，每个格点的自由能为

$$f = -k_{B}T \lim_{N,\, M\to\infty} (NM)^{-1}\ln Z_{NM}$$

$$= -k_{B}T \lim_{N,\, M\to\infty} (NM)^{-1}\ln\Big(\sum_{n=0}^{N} \Lambda_{n}^{M}\Big) \qquad (2.3.44)$$

显然，自由能 f 取决于 V 的本征值 $\{\Lambda_n\}_{n=0}^{N}$ 中最大的一个。在讨论六顶角的相变时，是以 Δ 的不同值域划分相变区，寻找不同相变区的最大 Λ_n，由此给出 f 的不同函数表示。再由 f 在相邻区域的交界处的行为，确定区域之间是否有相变发生。有关这方面的讨论，在巴克斯特的论文和专著[13,15]中有详尽的描述，这里不作更多的介绍。

本章围绕着 QYBE 这一核心内容，对早期的相关研究成果作了初步的介绍，以使对该领域不熟悉的读者对 QYBE 的物理来源和重要作用有所了解。当然，有关 QYBE 及相关问题的研究不仅仅限于这些。1985 年以后的研究进展表明，QYBE 已成多个研究分支的理论基础。直到目前，它的巨大潜力还没有充分开发出来。

最后要强调，Bethe-Ansatz 方法是相当广泛的一种解非线性问题的方案。而量子逆散射方法是一种低维完全可积场论的解法，它适用的面显然比 Bethe-Ansatz 方法要窄，也就是说用 Bethe-Ansatz 解决的问题不一定总可以用量子逆散射方法解决，因为后者要求更严格的条件。事实上 Bethe-Ansatz 的本质是把通常微分方程本征值问题转化为代数方程。由于薛定谔方程总是二阶偏微

分方程，求本征值问题归结为微分算符的本征值问题。但是，如果将包含互作用的波函数用恰当函数族展开，将求解微分方程变为确定该展开式系数问题，就变成了代数方程。而代数方程一定有解。从这个意义上说，Bethe-Ansatz 不一定限于一维空间。事实上已有人将这一思想用于处理四维时空中的自对偶杨-米尔斯场方程解的问题[16]。

附录 2A NSE 与含 δ 函数作用势的多体问题的关系

按照 H. B. Thacker 的方法[9]证明一维 δ 函数作用势的多体问题等价于 NSE 场论模型。NSE 的哈密顿量为

$$H = \int \mathrm{d}x(\partial_x \phi^* \partial_x \phi + c\phi^* \phi^* \phi\phi) \qquad (2.\mathrm{A}.1)$$

其中 $\phi(x, t)$ 为非相对论玻色算符，其等时对易关系为：

$$[\phi(x, t), \phi^*(y, t)] = \delta(x - y) \qquad (2.\mathrm{A}.2)$$

不难知道，粒子数 $N = \int \mathrm{d}x\phi^*\phi$ 是守恒的，即

$$[H, N] = 0 \qquad (2.\mathrm{A}.3)$$

以下只标记坐标 x，而不写出时间 t 的依赖关系。(2.A.3)式是容易证明的，只要注意：

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C] \qquad (2.\mathrm{A}.4)$$

以及 $\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\phi^*(x)\partial_y\delta(x-y)\partial_y\phi(y) = \int \mathrm{d}x\phi^*(x)\partial_x^2\phi(x)$ 等关系。

从一般量子场论可知，如果系统的哈密顿量的自由部分为 H_0，而互作用部分为 V，则整个哈密顿量本征态与自由部分本征态间的关系为：

$$|\Psi_i^{(-)}\rangle = |\Phi_i\rangle + \frac{1}{E_i - H_0 + \mathrm{i}\varepsilon}V|\Phi_i\rangle$$

$$+ \left(\frac{1}{E_i - H_0 - \mathrm{i}\varepsilon}V\right)^2 |\Phi_i\rangle + \cdots \qquad (2.\mathrm{A}.5)$$

取末态为具有动量 k_1, k_2 的态 $\langle k_1, k_2|$,得

$$\langle k_1, k_2|\Psi_i^{(-)}\rangle = \langle k_1, k_2|(1 + \hat{g} + (\hat{g})^2 + \cdots)|\Phi_i\rangle$$

其中
$$\hat{g} = \frac{1}{E_i - H_0 + \mathrm{i}\varepsilon}V$$

现在计算

$$\hat{g}\ |\Phi_i\rangle = \sum_{p_1, p_2} \frac{1}{E_i - H_0 + \mathrm{i}\varepsilon}|p_1, p_2\rangle\langle p_1, p_2|V|\Phi_i\rangle$$

其中中间态为 H_0 本征态。当初态 $|\Phi_i\rangle$ 为 $|k_1, k_2\rangle$ 时,注意到

$$V = c\int \mathrm{d}x \phi^*(x)\phi^*(x)\phi(x)\phi(x)$$

则

$$\langle p_1, p_2|V|k_1, k_2\rangle = 2\pi \cdot 4c\delta(p_1 + p_2 - k_1 - k_2)$$

于是有 $\left(\text{注意} \sum_p \to \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}p\right)$

$$\langle k_1, k_2|\Psi_i^{(-)}\rangle$$
$$= \Psi_i^{(-)}(k_1, k_2)$$
$$= \Phi_i(k_1, k_2) + \int \frac{\mathrm{d}p_1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}p_2}{2\pi}\frac{1}{(k_1^2 + k_2^2) - (p_1^2 + p_2^2) + \mathrm{i}\varepsilon}2\pi$$
$$\cdot 4c\delta(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \cdot \Phi_i(p_1, p_2) + \cdots$$

完成回路积分,并选上半平面的两个极点,有

$$\int \frac{\mathrm{d}p_1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}p_2}{2\pi}\frac{2\pi\delta(p_1 + p_2 - k_1 - k_2)}{k_1^2 + k_2^2 - p_1^2 - p_2^2 + \mathrm{i}\varepsilon}$$

$$= -\frac{\mathrm{i}}{2}\int\frac{\mathrm{d}p_1}{2\pi\mathrm{i}}\frac{1}{(p_1-k_1-\mathrm{i}\varepsilon)(p_1-k-\mathrm{i}\varepsilon)} = \frac{\mathrm{i}}{2}\frac{1}{k_1-k_2}$$

这是弹性散射的结果。于是得到

$$\Psi_i^{(-)}(k_1, k_2) = (1+2J+2J^2+\cdots)\Phi_i(k_1, k_2)$$

$$J = \frac{\mathrm{i}c}{k_1-k_2},\ 1+2J+2J^2 = \frac{1+J}{1-J}$$

因此有

$$\Psi_i^{(-)}(k_1, k_2) = \frac{k_2-k_1-\mathrm{i}c}{k_2-k_1+\mathrm{i}c}\Phi_i(k_1, k_2) \qquad (2.\mathrm{A}.6)$$

这是两个粒子散射梯形图相加的结果。为了以后方便，使用重新定义的波函数，它与(2. A. 6)只差一因子 $\frac{k_2-k_1+\mathrm{i}c}{k_2-k_1}$，则有两个粒子散射时的本征态：

$$\Phi|(k_1, k_2)\rangle = \left(1+\frac{\mathrm{i}c}{k_2-k_1}\right)|\Phi_i(k_1, k_2)\rangle \qquad (2.\mathrm{A}.7)$$

注意到

$$\Phi_i|(k_1, k_2)\rangle = \int\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1x_1+k_2x_2)}\phi^*(x_1)\phi^*(x_2)|0\rangle \qquad (2.\mathrm{A}.8)$$

并考虑到 $a_k^* = \int\mathrm{d}x\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\phi^*(x)$ 中当 $p_1=k_1$，$p_2=k_2$ 时回路之选择保证 $k_2>k_1(x_2<x_1)$，而对散射态 $p_1=k_2$，$p_2=k_1$ 时则有 $k_2<k_1(x_2>x_1)$，于是相应有 $H=H_0+V$ 的本征态为

$$\Psi^{(-)}|(k_1, k_2)\rangle = \int\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1x_1+k_2x_2)}[\theta(x_1-x_2) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Delta(k_2-k_1)}\theta(x_2-x_1)]\phi^*(x_1)\phi^*(x_2)|0\rangle \qquad (2.\mathrm{A}.9)$$

$$e^{i\Delta(k_2-k_1)} = \frac{k_2 - k_1 + ic}{k_2 - k_1 - ic} \tag{2.A.10}$$

即(2.A.10)式为散射的 S 矩阵。在(2.A.9)中 $\theta(x)$为阶跃函数：

$$\theta = \frac{1}{2}(\varepsilon - 1), \quad \left.\begin{array}{l} \varepsilon(x) = 1, \ x > 0 \\ \varepsilon(x) = -1, \ x < 0 \\ \varepsilon(x) = 0, \ x = 0 \end{array}\right\}$$

于是去掉数量因子,可以引入二体散射时的 H 的本征态为：

$$|\Phi(k_1, k_2)\rangle = \int dx_1 dx_2 \chi(x_1, x_2; k_1, k_2) e^{i(k_1x_1+k_2x_2)} \cdot \phi^*(x_2)\phi^*(x_1)|0\rangle \tag{2.A.11}$$

其中

$$\chi(x_1, x_2; k_1, k_2) = \left[1 - \left(\frac{ic}{k_2 - k_1}\right)\varepsilon(x_1 - x_2)\right] e^{i(k_1x_1+k_2x_2)} \tag{2.A.12}$$

它正是二体散射时的形式。现在将(2.A.1)式作用在(2.A.11)上,注意到对易关系(2.A.2)与 $\phi(x)|0\rangle = 0$，可得：

$$\begin{aligned}
&\int dx \partial_x \phi^* \partial_x \phi |\Phi(k_1, k_2)\rangle \\
&= -2c\int dx_1 dx_2 \delta(x_1 - x_2) \cdot e^{i(k_1x_1+k_2x_2)} \phi^*(x_2)\phi^*(x_1)|0\rangle \\
&\quad + \sum_{i=1}^{2} k_i^2 |\Phi(k_1, k_2)\rangle \\
&= -2c\int dx_1 dx_2 \delta(x_1 - x_2) \chi(x_1, x_2; k_1, k_2) \phi^*(x_2)\phi^*(x_1)|0\rangle \\
&\quad + \sum_{i=1}^{2} k_i^2 |\Phi(k_1, k_2)\rangle
\end{aligned} \tag{2.A.13}$$

$$c\int \mathrm{d}x\phi^*\phi^*\phi\phi|\Phi(k_1,k_2)\rangle$$
$$=2c\int \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\delta(x_1-x_2)\cdot\chi(x_1,x_2;k_1,k_2)\phi^*(x_2)\phi^*(x_1)|0\rangle \tag{2.A.14}$$

在(2. A. 13)式中应用了 $\delta(x)\varepsilon(x)=0$。将(2. A. 13)式与(2. A. 14)式相加,得

$$H|\Phi(k_1,k_2)\rangle=\left(\sum_{i=1}^{2}k_i^2\right)|\Phi(k_1,k_2)\rangle \tag{2.A.15}$$

这是由于恰当形式的 χ 正好使非对角部分互相抵消。以上讨论仅对两个粒子弹性散射(且无反射)而言,对任意数目的粒子,可以作 Bethe-Ansatz:

$$|\Phi(k_1,\cdots,k_N)\rangle=\int\prod_{j=1}^{N}\mathrm{d}x_j\chi(x_1,\cdots,x_N;k_1,\cdots,k_N)$$
$$\cdot\prod_{k=1}^{N}\phi^*(x_k)|0\rangle \tag{2.A.16}$$

$$\chi(x_1,\cdots,x_N;k_1,\cdots,k_N)=\prod_{i<j}\left(1-\frac{\mathrm{i}c\varepsilon(x_i-x_j)}{k_i-k_j}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum_{j=1}^{N}k_jx_j} \tag{2.A.17}$$

将 H 的动能项作用在(2. A. 16)式上得到

$$\int \mathrm{d}x\partial_x\phi^*(x)\partial_x\phi(x)|\Phi(k_1,\cdots,k_N)\rangle$$
$$=-\int\prod_{j=1}^{N}\mathrm{d}x_j\left(\sum_{i=1}^{N}\partial_i\partial_i\chi(x_1,\cdots,x_N;k_1,\cdots,k_N)\right)\prod_{k=1}^{N}\phi^*(x_k)|0\rangle \tag{2.A.18}$$

另一方面,利用

$$\left[\phi(x),\prod_{i=1}^{N}\phi^*(x_i)\right]=\sum_{i=1}^{N}\delta(x-x_i)\prod_{j\neq i}\phi^*(x_j)$$

可计算出

$$c\int \mathrm{d}x\phi^*(x)\phi^*(x)\phi(x)\phi(x)|\Phi(k_1, k_2)\rangle$$

$$= \int \prod_{j=1}^{N} \mathrm{d}x_j \Big(\sum_{i \neq j=1}^{N} 2c\delta(x_i - x_j) \Big) \chi(x_1, \cdots, x_N; k_1, \cdots, k_N)$$

$$\cdot \prod_{k=1}^{N} \phi^*(x_k)|0\rangle \tag{2. A. 19}$$

所以

$$H|\Phi(k_1, \cdots, k_N)\rangle = \int \prod_{j=1}^{N} \mathrm{d}x_j \Big\{ -\sum_{i}^{N} \partial_i \partial_i + 2c \sum_{i \neq j} \delta(x_i - x_j) \Big\}$$

$$\cdot \chi(x_1, \cdots, x_N; k_1, \cdots, k_N) \prod_{k=1}^{N} \phi^*(x_k)|0\rangle \tag{2. A. 20}$$

所以只要 $\chi(x_1, \cdots, x_N; k_1, \cdots, k_N)$满足

$$\Big(-\sum_{i=1}^{N} \partial_i^2 + 2c \sum_{i \neq j} \delta(x_i - x_j) \Big) \chi = E\chi \tag{2. A. 21}$$

则有

$$H|\Phi(k_1, \cdots, k_N)\rangle = E|\Phi(k_1, \cdots, k_N)\rangle \tag{2. A. 22}$$

这就是说，一维量子场论中 NSE 与多体问题(2. A. 21)式是等价的。有了这个基本知识，不难了解，作为二次量子化的逆散射方法所给出的结果即 NSE 与(2. A. 21)式必定是一致的。因为在粒子数守恒时，场论本质上就是多体问题。然而，在一般的量子场论中，粒子数是可以不守恒的，这就大大超越了多体问题的范畴。

附录 2B 荷质量 Thirring 模型的 Bethe-Ansatz

不仅 NSE 场论形式可以作 Bethe-Ansatz，一些旋量场方程也

是用这个方法求解的。现简要介绍 Bethe-Ansatz 解法，与 YBE 求解的有关问题的介绍可参看文献[2，9]。

在坐标和时间皆一维时，该模型的拉氏函数为

$$L = \overline{\psi}\,\mathrm{i}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\,\overline{\psi}\psi - \frac{1}{2}gJ^{\mu}J_{\mu} \tag{2.B.1}$$

其中

$$J^{\mu} = \overline{\psi}\,\gamma^{\mu}\psi\ (\mu = 0, 1),\quad \psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$$

$$\gamma^0 = \sigma_1 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ \gamma^1 = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = (-\mathrm{i})\sigma_2 \tag{2.B.2}$$

度规为 $x^2 = (x_1)^2 - (x_0)^2$，$\gamma^5 = \gamma^0\gamma^1 = \sigma_3 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

而 $\psi_i(x)$满足反对易关系

$$\{\psi_i(x, t), \psi_j^+(y, t)\} = \delta_{ij}\delta(x - y) \tag{2.B.3}$$

相应的哈密顿量为

$$\begin{aligned} H &= \int \mathrm{d}x\,\mathscr{H}(x) \\ &= \int \mathrm{d}x\Big[(-i)\Big(\psi_1^+\frac{\partial\psi_1}{\partial x} - \psi_2^+\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\Big) \\ &\qquad + m_0(\psi_1^+\psi_2 + \psi_2^+\psi_1) + 2g\psi_1^+\psi_2^+\psi_2\psi_1\Big] \\ &= H_0 + H_1 \end{aligned} \tag{2.B.4}$$

$$H_1 = 2g\psi_1^+\psi_2^+\psi_2\psi_1 \tag{2.B.5}$$

为了使用 Bethe-Ansatz，首先可以证明粒子数

$$N = \int \mathrm{d}x(\psi_1^+\psi_1 + \psi_2^+\psi_2) \tag{2.B.6}$$

是守恒的，即

$$[N, H] = 0 \tag{2.B.7}$$

现在第一步要确定 H_0 的本征态。引入 $(i = 1, 2)$

$$\begin{cases} \psi_i^+(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int \mathrm{d}k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} a_i^+(k) \\ \psi_i(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int \mathrm{d}k \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} a_i(k) \end{cases} \tag{2.B.8}$$

将(2.B.8)式代入 H_0,得到

$$H_0 = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}k\, k\{a_1^+(k)a_1(k) - a_2^+(k)a_2(k)\}$$

$$+ \frac{m_0}{2\pi}\int \mathrm{d}k\{a_1^+(k)a_2(k) + a_2^+(k)a_1(k)\} \tag{2.B.9}$$

为将它对角化,作 Bogoliubov 变换,引入

$$\begin{pmatrix} A_1(k) \\ A_2(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \tag{2.B.10}$$

遂得

$$H_0 = \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\{(k\cos 2\theta + m_0\sin 2\theta)(A_1^+A_1 - A_2^+A_2)$$

$$- (k\sin 2\theta - m_0\cos 2\theta)(A_1^+A_2 + A_2^+A_1)\}$$

选择 $\mathrm{ctg}2\theta = \dfrac{k}{m_0}$ 时,非对角项消失,有

$$H_0 = \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\sqrt{k^2 + m_0^2}(A_1^+(k)A_1(k) - A_2^+(k)A_2(k)) \tag{2.B.11}$$

上式用到了 $(k\mathrm{ctg}2\theta + m_0)\dfrac{m_0}{\sqrt{m_0^2 + k^2}} = \sqrt{k^2 + m_0^2}$

显然,$A_1(k)$对应正能态,而 $A_2(k)$对应负能态,可以选“真空”

态为

$$\psi_1(x)|0\rangle = 0, \psi_2(x)|0\rangle = 0$$

但它是非物理态，因为它们表示正能态与负能态都是空的。而物理真空应当把负能态填满。

现在定义

$$k = m_0 \mathrm{sh}\xi, \text{即 } k^0 = m_0 \mathrm{ch}\xi \quad (k^{0^2} - k^2 = m^2 \text{ 且 } \mathrm{ctg}2\theta = \mathrm{sh}\xi) \tag{2.B.12}$$

其中 ξ 为快度(rapidity)，于是有

$$A^+(\xi, x) = \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{ch}\xi}}(\mathrm{e}^{\xi/2}\psi_1^+(x) + \mathrm{e}^{-\xi/2}\psi_2^+(x))$$

即
$$A_1^+(k) = \int \mathrm{d}x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} A^+ = \int \mathrm{d}x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xm_0\mathrm{sh}\alpha} A^+(\alpha, x) \tag{2.B.13}$$

$$A_2^+(k) = \int \mathrm{d}x \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xm_0\mathrm{sh}\alpha} A^+(\mathrm{i}\pi - \alpha, x) \tag{2.B.14}$$

上面已取 $\xi = \alpha$ 为实数，(2.B.14)式是由于 $\cos\theta \to -\sin\theta$ 时，对应 $\xi = \mathrm{i}\pi - \alpha$。这样，正能量谱用沿实 ξ 轴的点表示，而负能谱则用沿 $\mathrm{Im}\xi = \pi$ 的线上的点表示。物理真空表示在复 ξ 平面图上，$\mathrm{Im}\xi = \pi$ 的线上已填满，亦即这条线代表费米海，而 ξ 的实轴则为正能态。这样，应当用 $A^+(\xi, x)$来定义态的产生算符，即 Bethe-Ansatz 态：

$$\begin{aligned}|\Phi(\xi_1, \cdots, \xi_N)\rangle = \int \prod_{j=1}^{N} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}m_0 x_j \mathrm{sh}\xi_j} \mathrm{d}x_j) \\ \cdot \prod_{i<j<N} [1 - \mathrm{i}\lambda(\xi_i - \xi_j)\varepsilon(x_i - x_j)] \\ \cdot \prod_{k=1}^{N} A^+(\xi_k, x_k)|0\rangle\end{aligned} \tag{2.B.15}$$

其中

$$\lambda(\xi) = \frac{1}{2}g\text{th}\left(\frac{1}{2}\xi\right) \qquad (2.\text{B}.16)$$

与 NSE 情况类比，注意方括号内量的意义。在以前讨论的情况中入射与散射振幅间关系为

$$\rho = \underset{(\text{入射})}{\theta(x_1 - x_2)} + \underset{(\text{散射})}{\theta(x_2 - x_1)\text{e}^{\text{i}\Delta}},\ \text{e}^{\text{i}\Delta} = \frac{a - \text{i}b}{a + \text{i}b}$$

由于

$$\theta(x) = \frac{1}{2}(\varepsilon(x) - 1)$$

于是上式变为

$$\rho = \left(\frac{-a}{a + \text{i}b}\right)\left(1 - \text{i}\,\frac{a}{b}\varepsilon(x_1 - x_2)\right) \qquad (2.\text{B}.17)$$

因此与(2. B. 15)形式对比，$\frac{a}{b} = \lambda(\xi)$，于是有

$$\frac{a - \text{i}b}{a + \text{i}b} = \frac{1 - \text{i}\lambda}{1 + \text{i}\lambda} = \text{e}^{\text{i}\Delta}$$

亦即

$$\Delta = -2\text{tg}^{-1}\lambda(\xi)$$

引入

$$\mu = -\text{ctg}^{-1}\frac{g}{2}$$

则有

$$\Delta(\xi) = 2\text{tg}^{-1}\left(\text{ctg}\mu\text{tg}\,\frac{\xi}{2}\right) \qquad (2.\text{B}.18)$$

亦即 $\text{tg}\,\frac{\xi}{2}$决定了弹性散射的相移。

经过相当的计算，可以证明(2. B. 15)是 H 的本征态：

$$H\,|\Phi(\xi_1, \cdots, \xi_N)\rangle = \left(\sum_{i=1}^{N} m_0\text{ch}\xi_i\right)|\Phi(\xi_i, \cdots, \xi_N)\rangle \qquad (2.\text{B}.19)$$

与 NSE 类似，在(2. B. 15)式中，动能项对 ε 函数微商多出来的 δ

函数项与相互作用项作用引起的项正好抵消。用类似 NSE 形式写出，则(2. B. 15)变为：

$$|\Phi(\xi_1, \cdots, \xi_N)\rangle = \int dx_1 \cdots dx_N \chi(x_1, \cdots, x_N; \xi_1, \cdots, \xi_N) \cdot \prod_{j=1}^{N} A^+(\xi_j, x_j)|0\rangle$$

而

$$\chi(x_1, \cdots, x_N; \xi_1, \cdots, \xi_N) = \prod_{i<j\leqslant N}[1 - i\lambda(\xi_i - \xi_j)\varepsilon(x_i - x_j)] \cdot e^{-im_0\sum_{i=1}^{N}x_i \mathrm{sh}\xi_i} \tag{2. B. 20}$$

上式中沿 $\mathrm{Re}\xi$ 轴给出正能量贡献，而沿 $\mathrm{Im}\xi$ 则给出负能量贡献。由于对 ξ 的周期性可以把它们限制在 $-\pi < \mathrm{Im}\xi < \pi$。在这个带中波函数 $\sim e^{-im_0(\mathrm{sh}\xi)x} = e^{-im(\mathrm{Re\,sh}\xi)x}e^{m_0(\mathrm{Im\,sh}\xi)x}$ $(\mathrm{Im}(\mathrm{sh}\xi) > 0)$，当 $x \to \infty$ 时，它指数上升，但在 ξ 平面上在 n 自旋状态，使得总的指数衰减。这时：

$$\xi = \alpha + il(\pi - \mu), \; l = N - (2j - 1), \; j = 1, 2, \cdots \tag{2. B. 21}$$

即有

$$\xi_{j+1} - \xi_j = -2i(\pi - \mu) \tag{2. B. 22}$$

或

$$\xi_j - \xi_l = -2i(j - l)(\pi - \mu)$$

即有
$$\lambda(\xi_{j+1} - \xi_j) = -\frac{1}{2}g\mathrm{tg}(\pi - \mu) = \frac{1}{2}g\mathrm{tg}\mu \tag{2. B. 23}$$

当采取周期性边界条件时：$x = -L$ 与 $x = L$ 函数 $\chi(x_1, \cdots, x_N; \xi_1, \cdots, \xi_N)$ 应相同，取 $x_i < x_j$ $(i < j$ 时)，有：

$$e^{-\frac{i}{2}m_0 L\mathrm{sh}\xi_i}\prod_{i<j}[1 + i\lambda(\xi_i - \xi_j)]$$

$$= e^{\frac{i}{2}m_0 L \mathrm{sh}\xi_i} \prod_{i<j} [1 - i\lambda(\xi_i - \xi_j)] \tag{2.B.24}$$

取自然对数，并注意 $\lambda(\xi) = \frac{g}{2} \frac{\mathrm{sh}\,\frac{\xi}{2}}{\mathrm{ch}\,\frac{\xi}{2}}$，$g = 2i\frac{\cos\mu}{\sin\mu}$ 得

$$-m_0 L \mathrm{sh}\xi_i = -i \sum_{i<j} \ln\left[-\frac{\mathrm{sh}\,\frac{1}{2}(\xi - 2i\mu)}{\mathrm{ch}\,\frac{1}{2}(\xi + 2i\mu)}\right] + 2\pi n_i \tag{2.B.25}$$

引入函数

$$\Delta(\xi) = (-i)\ln\left[\frac{\mathrm{sh}\,\frac{1}{2}(\xi - 2i\mu)}{\mathrm{ch}\,\frac{1}{2}(\xi + 2i\mu)}\right]$$

则有

$$-m_0 L \mathrm{sh}\xi_i = \sum_j{}' \Delta(\xi_i - \xi_j) + 2\pi n_i \tag{2.B.26}$$

其中“′”表示求和中保持 $i \neq j$。它就是与(2.2.35)式相应的决定快度的关系式。

与 NSE 类似，必须考虑到态密度、空穴、激发等效应。将 $\Delta(\xi)$ 对 ξ 微商，并取 $\xi = \alpha$ 为实值，即有密度函数为

$$K(\alpha) = \left.\frac{\partial \Delta(\xi)}{\partial \xi}\right|_{\xi=\alpha} = \frac{\sin 2\mu}{\mathrm{ch}\alpha - \cos 2\mu}$$

对真空态所有 ξ_i 在 $i\pi$ 线上，当 $L \to \infty$ 时，有：$\frac{1}{L}\sum_i \to \int \mathrm{d}K\rho(k)$，$\rho(\xi) = i/(\xi_{i+1} - \xi_i)L$，即有(注意(2.B.22)式保证 K_ρ 为实的)

$$2\pi\rho(\xi) = -m_0 \mathrm{ch}\xi - \int_{-\Lambda+i\pi}^{\Lambda+i\pi} \mathrm{d}\xi' K(\xi - \xi')\rho(\xi') \tag{2.B.27}$$

注意 $\xi = \alpha + \mathrm{i}\pi$，$\alpha$ 为实数，令

$$\rho_1(\alpha) = \rho(\alpha + \mathrm{i}\pi)$$

则有

$$2\pi\rho_1(\alpha) = m_0 \mathrm{ch}\alpha - \int_{-\Lambda}^{+\Lambda} \mathrm{d}\alpha' K(\alpha - \alpha')\rho_1(\alpha') \quad (2.\mathrm{B}.28)$$

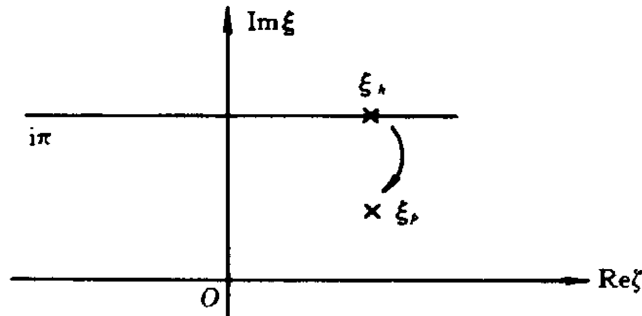


图　2.11

以下做法几乎与 NSE 相同，简要介绍一下。为考虑空穴与粒子激发，当被激发到 ξ_p 时，则在 iπ 上造成一个空穴(如图 2.11 所示)，这时应有

$$\rho = \frac{1}{(\xi_{i+1} - \xi_i)L},\ w = (\xi_i' - \xi_i)L$$

w 表示费米海由于激发而引起的移动，且

$$F(\xi) = w(\xi)\rho(\xi)$$

则与 NSE 类似，有：

$$2\pi F(\xi) + \int_{-\Lambda+\mathrm{i}\pi}^{\Lambda+\mathrm{i}\pi} \mathrm{d}\xi' K(\xi - \xi')F(\xi') = \Delta(\xi - \xi_{\mathrm{p}}) - \Delta(\xi - \xi_{\mathrm{h}})$$

(2.B.29)

(与 NSE 中(2.1.70)式对比)。同理，定义费米能为

$$\varepsilon_0(\pm \Lambda + \mathrm{i}\pi) = 0 \quad (2.\mathrm{B}.30)$$

则可证明激发能为

$$E = m_0\text{ch}\xi_p - m_0\text{ch}\xi_h + m_0\int_{-\Lambda}^{+\Lambda}\text{d}\alpha\text{sh}\alpha F_1(\alpha) \qquad (2.\text{B}.31)$$

其中 $F_1(\alpha) = F_1(\alpha + \text{i}\pi)$。定义 $\varepsilon_0(\xi)$满足积分方程：

$$\varepsilon_0(\xi) = m_0\text{ch}\xi_0 - \mu_0 - \int_{-\Lambda+\text{i}\pi}^{\Lambda+\text{i}\pi}\frac{\text{d}\xi'}{2\pi}K(\xi-\xi')\varepsilon_0(\xi') \qquad (2.\text{B}.32)$$

而 μ_0 的选择使(2.B.30)得以满足，则(2.B.31)式导致

$$E = \varepsilon_0(\xi_p) - \varepsilon_0(\xi_h) \qquad (2.\text{B}.33)$$

可以消去 μ_0，定义 $\varepsilon(\xi) = \varepsilon_0(\xi) + a$，$a$ 为实数，代入(2.B.32)式，利用

$$\int_{-\Lambda+\text{i}\pi}^{\Lambda+\text{i}\pi}K(\xi-\xi')\frac{\text{d}\xi'}{2\pi} \approx c_1 + c_2\text{ch}\xi$$

选择 $a = \mu_0/(1+c_1)$，并定义 $m_1 = m_0 + ac_2$，则得到

$$\varepsilon(\xi) = m_1\text{ch}\xi - \int_{-\Lambda+\text{i}\pi}^{+\Lambda+\text{i}\pi}K(\xi-\xi')\varepsilon(\xi')\frac{\text{d}\xi'}{2\pi} \qquad (2.\text{B}.34)$$

而(2. *B*. 33)式导致

$$E = \varepsilon(\xi_p) - \varepsilon(\xi_h) \qquad (2.\text{B}.35)$$

其中 m_1 为重新标度的裸质量，可以证明它可用裸质量 m_0 与耦合常数 μ 表示：

$$m_1 = m_0/\gamma,\ \gamma = \pi/2\mu \qquad (2.\text{B}.36)$$

现在讨论(2.B.34)的解。它是在 $-\pi < \text{Im}\xi \leqslant \pi$ 之间成立的，并且 $\frac{\pi}{2} < \mu < \pi$，即 $g > 0$，费米-反费米子互相吸引，引起了若干结

合态。定义

$$\varepsilon_1(\alpha) = \varepsilon(\alpha + i\pi) \tag{2.B.37}$$

则有

$$\varepsilon_1(\alpha) = -m_1 \mathrm{ch}\alpha - \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{d\alpha'}{2\pi} K(\alpha - \alpha')\varepsilon_1(\alpha') \tag{2.B.38}$$

而在 $\frac{\pi}{2} < \mu < \pi$ 区间内，$K(\alpha)\Big|_{\alpha\to\pm\infty} \to e^{-\alpha}$，故有

$$\int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{d\alpha}{2\pi} e^{i\alpha y}\varepsilon_1(\alpha) = -m_1 \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{d\alpha}{2\pi} \mathrm{ch}\alpha e^{i\alpha y} - \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{d\alpha'}{2\pi} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{d\alpha}{2\pi} e^{iy\alpha} K(\alpha - \alpha')\varepsilon_1(\alpha') \tag{2.B.39}$$

引入

$$\tilde{\varepsilon}_1(y) = \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{d\alpha}{2\pi} e^{i\alpha y}\varepsilon_1(\alpha)$$

$$\tilde{K}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha}{2\pi} e^{i\alpha y} K(\alpha)$$

$$c(y) = \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{d\alpha}{2\pi} e^{i\alpha y} \mathrm{ch}\alpha$$

则最后一项可以表示为$\tilde{K}(y)\tilde{\varepsilon}_1(y)$，而(2.B.39)式变为：

$$\tilde{\varepsilon}_1(y) = -m_1 c(y) - \tilde{K}(y)\tilde{\varepsilon}_1(y)$$

即

$$\tilde{\varepsilon}_1(y) = -m_1 c(y)/(1 + \tilde{K}(y)) \tag{2.B.40}$$

将 $c(y)$写为

$$c(y) = c_+(y) + c_-(y),\quad c_\pm(y) = \frac{e^{\Lambda(1\pm iy)}}{4\pi(1 \pm iy)}$$

得

$$\varepsilon_1(\alpha) = \left(\frac{-m}{4\pi}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha y}\left(\frac{\mathrm{sh}\pi y}{2\mathrm{sh}(\pi-\mu)\mathrm{ch}\mu y}\right)\left(\frac{\mathrm{e}^{\Lambda(1+\mathrm{i}y)}}{1+\mathrm{i}y}+\frac{\mathrm{e}^{\Lambda(1-\mathrm{i}y)}}{1-\mathrm{i}y}\right)$$

当 $\Lambda\to\infty$ 时，上面积分以 y 平面上接近实轴的极点贡献为主，由于 $\mu>\frac{\pi}{2}$，故这些极点在 $y=\pm\mathrm{i}\gamma$，因而得到 $(\gamma=\pi/2\mu)$

$$\varepsilon_1(\alpha) = -m_{\mathrm{F}}\mathrm{ch}\gamma\alpha,\ m_{\mathrm{F}} = \frac{m_1\gamma\mathrm{e}^{\Lambda(1-\gamma)}}{\pi(\gamma-1)}+g\pi\gamma \qquad (2.\mathrm{B}.41)$$

这样，$K(\alpha-\alpha')$ 的积分项的贡献只是修正了质量，即 $m_1\to m_{\mathrm{F}}$。这个过程类似于量子电动力学中正、负电子对对于质量的修正。利用沿 $\mathrm{i}\pi$ 直线上的解产生在 $\pm\pi$ 间垂直于 ξ 虚轴的带中任意直线上的解。要求 $\Lambda\to\infty$ 时，m_{F} 为有限，则要求 $m_1\to 0$，于是有

$$\varepsilon(\xi) = m_{\mathrm{F}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\alpha'}{2\pi}K(\xi-\alpha'-\mathrm{i}\pi)\mathrm{ch}\gamma\alpha' \qquad (2.\mathrm{B}.42)$$

但这时核函数 K 不能简单地把 $\alpha\to\xi$ 得到，而需要正确选择支点，引入：

$$K_{\mathrm{c}}(\xi) = \frac{\sin 2\mu}{\mathrm{ch}\xi-\cos 2\mu} \qquad (2.\mathrm{B}.43)$$

考虑到在 $|\mathrm{Im}\xi\rangle>2(\pi-\mu)$ 时，要求出现 δ 函数项，令 $\xi=\alpha+\mathrm{i}\sigma$，则

$$K(\alpha+\mathrm{i}\sigma) = \begin{cases} K_{\mathrm{c}}(\alpha+\mathrm{i}\sigma), & |\sigma|<2(\pi-\mu) \\ K_{\mathrm{c}}(a+\mathrm{i}\sigma)-2\pi\delta(\alpha), & |\sigma|>(2\pi-\mu) \end{cases}$$

成立

$$\varepsilon(\alpha+\mathrm{i}\lambda)-\varepsilon(\alpha+\mathrm{i}\pi) = m_{\mathrm{F}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\alpha'}{2\pi}K_{\mathrm{c}}[\alpha-\alpha'+\mathrm{i}(\pi-\lambda)]\mathrm{ch}\gamma\alpha'$$

$$(2.\mathrm{B}.44)$$

上述解析性质可从 $\Delta(\xi)$这个二体相移的解析性质读出，见图 2.12 所示的割线位置。

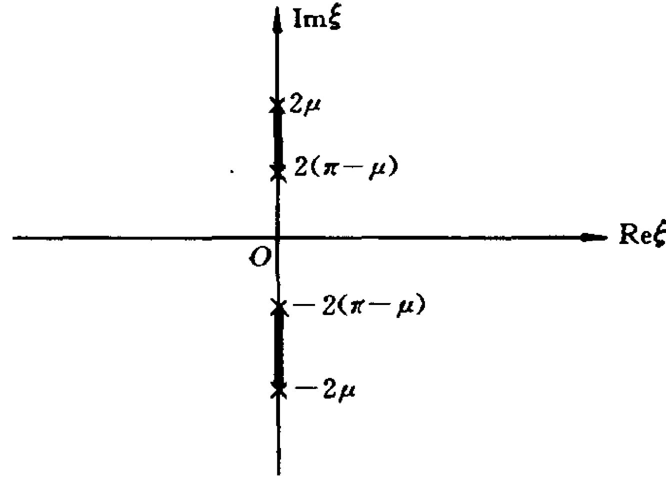


图　2.12

(2.B.44)式左端

$$\varepsilon_{\mathrm{B}}(\alpha + \mathrm{i}\lambda) = \varepsilon(\alpha + \mathrm{i}\lambda) - \varepsilon(\alpha + \mathrm{i}\pi)$$

可视为一个基本玻色子的能量，而(2.B.44)式的右端等于 $I_+ + I_-$，可表达如下：

$$I_{\pm} = \frac{1}{2} m_{\mathrm{F}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\alpha'}{2\pi} \frac{(\sin 2\mu)\mathrm{e}^{\pm\gamma\alpha'}}{\mathrm{ch}[\alpha - \alpha' - \mathrm{i}(\pi - \lambda)] - \cos 2\mu}$$

它在 $\alpha' = \alpha_n^{\pm}$ 处有极点：

$$\alpha_n^{\pm} = \alpha - \mathrm{i}(\pi - \lambda) \pm 2\mathrm{i}\mu + 2\mathrm{i}n\pi,\ |\lambda| > 2\mu - \pi$$

其中对 α_n^+：$n = 0, 1, 2\cdots$；对 α_n^-：$n = 1, 2, \cdots$。容易计算出：

$$I_+ = -\frac{1}{2} m_{\mathrm{F}} \mathrm{e}^{\gamma\alpha} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma(\pi-\lambda)} \{(1 + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\gamma\pi} + \cdots) - (\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\gamma\pi} + \mathrm{e}^{4\mathrm{i}\gamma\pi} + \cdots)\}$$

$$= -\frac{1}{2} m_{\mathrm{F}} \mathrm{e}^{\gamma(\xi - \mathrm{i}\pi)},\ \xi = \alpha + \mathrm{i}\lambda$$

所以

$$I_{+}=-\frac{1}{2}m_{\mathrm{F}}\mathrm{e}^{\gamma(\xi-\mathrm{i}\pi)}(1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\gamma\pi})$$

$$=-m_{\mathrm{F}}\cos\pi\gamma\mathrm{e}^{\gamma\xi}=\frac{1}{2}m_{\mathrm{B}}\mathrm{e}^{\gamma\xi}$$

即

$$m_{\mathrm{B}}=-2m_{\mathrm{F}}\cos\pi\gamma=2m_{\mathrm{F}}\sin\left(\frac{\pi}{2}(2\gamma-1)\right) \quad (2.\mathrm{B}.45)$$

在 $-\pi<\mathrm{Im}\ \mathrm{I}\leqslant\pi$ 时遂得到：

$$\varepsilon(\xi)=\begin{cases}-m_{\mathrm{F}}\mathrm{ch}\gamma(\xi-\mathrm{i}\pi),\ 2\mu-\pi<\mathrm{Im}\xi\leqslant\pi\\-m_{\mathrm{F}}\mathrm{ch}\gamma(\xi+\mathrm{i}\pi),\ -\pi<\mathrm{Im}\xi\leqslant\pi-2\mu\end{cases} \quad (2.\mathrm{B}.46)$$

$$\varepsilon_{\mathrm{B}}(\xi)=\varepsilon(\xi)-\varepsilon(\mathrm{Re}\xi+\mathrm{i}\pi)=m_{\mathrm{B}}\mathrm{ch}\gamma\xi\,|\mathrm{Im}\xi|\leqslant2\mu-\pi \quad (2.\mathrm{B}.47)$$

当所有激发模式处于 $|\mathrm{Im}\xi|<2\mu-\pi$ 时，其能量为

$$E_N=\sum_{l=1}^{N-1}m_{\mathrm{B}}\mathrm{ch}\gamma\xi_l \quad (2.\mathrm{B}.48)$$

其中 $\xi_l=\alpha_s+\mathrm{i}l(\pi-\mu)$，$l=N-(2j-1)$，$(j=0,1,\cdots,N-1)$ 或将对 l 求和化为对 j 求和，有

$$E_N=\sum_{j=1}^{N-1}m_{\mathrm{B}}\mathrm{ch}\{\gamma[\alpha_s+\mathrm{i}(N-(2j+1))(\pi-\mu)]\} \quad (2.\mathrm{B}.49)$$

利用

$$\sum_{k=0}^{N-1}\mathrm{ch}(x+ky)=\mathrm{ch}\left(x+\frac{N-1}{2}y\right)\mathrm{sh}\,\frac{Ny}{2}\,\frac{1}{\mathrm{sh}y12}$$

遂得

$$E_N=m_{\mathrm{B}}\mathrm{ch}(\gamma\alpha_s)\,\frac{\sin[N(\pi-\mu)\gamma]}{\sin[(\pi-\mu)\gamma]}$$

$$= m_{\mathrm{B}}\mathrm{ch}(\gamma\alpha_s)\frac{\sin\frac{N\pi}{2}(2\gamma-1)}{\sin\frac{\pi}{2}(2\gamma-1)} \tag{2.B.50}$$

因为 $\gamma = \pi/2\mu$。最后结果为：

$$E_N = 2m_{\mathrm{F}}\sin\left[\frac{N\pi}{2}(2\gamma-1)\right]\mathrm{ch}(\gamma\alpha_s) \tag{2.B.51}$$

以上的推导并没有特别新的内容，只是要强调：具有分量的相对论一维旋量场非线性方程，有时具有与 NSE 类似的性质。原因是，它们都源于 YB 系统。至于从该系统如何得到具有荷质量 Thirring 模型，因为需要较大篇幅，不再赘述。有兴趣的读者可参考 H. J. de Vega 的推导[5]。

Thirring 模型有很好的物理内容，让我们从(2. B. 4)式出发，为了说明(2. B. 4)式的物理意义，考虑以下形式的哈密顿量

$$\mathscr{H}_0 = \sum_{\substack{\sigma=\pm \\ i\neq j}} t_{ij}c_{i\sigma}^{+}c_{j\sigma} \tag{2.B.52}$$

其中 t_{ij} 表示长程作用

$$t_{ij} = \mathrm{i}t(-1)^{i-j}[d(i-j)]^{-1} \tag{2.B.53}$$

$$d(i-j) = \frac{L}{a\pi}\sin\frac{\pi(i-j)a}{L} \tag{2.B.54}$$

其中 L 为链长，a 为格点的最小间距，t 为作用强度。

令 $a\to 0$ 作连续极限，并对 $\mathscr{H}_0$ 作傅里叶变换，得

$$\mathscr{H}_0 = -t\sum_{k,\sigma=\pm} kc_{k\sigma}^{+}c_{k\sigma},\quad -\frac{\pi(L-1)}{aL}\leqslant k\leqslant\frac{\pi(L-1)}{aL} \tag{2.B.55}$$

引入

$$c_{k\uparrow} = a_k,\quad c_{k\downarrow} = b_k^{+} \tag{2.B.56}$$

则 $\mathscr{H}_0$ 变为

$$\mathscr{H}_0 = -t\sum_{k=-\infty}^{+\infty} k(a_k^+ a_k + b_k b_k^+) \tag{2.B.57}$$

由于 b_k 为费米子，且 $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} k = 0$，故有

$$\mathscr{H}_0 = -t\sum_k k(a_k^+ a_k - b_k^+ b_k) \tag{2.B.58}$$

将 a_k 和 b_k 分别等同于 $\psi_1(x)$ 和 $\psi_2(x)$ 的傅氏变换的系数，故有

$$\begin{cases} \psi_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{L}}\displaystyle\int \mathrm{d}k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} a_k \\ \psi_2(x) = \dfrac{1}{\sqrt{L}}\displaystyle\int \mathrm{d}k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} b_k \end{cases} \tag{2.B.59}$$

则(2.B.4)式中的动能项正是(2.B.58)式的形式，亦即(2.B.52)式。它表明，相对论形式的哈密顿量 H 的动能部分的实质是长程 Hopping 作用[17]。而(2.B.4)式中的非线性相互作用势实质是自旋向上粒子数与自旋向下粒子数的相互作用项，与 Hubbard 模型的相互作用项类似。所以本节实际对角化了 $\mathscr{H}_0 + \mathscr{H}_1$，其中 $\mathscr{H}_0$ 由(2.B.52)式给出，而 $\mathscr{H}_1 = H_1$ 由(2.B.5)式给出。这种长程相互作用与近邻相互作用在本质上有很大不同，例如可能有不同相变行为。

参 考 文 献

1. Faddeev L D. Integrable Models in 1 + 1 Dimensional Quantum Field Theory. North Holland: Les Houches Lectures, 1982; Nankai Lectures on Quantum Inverse Scattering Method. In: Song X C, ed. Lectures on Mathematical Physics, Integrable System. Singapore: World Scientific publ Co Ltd, 1987
2. Kulish P P, Sklyanin E K. Quantum Spectral Transform Method Recent Developments. In: Hietarinta J, Montonen C, eds. Lecture Notes in Physics (Vol. 151). Berlin: Springer-Verlag, 1982. 61
3. Korpin V E, Bogoliubov N M, Iztrgin A G. Quantum Inverse Scattering Method

and Correlation Function. London: Combridge University Press, 1993

4. Jimbo M, ed. Yang-Baxter Equation in Integrable System. Singapore: World Scientific Publ Co Ltd, 1990
5. de Vega H J. Int J Mod Phys, 1989, A4 : 237; 1990, A5 : 1611
6. Gaudin M. La Function d'Onde de Bethe. Paris: Masson, 1983(俄译本: Kulish P P; Sklyanin E K 译. Moskov: MIR, 1987)
7. Yang C N. Phys Rev Lett, 1967, 19 :1312; Phys Rev, 1968, 168 :1920; Selected Papers 1945—1980 With Commentary. New York: Freeman and Co, 1983
8. Takhtajan L A. Introduction to Quantum Group and Integrable Massive Models of Quantum Field Theory. In: Ge M L, Zhao B H, eds: Nankai Lecture on Mathematical Physics. Singapore: World Scientific publ Co Ltd, 1989
9. Thacker H B. Rev Mod Phys, 1981,53 : 253
10. Lieb E H, Mattis D S, eds. Mathematical Physics in One Dimension. New York: Academic Press, 1966
11. Sutherland B. Lecture Notes in Physics (Vol. 242). In: Shastry B S, ed. Berlin: Springer-Verlag, 1985
12. Mattis D S, ed. The Many-Body Problem. Singapore: World Scientific publ Co Ltd, 1992

    Shastry B R etal, eds. Exactly Soluble Problems in Condensed Matter and Relativistic Field Theory. Berlin: Springer-Verlag, 1985
13. Baxter R J. Exactly Solved Models in Statistical Mechanics. London: Acadimic Press, 1982
14. 伍法岳,杨展如. 物理学进展,1981,1 : 100

    蒲富恪. 链模型的 Bethe-Ansatz 讲座;赵保恒. 1 + 1 维量子可积模型讲座;闫沐霖. 二维格点统计力学与自旋链模型讲座. 天津:南开大学数学研究所理论物理研究室工作会议,1987

    Wu F Y. Rev Mod Phys, 1982,54 : 235
15. Jimbo M. Quantum Group and Quantum Integrable Systems. In: Ge M L, ed. Nankai Lectures on Mathematical Physics. Singapore: World Scientific publ Co Ltd. 1991
16. Bardeen W A. Self-Dual Yang-Mills Theory, Integrable and Multipartiton Amplitude. Prog Theor Phys (Supplement), 1996,123 : 1
17. Göhmann F, Inozemtesv V. Phys Lett, 1996, A214 : 161

第 三 章

量子杨-巴克斯特方程(QYBE)

上一章通过 NSE 及其他模型简要地介绍了 QYBE 或简称 YBE的起源。自从这些概念出现以后,尤其是 Y_{ij}^{ab}算符(满足关系式(2.2.58)~(2.2.60))表现为置换算子 P 的一种变形形式(2.2.57)式,并且不只是对玻色子系统为正确的这个特点得到了极大的发展。由于粒子数守恒时,量子场论与多体问题在一定意义上是等价的,因而从低维量子场论的角度去理解 YBE 是件很自然的事。从(2.2.57)式所示的有关散射矩阵的角度,更容易想到用场论描述它,是不难做到的,量子反散射方法正是低维量子场论的描述形式。本章将从 S 矩阵的角度介绍 YBE 的物理含义。它的解的形式及相关的物理应用则将在以后其他章节中讨论。

§3.1 RTT 关系与 QYBE

第一章讨论了转移矩阵 $T_L(\lambda)$的经典泊松括号。当中 $r(\lambda)$矩阵起了关键的作用,它的地位有些类似于正则泊松括号(1.2.1)式下述的结构常数 c_{ab}^{c}。类似于 c_{ab}^{c}满足 Jacobi 等式,$r(\lambda)$矩阵满足 CYBE[(1.3.5)式]。第一章末也强调了所谓量子化并不像线性理论中利用场函数的傅氏展开,对其展开式系数进行量子化,而是对(1.1.1)式中的辅助矩阵函数 Φ 的渐近行为 $T_L(\lambda)$进行量子化。这种量子化必须与场量的正则量子化相容,其中谱参数 λ 处于动量

的地位,而量子化的散射数据代替了原先线性理论中的 $a^{\pm}_{(k)}$ 的地位。在第二章中通过一些具体例子,已经看到了这种量子化的一些特点。现在从一维量子场论的普遍角度再来研究这个问题。

前面已讨论过一维非线性场论的正则形式,它的特点是场函数含于(1.1.1)式中的 $V(x, t; \lambda)$ 之中,可记为 $V(A(x), \lambda)$,场量 $A(x)$ 则满足泊松括号。由 V 构成的经典转移矩阵 $T_L(\lambda)$ 有一个重要性质:在微分方程(1.1.1)的形式解中,在指数积分内的 $V(A(x), \lambda)$ 必须按 x 的次序排列,即

$$T_L(A, \lambda) = P\exp\left\{\int_{-L}^{L} V(A(x), \lambda)\,\mathrm{d}x\right\}$$

在场论的 S 矩阵理论中,场函数并不总是在所有区域中作用在波矢态上,而是短时间"接入"的。例如 $V(A(x)) = V(A^{(1)}(x))$,当 $x \leqslant y_1$,

$$V(A(x)) = 0,\ \text{当}\ y_1 < x < y_2$$

$$V(A(x)) = V(A^{(2)}(x)),\ \text{当}\ x \geqslant y_2$$

则由编序乘积的性质,有:

$$\begin{aligned}
T_L(A, \lambda) &= P\exp\left\{\int_{y_2}^{L} V(A^{(2)}(x))\,\mathrm{d}x + \int_{-L}^{y_1} V(A^{(1)}(x))\,\mathrm{d}x\right\} \\
&= P\exp\left\{\int_{y_2}^{L} V(A^{(2)}(x))\,\mathrm{d}x\right\} \\
&\quad \cdot P\exp\left\{\int_{-L}^{y_1} V(A^{(1)}(x))\,\mathrm{d}x\right\} \\
&= T_L(A^{(2)}, \lambda) \cdot T_L(A^{(1)}, \lambda) \qquad (3.1.1)
\end{aligned}$$

以下略去下标 L,其矩阵元形式为:

$$T_{ab}(A, \lambda) = T_{ac}(A^{(1)}, \lambda) T_{cb}(A^{(2)}, \lambda) \qquad (3.1.2)$$

其中指标 c 相重代表求和。它表明转移矩阵 $T(A, \lambda)$ 作为场量 A

的泛函具有"因式化"的性质。在(3.1.2)式中，辅助空间的矩阵元 T_{ab} 是量子力学算符，作用于 Hilbert 空间。描述单粒子态可使用 $|\theta, j\rangle$，其中 θ 为快度(rapidity)，j 代表粒子内部自由度。由于粒子是自由态，它的能量与动量满足

$$\varepsilon = m\mathrm{ch}\theta, \quad p = m\mathrm{sh}\theta \quad (\varepsilon^2 - p^2 = m^2)$$

内部量子数 j 可以是自旋或其他分立变量。将 $T_{ab}(\lambda)$ 作用在 k 个粒子的渐近态时，它可以分解为 k 个单粒子态的连乘形式：

$$|\theta_1 j_1, \cdots, \theta_k j_k\rangle = \prod_{i=1}^{k} |\theta_i j_i\rangle$$

我们知道粒子的渐近态有 in 态和 out 态[1,2]，故[3]

$$\begin{aligned} &T_{ab}|\theta_1 j_1, \theta_2 j_2, \cdots, \theta_k j_k\rangle_{\mathrm{out}} \\ &= \sum_{a_1, \cdots, a_{k-1}} T_{aa_1}|\theta_1 j_1\rangle T_{a_1 a_2}|\theta_2 j_2\rangle \cdots T_{a_{k-1} b}|\theta_k j_k\rangle \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

其中$|\quad\rangle_{\mathrm{out}}$为通常量子场论中的"出"态(可参阅文献[1,2])，并且次序按 $\theta_i < \theta_j (i > j)$ 排列。对于态$|\quad\rangle_{\mathrm{in}}$需要把因式化的算符指标颠倒：

$$\begin{aligned} &T_{ab}|\theta_1 j_1, \theta_2 j_2, \cdots \theta_k j_k\rangle_{\mathrm{in}} \\ &= \sum_{a_1, \cdots, a_{k-1}} T_{a_1 b}|\theta_1 j_1\rangle T_{a_2 a_1}|\theta_2 j_2\rangle \cdots T_{a\, a_{k-1}}|\theta_k j_k\rangle \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

考虑单粒子渐近态时，动量算符 P 与 T_{ab} 对易，而 $|\theta j\rangle$ 是动量算符的本征态，即：

$$P|\theta j\rangle = \theta|\theta j\rangle,$$ 即有

$$\langle\theta j|[P, T_{ab}]|\theta' j'\rangle = (\theta - \theta')\langle\theta j|T_{ab}|\theta' j'\rangle = 0$$

由于 $x\delta(x) = 0$，故下式成立：

$$\langle\theta j|T_{ab}|\theta' j'\rangle = \delta(\theta - \theta')T_{aj,bj'} \tag{3.1.5}$$

按量子场论,熟知

$$|\text{in}\rangle = S|\text{out}\rangle \tag{3.1.6}$$

其中 S 表示 S 矩阵,故有:

$$\begin{aligned}&{}_{\text{out}}\langle\theta_1 j_1,\ \theta_2 j_2|\sigma_1 k_1,\ \sigma_2 k_2\rangle_{\text{in}}\\&=\delta(\theta_1-\sigma_1)\delta(\theta_2-\sigma_2)S(\theta_2-\theta_1)\pm(\theta_1\leftrightarrow\theta_2,\ j_1\leftrightarrow j_2)\end{aligned} \tag{3.1.7}$$

其中"+"号对应于玻色子情况;而"-"号对应于费米子情形。为简单起见,以下只考虑+号。在下列矩阵元中,插入完备中间态

$$\sum_{k_1,k_2}\int \mathrm{d}\sigma_1\,\mathrm{d}\sigma_2\,|\sigma_1 k_1,\ \sigma_2 k_2\rangle_{\text{in}\ \text{in}}\langle\sigma_1 k_1,\ \sigma_2 k_2| = 1 \tag{3.1.8}$$

则有[3]

$$\begin{aligned}&{}_{\text{out}}\langle\theta'_1 j_1,\ \theta'_2 j_2|T_{ab}|\theta_1 i_1,\ \theta_2 i_2\rangle_{\text{in}}\\&=\sum_{k_1,k_2}\int \mathrm{d}\sigma_1\mathrm{d}\sigma_2\ {}_{\text{out}}\langle\theta'_1 j_1,\ \theta'_2 j_2|\sigma_1 k_1,\ \sigma_2 k_2\rangle_{\text{in}}\\&\quad\cdot{}_{\text{in}}\langle\sigma_2 k_2|T_{ac}|\theta_2 i_2\rangle_{\text{in}\ \text{in}}\langle\sigma_1 k_1|T_{cb}|\theta_1 i_1\rangle_{\text{in}}\\&=\sum_{k_1,k_2}{}_{\text{out}}\langle\theta'_1 j_1,\ \theta'_2 j_2|\theta_1 k_1,\ \theta_2 k_2\rangle_{\text{in}}(T_{ac}(\theta_2))_{k_2 i_2}(T_{cb}(\theta))_{k_1 i_1}\\&=\sum_{k_1,k_2}\{\delta(\theta'_1-\theta_1)\delta(\theta'_2-\theta_2)S_{j_1 j_2 k_1 k_2}(\theta_2-\theta_1)\\&\quad+(\theta'_1\leftrightarrow\theta'_2,\ j_1\leftrightarrow j_2)\}(T_{ac}(\theta_2))_{k_2 i_2}(T_{cb}(\theta_1))_{k_1 i_1}\end{aligned} \tag{3.1.9}$$

另一方面,如果插入

$$\sum_{k_1,k_2}\int \mathrm{d}\sigma_1\mathrm{d}\sigma_2|\sigma_1 k_1,\ \sigma_2 k_2\rangle_{\text{out}\ \text{out}}\langle\sigma_1 k_1,\ \sigma_2 k_2| = 1$$

则有

$${}_{\text{out}}\langle\theta'_1 j_1,\ \theta'_2 j_2|T_{ab}|\theta_1 i_1,\ \theta_2 i_2\rangle_{\text{in}}$$

$$= \sum_{k_1, k_2} \int d\sigma_1 d\sigma_2 \, {}_{\text{out}}\langle \theta'_2 j_2 | T_{cb} | \sigma_2 k_2 \rangle_{\text{out}} \, {}_{\text{out}}\langle \theta'_1 j_1 | T_{ac} | \sigma_1 k_1 \rangle_{\text{out}}$$

$$\cdot \, {}_{\text{out}}\langle \sigma_1 k_1, \sigma_2 k_2 | \theta_1 i_1, \theta_2 i_2 \rangle_{\text{in}}$$

$$= \sum_{k_1, k_2} (T_{cb}(\theta'_2))_{j_2 k_2} (T_{ac}(\theta'_1))_{j_1 k_1} \{\delta(\theta'_1 - \theta_1)\delta(\theta'_2 - \theta_2)$$

$$\cdot S_{k_1 k_2, i_1 i_2}(\theta_2 - \theta_1) + (\theta'_1 \leftrightarrow \theta'_2, k_1 \leftrightarrow k_2)\} \tag{3.1.10}$$

由(3.1.9)式与(3.1.10)式推出：

$$\sum_{k_1, k_2} S_{j_1 j_2, k_1 k_2}(\theta_2 - \theta_1)(T_{ac}(\theta_2))_{k_2 i_2}(T_{cb}(\theta_1))_{k_1 i_1}$$

$$= \sum_{k_1, k_2} (T_{ac}(\theta_1))_{j_1 k_1}(T_{cb}(\theta_2))_{j_2 k_2} S_{k_1 k_2, i_1 i_2}(\theta_2 - \theta_1) \tag{3.1.11}$$

引入记号：

$$S_{j_1 j_2, k_1 k_2}(\theta) = R_{j_2 j_1, k_2 k_1}(\theta) \tag{3.1.12}$$

注意在相当宽的一类模型中 $S_{j_1 j_2, k_1 k_2} = S_{j_2 j_1, k_2 k_1}$，则(3.1.11)式可写为(对 k_1，k_2，c 相重指标求和)：

$$R_{j_2 j_1, k_2 k_1}(\theta_2 - \theta_1)(T_{ac}(\theta_2))_{k_2 i_2}(T_{cb}(\theta_1))_{k_1 i_1}$$

$$= (T_{ac}(\theta_1))_{j_1 k_1}(T_{cb}(\theta_2))_{j_2 k_2} R_{k_2 k_1, i_2 i_1}(\theta_2 - \theta_1) \tag{3.1.13}$$

上式的左端和右端可分别表示为：

$$\{R(\theta_2 - \theta_1)\overset{1}{T}_{ac}(\theta_2)\overset{2}{T}_{cb}(\theta_1)\}_{j_2 j_1, i_2 i_1}$$

$$= \{\overset{2}{T}_{ac}(\theta_1)\overset{1}{T}_{cb}(\theta_2)R(\theta_2 - \theta_1)\}_{j_2 j_1, i_2 i_1}$$

由于辅助空间的指数 i_1，i_2，j_1，j_2 是任意的，上式可以写为简单的矩阵形式：

$$R(\theta_2-\theta_1)\overset{1}{T}_{ac}(\theta_2)\overset{2}{T}_{cb}(\theta_1)=\overset{2}{T}_{ac}(\theta_1)\overset{1}{T}_{cb}(\theta_2)R(\theta_2-\theta_1) \tag{3.1.14}$$

其中对量子空间指标 c 求和。$\overset{1}{T}=T\otimes 1$，$\overset{2}{T}=1\otimes T$ 与前两章定义相同。注意 T_{ab}是量子算符因而次序不能颠倒，而 $\overset{1}{T}$ 中的 1 表示辅助空间标号，即第一辅助空间，而 $\overset{2}{T}$ 中的 2 表示第二个辅助空间。引入算符 P，其作用为：

$$P_{ij,\,mn}=\delta_{in}\delta_{jm} \tag{3.1.15}$$

并令

$$\check{R}(\theta)=PR(\theta) \tag{3.1.16}$$

亦即

$$\check{R}(\theta)_{ij,\,kl}=R(\theta)_{ji,\,kl} \tag{3.1.17}$$

则(3.1.14)式变为：

$$\begin{aligned}&\check{R}(\theta_2-\theta_1)(T_{ac}(\theta_2)\otimes T_{cb}(\theta_1))\\&=(T_{ac}(\theta_1)\otimes T_{cb}(\theta_2))\check{R}(\theta_2-\theta_1)\end{aligned} \tag{3.1.18}$$

很容易用分量形式证明上式。将它写为(对重复指标理解为求和)：

$$\begin{aligned}&\check{R}_{j_1j_2,\,k_2k_1}(\theta_2-\theta_1)(T_{ac}(\theta_2)\otimes T_{cb}(\theta_1))_{k_2k_1,\,i_2i_1}\\&=(T_{ac}(\theta_1)\otimes T_{cb}(\theta_2))_{j_2j_1,\,k_2k_1}\check{R}_{k_2k_1,\,i_2i_1}(\theta_2-\theta_1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\check{R}_{j_1j_2,\,k_2k_1}(\theta_2-\theta_1)(T_{ac}(\theta_2))_{k_2i_2}(T_{cb}(\theta_1))_{k_1i_1}\\&=(T_{ac}(\theta_1))_{j_1k_1}(T_{cb}(\theta_2))_{j_2k_2}\check{R}_{k_1k_2,\,i_2i_1}(\theta_2-\theta_1)\end{aligned}$$

与(3.1.13)式相比较，可知$\check{R}$与 R 之间的关系由(3.1.17)式给出。

由于 a 与 b 为任意量子空间矩阵元指标，(3.1.14)式与(3.1.18)式中 a，b，c 可取值 1，2，…，M(M 可为任意大)，而 i，j，k，l 则取值在辅助空间，例如对自旋$\frac{1}{2}$辅助空间 i，j，…取 1，2 或＋，－。(3.1.14)式与(3.1.18)式均称为 RTT 关系，仅是两

种不同写法。正如一再强调的，a, b, c, …代表量子空间指标，不要与第二章中用的散射数据 a, b, c, d 相混淆。i, j, …为分立的指标，它称为辅助空间，而 $T(\theta)$ 作为算符形成的 Hilbert 空间称为量子空间，它常常是无限维的。以后要举出例子，用 Z_N 对称性实现时，也可以是 M 维的，M 为任意正整数。由于(3.1.14)式和(3.1.17)式对任意量子空间指标 a, b 都成立，一般为了书写简洁，往往丢掉这些指标标记。这样就把(3.1.14)式与(3.1.17)式写成了第二章中 RTT 关系的形式，但要记住，这时每个 $T(\theta)_{ij}$，即辅助空间的矩阵元仍是量子空间的算符，它们的运算遵从算符的运算规律，包括不对易性。

再强调一下，一般地 $T(\theta)$ 在辅助空间是 $N\times N$ 矩阵，每个矩阵元 $T(\theta)_{ij}(i, j=1, 2, \cdots, N)$ 是量子空间中 $M\times M$ 矩阵表示的算符，M 可以为无穷。而 $R(\theta)$(或 $\check{R}(\theta)$)则为 $N^2\times N^2$ 的 c 数非异矩阵。RTT 关系的意义在于：对给定的某个 c 数 $R(\theta)$ 矩阵，它确定了矩阵元 $T(\theta)_{ij}$ 之间的对易关系。当 $\check{R}=I$ (单位矩阵)或 $R=P$ 时，显然导致 $T(\theta)_{ij}$ 之间完全对易。此外，$R(\theta)$(或 $\check{R}(\theta)$)占据两个辅助空间，如果将两个空间分别标记为 1 与 2，则显示的记法为 $R_{12}(\theta)$，这样就和 $T(\theta)$ 在辅助空间的标记统一起来，从而(3.1.18)式可以更清楚地写成：

$$R_{12}(\theta-\theta')\overset{1}{T}(\theta)\overset{2}{T}(\theta')=\overset{2}{T}(\theta')\overset{1}{T}(\theta)R_{12}(\theta-\theta') \tag{3.1.19}$$

$$\overset{1}{T}(\theta)=T(\theta)\otimes 1,\quad \overset{2}{T}(\theta)=1\otimes T(\theta) \tag{3.1.20}$$

正如第二章所讨论过的，由局域变换关系可以导出 YBE，现在从整体的 RTT 关系，同样可以推出 YBE。因为 YBE 的本质是由于算符存在结合律。考虑由三个辅助空间组成的整体量子转移矩阵 $\overset{m}{T}(\theta)$, $m=1, 2, 3$，算符的结合律意味着

$$(\overset{1}{T}(\theta)\overset{2}{T}(\theta'))\overset{3}{T}(\theta'') = \overset{1}{T}(\theta)(\overset{2}{T}(\theta')\overset{3}{T}(\theta'')) \qquad (3.1.21)$$

亦即不同空间中的 T 的交换方式有两种：一种是先交换 2 和 3，另一种是先交换 1 和 2：

$$(1,2,3) \xrightarrow{2\leftrightarrow 3} (1,3,2) \xrightarrow{1\leftrightarrow 3} (3,1,2) \xrightarrow{1\leftrightarrow 2} (3,2,1)$$

$$(1,2,3) \xrightarrow{1\leftrightarrow 2} (2,1,3) \xrightarrow{1\leftrightarrow 3} (2,3,1) \xrightarrow{2\leftrightarrow 3} (3,2,1)$$

相应的运算分别为

$$R_{12}(\theta-\theta')R_{13}(\theta-\theta'')R_{23}(\theta'-\theta'')\overset{1}{T}(\theta)\overset{2}{T}(\theta')\overset{3}{T}(\theta'')$$

$$= \overset{3}{T}(\theta'')\overset{2}{T}(\theta')\overset{1}{T}(\theta)R_{12}(\theta-\theta')R_{13}(\theta-\theta'')R_{23}(\theta'-\theta'') \qquad (3.1.22)$$

与

$$R_{23}(\theta'-\theta'')R_{13}(\theta-\theta'')R_{12}(\theta-\theta')\overset{1}{T}(\theta)\overset{2}{T}(\theta')\overset{3}{T}(\theta'')$$

$$= \overset{3}{T}(\theta'')\overset{2}{T}(\theta')\overset{1}{T}(\theta)R_{23}(\theta'-\theta'')R_{13}(\theta-\theta'')R_{12}(\theta-\theta') \qquad (3.1.23)$$

类似于第二章中 YBE 的证明，比较(3.1.22)式与(3.1.23)式得到

$$[\{R_{23}(\theta'-\theta'')R_{13}(\theta-\theta'')R_{12}(\theta-\theta')\}^{-1}\{R_{12}(\theta-\theta')$$

$$\cdot R_{13}(\theta-\theta'')R_{23}(\theta'-\theta'')\}, \overset{1}{T}(\theta)\overset{2}{T}(\theta')\overset{3}{T}(\theta'')] = 0$$

由于三个空间中 $T(\theta)$ 是独立的，上面的对易括号中第一项必正比于单位矩阵 $I\otimes I\otimes I$，再注意到它的行列式等于 1，从而导出：

$$R_{12}(u)R_{13}(u+v)R_{23}(v) = R_{23}(v)R_{13}(u+v)R_{12}(u) \qquad (3.1.24)$$

或

$$\check{R}_{12}(u)\ \check{R}_{23}(u+v)\ \check{R}_{12}(v) = \check{R}_{23}(v)\ \check{R}_{12}(u+v)\ \check{R}_{23}(u) \tag{3.1.25}$$

其中 $u=\theta-\theta'$，$v=\theta'-\theta''$。显然，如果 $T(\theta)$ 不满足结合律，那么从 RTT 关系就得不到(3.1.24)式。为了统一起见，代替 θ，我们将使用谱参数 u 或 $x=e^u$（有时用 e^{iu}）。(3.1.24)式或(3.1.25)式就是量子的 YBE，或简称 YBE。为了方便读者查阅文献时对各种常用的 $\check{R}$（或 R）的矩阵元指标记法不致产生误解，我们简要地介绍它的指标记法。

将 $\check{R}(u)$ 的矩阵元记为

$$\check{R}(u)_{ij}^{kl} \equiv \check{R}(u)_{ij,\,kl} \tag{3.1.26}$$

相应地

$$R(u)_{ij}^{kl} = \check{R}(u)_{ji}^{kl} \tag{3.1.27}$$

从而(3.1.25)式与(3.1.24)式的矩阵元形式分别为：

$$\begin{aligned}&\check{R}(u)_{i_1j_1}^{i'j'}\ \check{R}(u+v)_{j'k_1}^{k'k_2}\ \check{R}(v)_{i'k'}^{i_2j_2}\\&\quad=\check{R}(v)_{j_1k_1}^{j'k'}\ \check{R}(u+v)_{i_1j'}^{i_2i'}\ \check{R}(u)_{i'k'}^{j_2k_2}\end{aligned} \tag{3.1.28}$$

$$\begin{aligned}&R(u)_{j_1i_1}^{i'j'}R(u+v)_{k_1j'}^{k'k_2}R(v)_{k'i'}^{i_2j_2}\\&\quad=R(v)_{k_1j_1}^{j'k'}R(u+v)_{j'i_1}^{i_2i'}R(u)_{k'i'}^{j_2k_2}\end{aligned} \tag{3.1.29}$$

上两式中，相重指标代表求和。它们可用图来表示，例如 $\check{R}(u)$ 矩阵可以由图 3.1 表出：这种表示的意思是，两个粒子在散射前分别处于固定的观察空间 1 和 2，如虚线所示。分立的自由度为 i，j，散射以交叉表示，从图上看 $\check{R}$ 对应上交叉(over crossing)，而 $\check{R}^{-1}$ 对应下交叉(under crossing)。散射后，在空间 1 和 2 的粒子分别具有内部自由度 k 和 l。要强调，这里“空间”是指观察者的空间，

(3.1.28)式的图示为图 3.2,故 YBE 反映的是上面三条线中若任一条平行移动,则保持不变。每个交叉点代表一次碰撞,角度关系代表动量守恒。

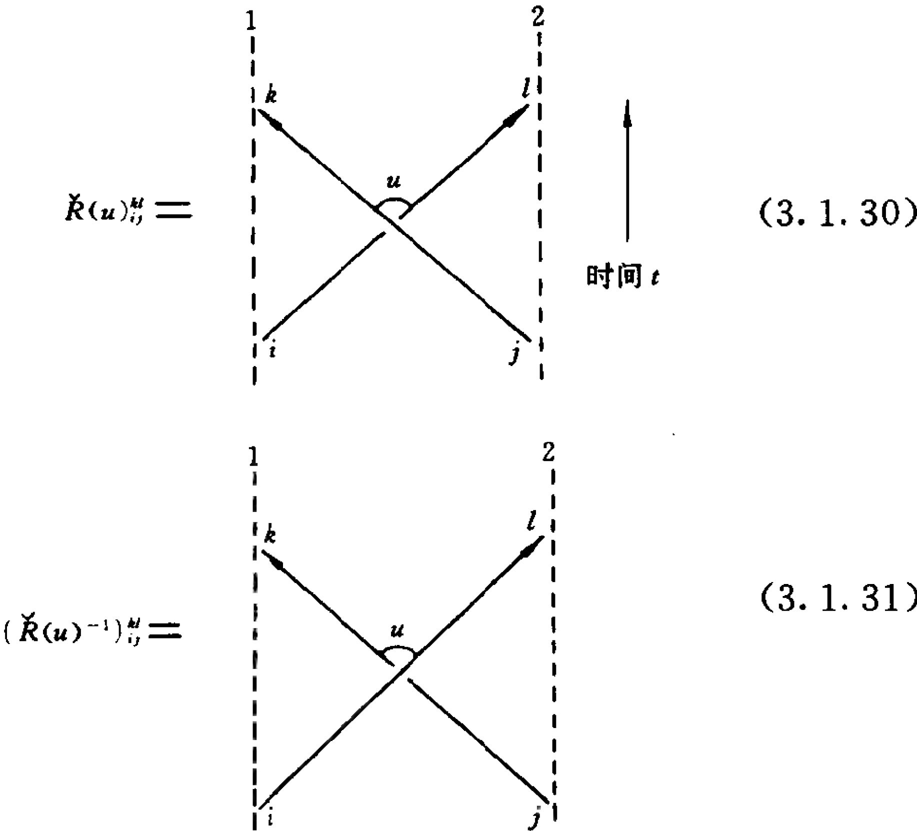


图　3. 1

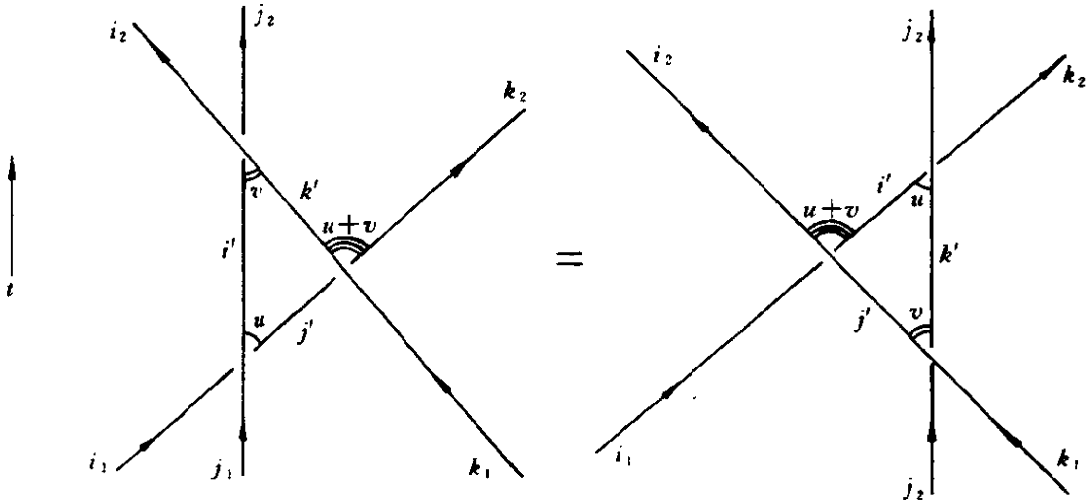


图　3. 2

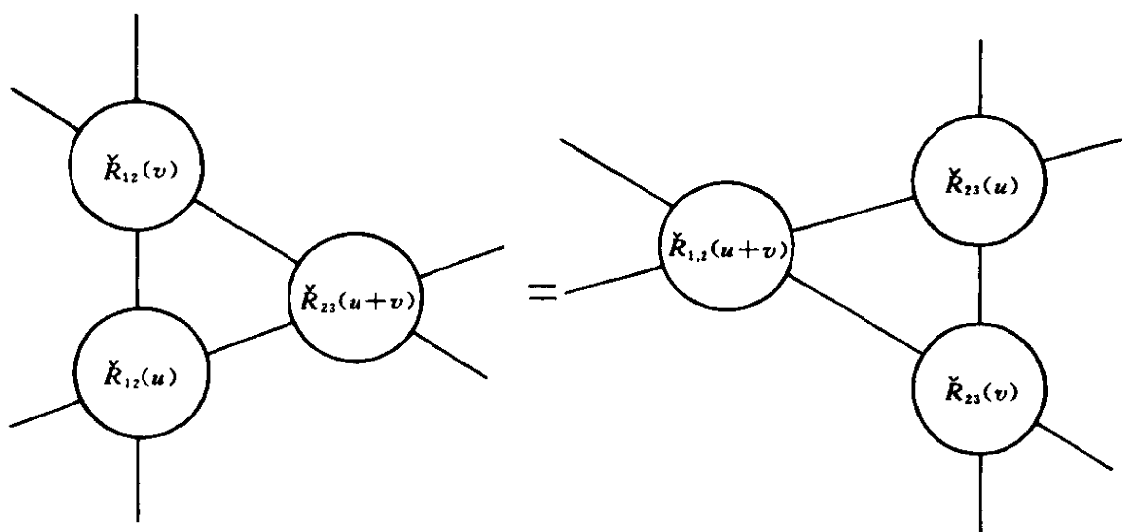


图 3.3

图 3.2 指明,从观察者而言,i_1i_2 为空间 1,j_1j_2 为空间 2,k_1k_2 为空间 3。三进三出的 S 矩阵满足因式化条件,如果它能分解为三个两-两粒子散射的 S 矩阵的积,那么必须满足以下条件:碰撞首先发生在 1,2 空间,再发生于 2,3 空间,最后在 1,2 空间,应当等于首先在 2,3 空间发生,再于 1,2 空间发生,最后发生在 2,3 空间。有关 YBE 的早期论文汇集可参阅文献[4]。

(3.1.29)式中 R_{12},R_{13},R_{23}指明的是粒子自身的空间,就是图 3.1 中直线自身的标号,沿矢号读出。S 矩阵因式化有非常简单的物理说明。由于动量是一维的,波函数 $\psi_i(\theta)$沿快度排列,内部分立自由度为 i,两个渐近自由态粒子波函数为 $\psi_i(\theta)\psi_j(\theta')$,那么弹性散射后应当交换动量,而内部自由度应为各种取值的线性组合,故有[5]

$$\psi_i(\theta)\psi_j(\theta') = R_{ij}^{kl}(\theta-\theta')\psi_k(\theta')\psi_l(\theta) \qquad (3.1.32)$$

因为散射前后渐近态之间的差别就以 R 矩阵表示,它依赖于 $(\theta-\theta')$ 表明了洛伦兹不变性(θ 为快度,非相对论时即为速度)。由于三个 ψ 算符满足结合律

$$\psi_{i_1}(\theta)\left(\psi_{i_2}(\theta')\psi_{i_3}(\theta'')\right)=\left(\psi_{i_1}(\theta)\psi_{i_2}(\theta')\right)\psi_{i_3}(\theta'') \qquad (3.1.33)$$

则导致(3.1.29)式。注意，这里讨论的 R 矩阵正是粒子散射后没有反射行为的 S 矩阵，当存在反射时要进行附加的考虑[6]。

R 矩阵与 $\check{R}$ 矩阵的另一重要性质是它们的幺正性关系：

$$(\check{R}(u))^{-1}=\check{R}(-u),\ \check{R}(u=0)=I \qquad (3.1.34)$$

$$(R(u))^{-1}=R(-u),\quad ((S(u))^{-1}=S(-u)) \qquad (3.1.35)$$

$$R(u=0)=P$$

其图解为：

(3.1.36)

图 3.4

此外，由于 RTT 关系中 $\check{R}$ 或 R 中仅依赖于 $\overset{1}{T}$ 与 $\overset{2}{T}$ 相应的宗量之差，故 $T(\theta)\rightarrow T(\theta+\xi)$ 时 RTT 关系不变，因此可将 T 矩阵中所依赖的快度作任意平移后，仍满足 RTT 关系。

由(3.1.18)式，$\check{R}(u)$ 为非奇异矩阵 ($u=\theta-\theta'$)，有

$$T(\theta)\otimes T(\theta')=\check{R}(u)^{-1}T(\theta')\otimes T(\theta)\check{R}(u) \qquad (3.1.37)$$

因为在辅助空间中 $\check{R}$ 与 T 皆为有限维矩阵，所以对两个空间取矩阵迹之后，得到：

$$[\mathrm{tr}T(\theta),\mathrm{tr}T(\theta')]=[\tau(\theta),\tau(\theta')]=0 \qquad (3.1.38)$$

其中[，]表示量子对易括号。将 $\tau(\theta)$展开：

$$\tau(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta^{-n} \tau^{(n)} \tag{3.1.39}$$

$\tau(\theta)$或 $\ln\tau(\theta)$称为守恒量的产生函数，得到

$$[\tau^{(n)}, \tau^{(m)}] = 0 \quad (m, n = 1, 2, \cdots) \tag{3.1.40a}$$

即为守恒量族。选取其中一个(或一些量线性组合)为哈密顿量，则构成了守恒量族。在许多模型中，为与经典理论一致，取 $\ln\tau(\theta)$为守恒量的产生函数。至于哪个守恒量是哈密顿量，一般要和具体物理模型或经典理论对比，以更好地确定其物理意义。当然，核心是该哈密顿量可以对角化，有明确的物理内容。

从第二章所给出的例子中可以看出，所有的 R 矩阵，T 矩阵除谱参数 u 外，仍然可以包含一些独立参数，在简单情况下可以是一个，复杂的情况下可以不只一个。这个 YBE 允许的附加参数具有极为重要的意义，它可以和模型的耦合常数有关。它表明整个体系的非线性性质与该参数的存在有密切的关系。设 $R(u, \eta)_{ij}$ $(i, j = 1, 2, 3)$ 为(3.1.29)式的解，现在看 η 很小时 YBE 的极限：

$$R_{ij}(u, \eta) \approx I + \mathrm{i}\eta r_{ij}(u) + o(\eta^2) \quad (ij = 1, 2, 3)$$

将它代入 YBE(3.1.25)，注意$(\mathrm{i}\eta)$一次项消去，只考虑二阶项，即得到：

$$\begin{aligned}[r_{12}(u), r_{13}(u+v)] &+ [r_{12}(u), r_{23}(v)] \\ &+ [r_{13}(u+v), r_{23}(v)] = 0 \end{aligned} \tag{3.1.40b}$$

它正是 CYBE，因此 CYBE 是 YBE 的经典极限。引入一个新的参量

$$q = \mathrm{e}^{\eta} (\text{或}\ q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}) \tag{3.1.41}$$

当 $\eta\to 0$ 或 $q\to 1$ 时，(3.1.25)式回到(3.1.40)式。举例如下：对 NSE其 R 矩阵为

$$R^{NS}(u)=\frac{1}{u}\begin{pmatrix} u-\mathrm{i}c & & & \\ & u & -\mathrm{i}c & \\ & -\mathrm{i}c & u & \\ & & & u-\mathrm{i}c \end{pmatrix}=1-\frac{\mathrm{i}c}{u}P$$

将 $c\to\eta c$ 然后取 $\eta\to 0$，则有

$$R^{NS}(u)\Rightarrow 1+\mathrm{i}\eta r(u),\ r(u)=-\frac{c}{u}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}=-\frac{c}{u}P$$

这个例子表明 R 矩阵还存在着有理极限，不一定都回到经典。再如对 XXZ 模型，可用类似方法取极限，将它的 $R(u,q)$矩阵约化为形如 NSE 的有理解形式。

再看 RTT 当 $q\to 1$ 时的行为，将 $\overset{1}{T}(\lambda,q)$与 $\overset{2}{T}(\lambda,q)$用小量 η 展开 $(q=\mathrm{e}^{\eta})$，则有

$$\overset{1}{T}(\lambda,q)\approx I+\eta\int\mathrm{d}x\overset{1}{L}(x,\lambda)$$

$$\overset{2}{T}(\mu,q)\approx I+\eta\int\mathrm{d}x\overset{2}{L}(x,\mu)$$

则(3.1.14)式变为

$$\{I+\eta r(\lambda-\mu)\}\left\{I+\eta\int\mathrm{d}x\overset{1}{L}(x,\lambda)\right\}\left\{I+\eta\int\mathrm{d}x\overset{2}{L}(x,\mu)\right\}$$

$$=\left\{I+\eta\int\mathrm{d}x\overset{2}{L}(x,\mu)\right\}\left\{I+\eta\int\mathrm{d}x\overset{1}{L}(x,\lambda)\right\}\{I+\mathrm{i}\eta r(\lambda-\mu)\}$$

比较 η^2 系数，遂得：

$$\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y[\overset{1}{L}(x, \lambda), \overset{2}{L}(y, \mu)]$$

$$= (-\mathrm{i})\left[r(\lambda-\mu), \int \mathrm{d}x(\overset{1}{L}(x, \lambda)+\overset{2}{L}(y, \mu))\right]$$

上式右端等于

$$(-\mathrm{i})\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y[r(\lambda-\mu), \overset{1}{L}(x, \lambda)\overset{2}{L}(y, \mu)]\delta(x-y)$$

于是得到：

$$[\overset{1}{L}(x, \lambda), \overset{2}{L}(y, \mu)] = [L(x, \lambda) \underset{,}{\otimes} L(y, \mu)]$$

$$= (-\mathrm{i})[r(\lambda-\mu), L(x, \lambda)\otimes I + I\otimes L(y, \mu)]\delta(x-y)$$

由于量子对易括号向经典泊松括号过渡时有：

$$(-\mathrm{i})[\ ,\ ]\to\{\ ,\ \}$$

于是得到：

$$\{L(x, \lambda) \underset{,}{\otimes} L(y, \mu)]$$

$$= \{r(\lambda-\mu), L(x, \lambda)\otimes I + I\otimes L(y, \mu)\}\delta(x-y)$$

与(1.2.10)式相比较，这里的 $L(x, \lambda)$ 正是 Lax-pair 中的 $V(x, \lambda)$。可以说，RTT 关系是基本泊松括号的量子化形式，而 R 矩阵是经典 r 矩阵的 q 变形，即 R 矩阵处于 q 变形的"结构常数"的地位。要强调的是，R 矩阵是 c 数矩阵，除谱参数外它还依赖于其他参数，最有代表性的是依赖于 q，当 $q\neq 1$ 时，引起了转移矩阵的矩阵元的不对易性。如果希望这些对易关系中包含普朗克常数 $\hbar$，那么应当有 $q=\mathrm{e}^{\hbar}$。

与经典理论平行，用 RTT 关系解问题的步骤[7]如下：

1) 求解 YBE(3.1.24)式或(3.1.25)式。它是一个依赖于谱参数 u 与 q 等参数的 c 数矩阵方程。乍一看，它包含太多的方程。例

如，当 T 为 $N\times N$ 矩阵时，R 有 $N^2\times N^2$ 个未知元。但实际上，由于守恒律等限制，导致许多元素为零。它不但简化了计算，同时，这种解对应着存在某些对称性的有意义的物理模型。

2）给定 YBE 解 $R(u,\ \eta)$，求解 RTT 关系，亦即找到 $T(u)_{ij}$ 的对易关系，并用满足更简单的“基本”对易关系的物理量表示 $T(u)_{ij}$。

3）建立 Fock 空间，对角化 $\mathrm{tr}T(u)$（或 $\ln\mathrm{tr}T(u)$），从而得到谱形式。将哈密顿量作用该空间时，求对易关系，结果除对角部分外还有非对角部分出现，有些模型中可令非对角部分的系数为零，从而使整个非对角部分消失。这时便对谱参数构成条件，它们相应于某些 Bethe-Ansatz 方程。

4）利用 RTT 关系寻找非线性相互作用系统的新型对称性，即量子群（包括 Yangian 与量子代数），以后会着重介绍。

5）将上述结果应用于实际物理问题，特别是有关凝聚态物理过程、高能物理与量子力学等方面。这些方面的研究刚开展不久。

以后将沿上述步骤介绍有关进展，包括作者所属研究组的成果。

最后要强调，上述的 $T(u)$ 是作用在某个量子空间的算符，而 $R(u-v)$ 为 c 数矩阵。如果对量子空间成立

$$R(u-v)\overset{1}{L}(u)\overset{2}{L}(v)=\overset{2}{L}(v)\overset{1}{L}(u)R(u-v)\quad(3.1.42)$$

并且不同量子空间中任意量子算符为玻色型时，有

$$[L_n^{ab}(u),\ L_m^{cd}(v)]=0\ (n\neq m)$$

易证

$$T(u)=L_N(u)L_{N-1}(u)\cdots L_2(u)L_1(u)=\prod_{n=1}^{N}L_n(u)\quad(3.1.43)$$

仍然满足 RTT 关系：

$$R(u-v)\overset{1}{T}(u)\overset{2}{T}(v)=\overset{2}{T}(v)\overset{1}{T}(u)R(u-v)$$

其中 $L_n(u)$ 为作用在第 n 个量子空间的算符，在最简单的情况，这里 n 可以表示一维格点的标号，每个格点处有一个量子空间，它在辅助空间是有限维矩阵。实际计算中，可以将解出的 $L(u)$ 的每个元素均标以 n 下标，再作连乘积即可构成 $T(u)$。同时，由于在 $T(u)$ 中对 u 作平移不变，亦可定义

$$T(u) = \prod_{n=1}^{N} L_n(u - u_n)$$

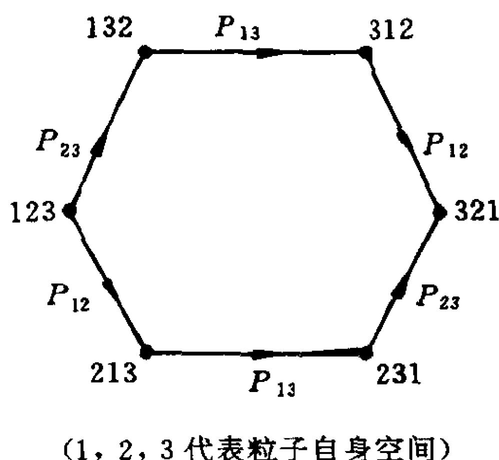
这种转移矩阵称为整体转移矩阵以区别于局域转移矩阵 $L_n(u)$，它包含了 N 个独立参数 u_n。最后，要指出，不是任意 $T(u)$ 的解都可以写成上述连乘积形式，它只是构成 $T(u)$ 的一种方式。一般说由 RTT 关系可以决定出整体形式的 $T(u)$ 矩阵，有时它不能分解为连乘形式，长程相互作用模型与一些陀螺模型是这方面的例子。

在进一步讨论 RTT 关系与 YBE 一系列结论之前，先讨论由 R 矩阵决定哈密顿量的例子，以帮助了解 RTT 关系的基本操作过程。

§3.2 简单的例子

首先要了解，YBE 本质上是一个相当简单的关系，因为置换运算就满足类似的关系：

$$P_{12}P_{13}P_{23} = P_{23}P_{13}P_{12} \tag{3.2.1}$$



(1，2，3 代表粒子自身空间)

图 3.5

它的图解为图 3.5。亦即两种运算方式的结果是一样的。所谓 YBE 只不过是(3.2.1)式的扩展，即把每个置换算符扩展为 $(i, j = 1, 2, 3)$

$$P_{ij} \to R(u_{ij},\ q)_{ij}$$

其中 $u_{ij} = u_i - u_j$ 为谱参数,q 为某复参数,使得 $R(u_{ij},\ q)_{ij}$仍然与(3.2.1)式有相似的关系(3.1.24)式。因此,R 矩阵只不过是 P 的谱参数化且是 q 变形(有时不只 q 一个参数)。不过这样一来有一个重要变化就是 $R^2 \neq I$,同时(3.1.24)式限制了 R 对 u 与 q 的依赖关系,当然,最简单的情况是不依赖于 q 的 P 的变形。

1) YBE 最简单的解

$$\check{R}(u) = uP + \eta \tag{3.2.2}$$

非常容易证明,此时

$$\begin{aligned}&\check{R}_{12}(u)\ \check{R}_{23}(u+v)\ \check{R}_{12}(v)\\&\quad = uv(u+v)P_{12}P_{23}P_{12} + \eta(u+v)\\&\qquad \cdot (uP_{12}P_{23} + vP_{23}P_{12}) + \eta uvP_{12}^2\\&\qquad + \eta^2(u+v)(P_{12}+P_{23}) + \eta^3\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}&\check{R}_{23}(u)\ \check{R}_{12}(u+v)\ \check{R}_{23}(v)\\&\quad = uv(u+v)P_{23}P_{12}P_{23} + \eta(u+v)\\&\qquad \cdot (uP_{12}P_{23} + vP_{23}P_{12}) + \eta uvP_{23}^2\\&\qquad + \eta^2(u+v)(P_{12}+P_{23}) + \eta^3\end{aligned}$$

显然,由于 $P_{ij}^2 = 1$ 及(3.2.1)式,上两式相等。这里 $\check{R}(u)$就是在讨论 δ 函数作用势的量子力学多体问题时已经研究过的 Y 算符(见§2.2),其中谱参数 $u = k_j - k_i$ 为任意两个粒子动量之差的连续化。相应地

$$R(u) = u + \eta P$$

虽然这种形式的 R 矩阵非常简单,但由它可得到 $T(u)$各矩阵元

之间的对易关系，它们是与模型有关的，然而这些对易关系的实现却是多种多样的。例如 NSE，XXX 链模型和 Toda 链模型等等都是由下面(3.2.3)式产生的，只不过用了不同的物理算符去实现这种对易关系而已。换言之，不同的物理实现导致了不同形式的哈密顿量，但它们都是相应于同一个 $\check{R}(u)$（见(3.2.2)式）决定的完全可积量子系统。

2) 考虑置换算符是简单的表示

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \tag{3.2.3}$$

其中未标出的元素为零。为方便，将(3.2.2)式中的 η 取为 1（相当于 $u \to u\eta$），先在某个格点处求解

$$\check{R}(u-v)(L(u)\otimes L(v)) = (L(v)\otimes L(u))\check{R}(u-v) \tag{3.2.4}$$

其中 $L(u)$ 表示格点上的局域转移矩阵。取 $L(u)$ 的一种特殊形式

$$L(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + u^{-1}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.2.5}$$

其中矩阵元 $a_{ij}(i, j=1, 2)$ 为算符，它们的对易关系由(3.2.4)式决定。将(3.2.5)式代入(3.2.4)式，发现 a_{ij} 必须满足

$$[a_{11}, a_{12}] = -a_{12}, \quad [a_{11}, a_{21}] = a_{21}, \quad [a_{12}, a_{21}] = 0 \tag{3.2.6}$$

而满足(3.2.6)式的代数关系正是海森伯代数，可以用下式实现：

$$a_{11} = -p, \quad a_{12} = e^{iq}, \quad a_{21} = e^{-iq} \tag{3.2.7}$$

其中

$$[q, p] = \mathrm{i} \quad (\hbar = 1) \tag{3.2.8}$$

(3.2.5)式～(3.2.8)式对所有格点处都是正确的。在一维 N 个格点上，将位置 n 显示出来，则有

$$L_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + u^{-1}\begin{bmatrix} -p_n & \mathrm{e}^{\mathrm{i}q_n} \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_n} & 0 \end{bmatrix} \tag{3.2.9}$$

相应地

$$[q_n, p_m] = \mathrm{i}\delta_{nm} \tag{3.2.10}$$

由(3.1.43)式得整体转移矩阵：

$$\begin{aligned} T(u) &= \prod_{n=1}^{\widehat{N}} L_n(u) = \begin{bmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{bmatrix} \\ &= \prod_{n=1}^{\widehat{N}} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + u^{-1}\begin{bmatrix} -p_n & \mathrm{e}^{\mathrm{i}q_n} \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_n} & 0 \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

为了与经典极限一致，取 $\ln \mathrm{tr}T(u) = \ln A(u)$ 为守恒量的生成函数，由于

$$A(u) = 1 - u^{-1}A_1 + u^{-2}A_2 + \cdots$$

$$A_1 = \sum_{n=1}^{N} p_n, \quad A_2 = \sum_{n>m}^{N} p_n p_m + \sum_{n=1}^{N} \exp\{\mathrm{i}(q_{n+1} - q_n)\}$$

有：

$$\ln A(u) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j u^{-j} = \ln(1 - u^{-1}A_1 + u^{-2}A_2 + \cdots) \tag{3.2.12}$$

守恒量为

$$c_1 = -A_1, \quad c_2 = 2A_2 - A_1^2$$

注意到：

$$\left(\sum_{n=1}^{N} p_n\right)^2 = 2\sum_{n>m}^{N} p_n p_m + \sum_{n=1}^{N} p_n^2$$

以及周期性边界条件，得到

$$\begin{cases} P = -c_1 = \sum_{n=1}^{N} p_n \\ H = \frac{1}{2}c_2 = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{p_n^2}{2} + \exp\{i(q_{n+1} - q_n)\}\right) \end{cases} \tag{3.2.13}$$

P 与 H 为系统的动量和哈密顿量，这正是 Toda 格子模型，它是一维耦合振子的推广。有些文献中采用另外一种表示形式，将 η 取成 i，得

$$L_n(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + u^{-1}\begin{pmatrix} -p_n & -e^{q_n} \\ e^{q_n} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.2.14}$$

类似计算给出

$$H = \sum_{n=1}^{N}\left\{\frac{p_n^2}{2} + \exp(q_{n+1} - q_n)\right\} \tag{3.2.15}$$

(3.2.9)式的特点是右端首项不是 I 而是 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，这大大简化了(3.2.11)式中有序乘积的计算。一般可取为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$，即：

3) 取

$$L(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} + u^{-1}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \tag{3.2.16}$$

其中 $\mu \neq 0$。由(3.2.4)式给出 $a_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 满足的关系：

$$\begin{cases} [a_1, a_2] = -a_2, \quad [a_1, a_3] = a_3, \quad [a_4, a_1] = 0 \\ [a_4, a_2] = \mu a_2, \quad [a_4, a_3] = -\mu a_3, \quad [a_2, a_3] = a_4 - \mu a_1 \end{cases} \tag{3.2.17}$$

(3.2.17)式可以有多种物理实现。为了举出有物理兴趣的例子，可考虑一种简单实现，它满足(3.2.17)式，其中：

$$a_1 = ip, \quad a_2 = \beta_1 e^{-x}(ip + \gamma)$$

$$a_3 = \beta_2 e^x (ip - \gamma), \quad a_4 = - i\mu p$$

其中 p 与 x 为动量与坐标，γ, β_1, β_2 为常数，且 $\beta_1\beta_2 = -\mu$。将(3.2.16)式视为局域算符，即 $x \to x_n$, $p \to p_n$，有

$$L_n(\mu) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} + u^{-1} \begin{bmatrix} ip_n & e^{-x_n}(ip_n + \gamma) \\ e^{x_n}(ip_n - \gamma) & -i\mu p_n \end{bmatrix} \tag{3.2.18}$$

从而整体 $T(u)$ 可以由 $L_n(u)$ 的有序连乘积给出，但形式很复杂(因为 $\mu \neq 0$)。作为一个演示性练习只考虑 $N = 2$ 的情况，这时有[8]

$$\mathrm{tr}T_2(\mu) = 1 + \mu^2 + u^{-1}A_1 - u^{-2}A_2$$

其中

$$A_1 = i(1 - \mu)(p_1 + p_2)$$

$$A_2 = \{1 + \mu^2 - 2\mu \mathrm{ch}(x_2 - x_1)\} p_1 p_2 + i2\mu\gamma \mathrm{sh}(x_2 - x_1)(p_1 - p_2) - 2\mu\gamma^2 \mathrm{ch}(x_2 - x_1)$$

它们是守恒量，A_1 为动量，$-A_2 \approx H_2$，为哈密顿量。引入

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2),\ y = x_2 - x_1,\ 并取\ \mu = e^\delta$$

$$\begin{aligned} H_2 &= -(4\mu)^{-1}A_2 \\ &= \mathrm{sh}\,\frac{1}{2}(y + \delta)\mathrm{sh}\,\frac{1}{2}(y - \delta)\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \\ &\quad + \gamma \mathrm{sh} y \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}\gamma^2 \mathrm{ch} y \end{aligned} \tag{3.2.19}$$

这是描述两个粒子体系的哈密顿量，y 为相对坐标，x 为质心坐标。由于

$$H_2\psi = E\psi$$

分离变量 $\psi = X(x)Y(y)$ ，则有

$$\frac{\mathrm{d}^2X(x)}{\mathrm{d}x^2} = 4c_0X(x)\ (c_0\ 为任意常数)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2Y(y)}{\mathrm{d}y^2} + \frac{\gamma \mathrm{sh}y}{\mathrm{sh}^2\left(\frac{y+\delta}{2}\right)}\frac{\mathrm{d}Y(y)}{\mathrm{d}y} + \left\{\frac{\frac{\gamma^2}{2}\mathrm{ch}y - E}{\mathrm{sh}\left(\frac{y+\delta}{2}\right)\mathrm{sh}\left(\frac{y-\delta}{2}\right)} - c_0\right\} \cdot Y(y) = 0$$

最简单情况为 $\delta = 0$，即 $\mu = 1\ (A_1 = 0)$：

$$\frac{\mathrm{d}^2Y(y)}{\mathrm{d}y^2} + 2\gamma\frac{\mathrm{ch}\frac{y}{2}}{\mathrm{sh}\frac{y}{2}}\frac{\mathrm{d}Y(y)}{\mathrm{d}y} + \left\{\frac{\gamma^2\mathrm{ch}y}{2\mathrm{sh}^2\frac{y}{2}} - \frac{E}{\mathrm{sh}^2\frac{y}{2}} - c_0\right\}Y(y) = 0 \tag{3.2.20}$$

为看出由 YBE 提供的势的意义，先考虑当 $y \approx 0$ 时的解。此时(3.2.20)式变为：

$$\frac{\mathrm{d}^2Y(y)}{\mathrm{d}y^2} + \frac{4\gamma}{y}\frac{\mathrm{d}Y(y)}{\mathrm{d}y} + \left\{\omega^2 + \frac{2\gamma^2 - 4E}{y^2}\right\}Y(y) = 0 \tag{3.2.21}$$

其中已选 $-\omega^2 = c_0$，它表示质心为平面波运动。令

$$Y(y) = f(y)y^{\left(\frac{1}{2}-2\gamma\right)}$$

则(3.2.21)式变为

$$\frac{\mathrm{d}^2f(y)}{\mathrm{d}y^2} + \frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}f(y)}{\mathrm{d}y} + \left\{\omega_0^2 - \left(\frac{4E_0 + \frac{1}{4} - 2\gamma + 2\gamma^2}{y^2}\right)\right\}f(y) = 0 \tag{3.2.22}$$

令 $$\gamma^2 = 4E + \frac{1}{4} - 2\gamma + 2\gamma^2,\ z = \omega_0 y$$

则(3.2.22)式解为

$$f(z) = J_\gamma(z) \tag{3.2.23}$$

当 $y\sim\infty$时,而(3.2.20)式变为

$$Y'' + 2\gamma Y' + \left(\omega_0^2 + \frac{1}{2}\gamma^2\right)Y = 0 \tag{3.2.24}$$

当$\gamma > 0$时,$Y(y)$具有的力程为$\sim e^{-\gamma y}$,呈现急速衰减。观察 $y\sim 0$ 时的渐近解(3.2.22)式,它表示有类似刚性"球壳"限制的结果,因为现在只依赖于两个粒子的相对坐标,该连线在空间中可随意转动,所以描述的实际上是三维空间内对称的行为。该两粒子系统在互相靠近时表现为无穷高势垒的限制,在$\gamma > 0$且足够大时,随相对距离而迅速衰减,所以它们表现为粒子的禁闭行为。值得指出的是,这里的作用势不是人为唯象引入的,而是从 RTT 关系得到的,这种二体禁闭势又是完全可积的。

§ 3.3 R 矩阵与哈密顿量

一般说,(3.1.13)式中指标$(a, b, \cdots)$可代表量子空间矩阵元的指标,或统计模型中竖直方向键的自旋指标等等;而$(i, j, \cdots)$这些辅助空间指标可能代表顶点模型中水平方向键上的自旋指标等等。为了方便,以下用希腊字母$(\alpha, \beta, \cdots)$代替$(a, b, \cdots)$,表示应作广义的理解。定义

$$R_{j_1 j_2, k_1 k_2} = \check{R}_{j_2 j_1, k_1 k_2} \quad (\check{R} = PR)$$

及

$$(L_{\alpha\beta})_{ij} = \check{R}_{i\alpha}^{\beta j} = R_{\alpha i}^{\beta j} \tag{3.3.1}$$

其中L就是(3.1.13)式中局域化的T,与T的性质相同。则(3.1.13)式可写为(令$u = \theta' - \theta$):

$$\check{R}(u)_{j_2 j_1}^{k_1 k_2}\check{R}(u+v)_{k_2 \alpha}^{\beta i_2}\check{R}(v)_{k_1 \beta}^{\mu i_1} = \check{R}(v)_{j_1 \alpha}^{\beta k_1}\check{R}(u+v)_{j_2 \beta}^{\mu k_2}\check{R}(u)_{k_2 k_1}^{i_1 i_2} \tag{3.3.2}$$

为了与(3.1.28)式比较方便，将重复指标的求和改写指标为：

$$R(u)^{k_2k_1}_{j_1j_2}R(u+v)^{\beta i_1}_{\alpha k_1}R(v)^{\mu i_2}_{\beta k_2}=R(v)^{\beta k_1}_{\alpha j_1}R(u+v)^{\mu k_2}_{\beta j_2}R(u)^{i_2i_1}_{k_1k_2} \tag{3.3.3}$$

为了对称，在(3.3.2)式与(3.3.3)式中可选 $u\to\theta'-\theta$，$u+v\to\theta'$，$v\to\theta$，这只须满足相对关系即可。(3.3.3)式图示为：

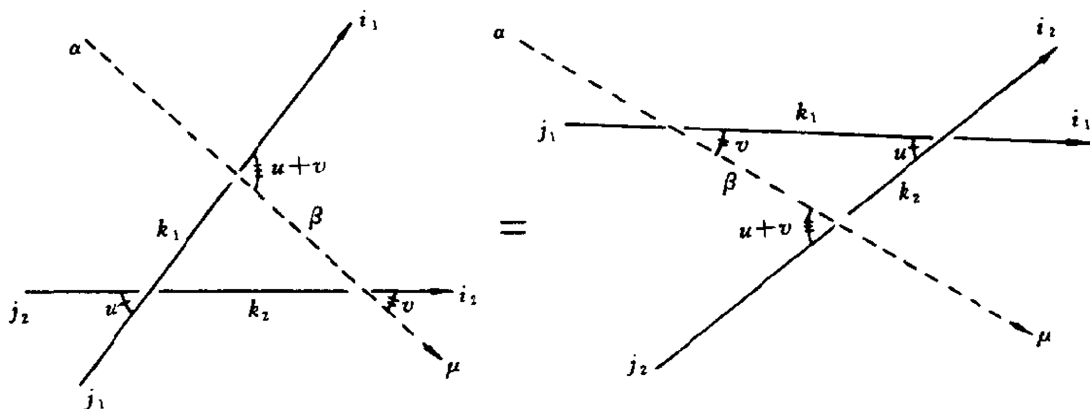


图　3.6

其中

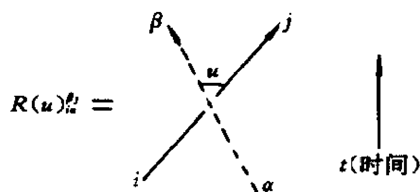


图　3.7

这里，虚线代表希腊字母，实线代表拉丁字母，它们可能代表相同空间，也可能代表不同空间。相应的碰撞仍分别用 $R^{\beta j}_{i\alpha}$(不同空间)与 $R(u)^{kj}_{il}$(同一空间碰撞)两种类型的 R 矩阵表示(例如 i, j 代表自旋 $\frac{1}{2}$，而 α, β 代表 $SU(3)$内空间指标)。$R^{\beta j}_{i\alpha}$是 R^{kj}_{il}的推广，仍满足 YBE。当然，虚线和实线可以作各种理解，例如，可想象实线代表自旋为$\frac{1}{2}$的粒子，而虚线代表自旋为 1 的粒子。当$(\alpha, \beta, \cdots)$与$(i, j, \cdots)$重合时，(3.3.3)式就是形如(3.1.29)的 YBE。

为了将$\check{R}(u)$矩阵与§2.3中引入的统计模型权重函数$w(i\alpha|\beta j)$联系起来，从而建立$\check{R}(u)$矩阵与哈密顿量的关系，比较(2.3.27)式与(3.3.3)式，可以引入

$$w(i\alpha|\beta j) = \check{R}^{\beta j}_{i\alpha} = \tag{3.3.4}$$

β
i　——+——　j
α

则(3.3.3)式变为[9]：

$$\begin{aligned} & w(i_1 j_1|i' j')w'(j'\alpha|\beta i_2)w'(i'\beta|\mu j_2) \\ & = w'(j_1\alpha|\beta j')w'(i_2\beta|\mu i')w(i' j'|j_2 i_2) \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

(相重指标代表求和)，w与w'可理解为玻耳兹曼权重，上式是巴克斯特书[9]中顶角模型提出的方程的特殊情况。由于$\check{R}(u)^{\alpha i}_{j\beta}$就是局域的转移矩阵元$(L_{\alpha\beta})_{ij}$，对同一个$\check{R}$矩阵，将不同的$(\alpha_i, \beta_i)$空间的$\check{R}(u)$连乘起来，仍满足RTT关系。注意相重指标代表求和，局域的L算符满足

$$\begin{aligned} & \check{R}(u-v)^{k_2 k_1}_{j_1 j_2}(L_{\alpha\beta}(u))^{i_2}_{k_2}(L_{\beta\mu}(v))^{i_1}_{k_1} \\ & = (L_{\alpha\beta}(v))^{k_1}_{j_1}(L_{\beta\mu}(u))^{k_2}_{j_2}\check{R}(u-v)^{i_2 i_1}_{k_2 k_1} \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

作L矩阵的连乘仍用T表示，它们满足(3.1.13)式，有

$$\begin{aligned} \{T^{[N]}(u)^{\beta}_{\alpha}\}^{i_N}_{i_1} & = \left(L_{\alpha_1\beta_1}(u)\right)^{i_2}_{i_1}\left(L_{\alpha_2\beta_2}(u)\right)^{i_3}_{i_2}\cdots\left(L_{\alpha_N\beta_N}(u)\right)^{i_N}_{i_{N-1}} \\ & = \check{R}(u)^{\beta_1 i_2}_{i_1\alpha_1}\check{R}(u)^{\beta_2 i_3}_{i_2\alpha_2}\cdots\check{R}^{\beta_{N-1} i_N}_{i_{N-1}\alpha_{N-1}}\check{R}(u)^{\beta_N i_{N+1}}_{i_N\alpha_N} \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

用黑体的$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$代表

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N), \ \boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \cdots\beta_N) \tag{3.3.8}$$

则(3.3.7)式仍满足RTT关系：

$$\check{R}(u-v)\left(T^{[N]}(u)_{\alpha}^{\beta}\right)\otimes\left(T^{[N]}(v)_{\beta}^{\mu}\right)$$
$$=\left(T^{[N]}(v)_{\alpha}^{\beta}\right)\otimes\left(T^{[N]}(u)_{\beta}^{\mu}\right)\check{R}(u-v) \qquad (3.3.9)$$

其中对相重指标β求和表示对$\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_N\}$均求和。其图示如图 3.8 所示：

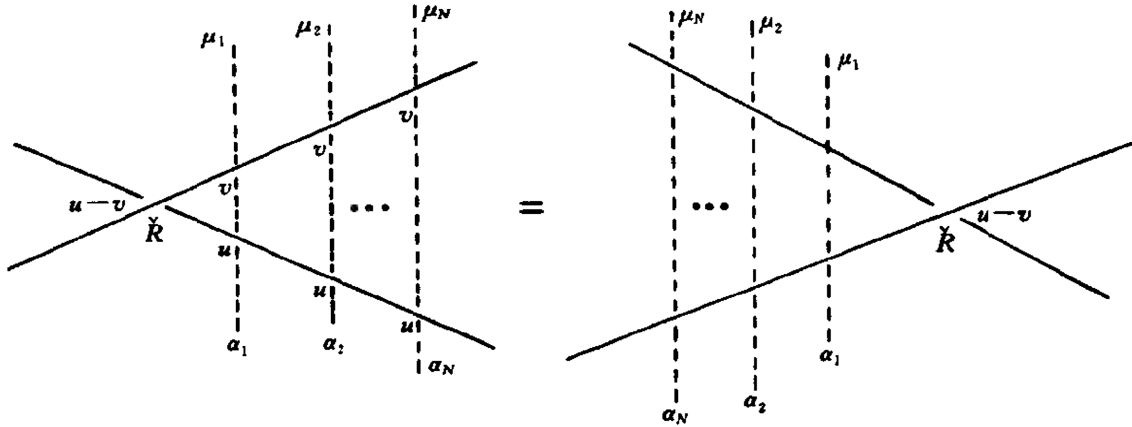


图 3.8

其辅助空间的矩阵迹为

$$\mathrm{tr}\left(T^{[N]}(u)_{\alpha}^{\beta}\right)=\left(\tau^{[N]}(u)_{\alpha}^{\beta}\right)_{\mu_1}^{\mu_2}\equiv\left(\tau^{[N]}(u)\right)_{\alpha}^{\beta} \qquad (3.3.10)$$

$$=\check{R}(u)_{i_1\alpha_1}^{\beta_1 i_2}\check{R}(u)_{i_2\alpha_2}^{\beta_2 i_3}\cdots\check{R}(u)_{i_N\alpha_N}^{\beta_N i_1} \qquad (3.3.11)$$

现在考虑$(\alpha, \beta, \cdots)$空间与$(i, j, \cdots)$重合的情况，这时有：

$$\check{R}(u=0)_{i_n\ \alpha_n}^{\beta_n\ i_{n+1}}=\delta_{i_n}^{\beta_n}\delta_{\alpha_n}^{i_{n+1}} \qquad (3.3.12)$$

$$\left\{T^{[N]}(u)_{\alpha}^{\beta}\right\}_{i_1}^{i_1}\Big|_{u=0}=\delta_{\alpha_N}^{\beta_1}\delta_{\alpha_1}^{\beta_2}\delta_{\alpha_2}^{\beta_3}\cdots\delta_{\alpha_{N-1}}^{\beta_N} \qquad (3.3.13)$$

$$\left\{\left(T^{[N]}(u)_{\alpha}^{\beta}\right)^{-1}\right\}_{i_1}^{i_1}\Big|_{u=0}=\delta_{\alpha_2}^{\beta_1}\delta_{\alpha_3}^{\beta_2}\cdots\delta_{\alpha_N}^{\beta_{N-1}}\delta_{\alpha_1}^{\beta_N} \qquad (3.3.14)$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\ln\{\tau^{[N]}(u)\}_{\alpha}^{\mu}=\{(\tau^{[N]}(u))^{-1}\}_{\beta}^{\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\{\tau^{[N]}(u)\}_{\alpha}^{\beta}$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\delta_{\alpha_1}^{\beta_1}\delta_{\alpha_2}^{\beta_2}\cdots\delta_{\alpha_{i-1}}^{\beta_{i-1}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\check{R}(u)_{\alpha_i\alpha_{i+1}}^{\beta_i\beta_{i+1}}\Big|_{u=0}\cdots\delta_{\alpha_N}^{\beta_N}$$

(3.3.15)

用空间直积形式写出，则为：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\ln\tau^{[N]}(u)\Big|_{u=0}=\sum_{i=1}^{N}\overset{(1)}{I}\otimes\overset{(2)}{I}\otimes\cdots\otimes\overset{(i-1)}{I}\otimes\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\check{R}^{(i,i+1)}(u)\Big|_{u=0}$$

$$\otimes\overset{(i+2)}{I}\otimes\cdots\otimes\overset{(N)}{I}\tag{3.3.16}$$

在一些模型中，哈密顿量用(3.3.16)式定义：

$$H_{i,i+1}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\check{R}^{(i,i+1)}(u)\Big|_{u=0}\tag{3.3.17}$$

系统总的哈密顿量则为：

$$H=\sum_{i=1}^{N}H_{i,i+1}\tag{3.3.18}$$

它对自旋链模型很有用途，因为只要知道 YBE 的解就可以写出一些特殊模型的哈密顿量。

作为例子，我们讨论自旋$\frac{1}{2}$模型。从以前讨论已经知道 $R(u)$ 最简单的解为 $R(u)=u+P$，其中 P 为置换算符，其实现$\left(\text{自旋}\frac{1}{2}\right)$为

$$P_{i,i+1}=\frac{1}{2}\left(I_iI_{i+1}+\sum_{\alpha=1}^{3}\sigma_i^{\alpha}\sigma_{i+1}^{\alpha}\right)\tag{3.3.19}$$

其中σ_i 为第 i 个格点处的泡利矩阵。按定义

$$\check{R}(u)=PR(u)=uP+I\tag{3.3.20}$$

即

$$\check{R}^{i,i+1}(u)=uP_{i,i+1}+I\tag{3.3.21}$$

由(3.3.17)式和(3.3.18)式知此时成立

$$H_{i,i+1}=P_{i,i+1},\quad H=\sum_{i=1}^{N}P_{i,i+1}\tag{3.3.22}$$

这就是通常XXX 磁链的哈密顿量。事实上(3.3.22)式是YBE 的解，

故(3.3.22)式是任意自旋XXX 模型哈密顿量的一般形式。当置换算符 $P_{i,i+1}$用李代数生成元表示时,如果不是 $A_n(SU(n+1))$ 的基本表示,形式将相当复杂,例如任意自旋时,可以包含许多项,而不像(3.3.19)式那么简单,自旋为 1 时可参阅文献[10],而自旋为$\frac{1}{2}$时则为熟知的海森伯链的 XXX 模型,去掉常数项时其哈密顿量为

$$H_0 = J\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{S}_n \cdot \boldsymbol{S}_{n+1} \tag{3.3.23}$$

其中 J 为各向同性交换积分, $\boldsymbol{S}_n = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_n$ 为第 n 格点处的自旋算符,满足对易关系

$$[S_n^\alpha,\ S_m^\beta] = \mathrm{i}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}S_n^\gamma\delta_{mn}\begin{pmatrix} m,\ n = 1,\ 2,\ \cdots,\ N \\ \alpha,\ \beta,\ \gamma = 1,\ 2,\ 3\end{pmatrix} \tag{3.3.24}$$

此时与此 R 矩阵相应的局域转移矩阵满足(3.2.4)式,以 $L_n(u)$表示是在 n 与 $n+1$ 格点处 RTT 关系的解。在(3.2.16)式中令 $\mu = 1$,并注意满足对易关系(3.2.17)式,则有:

$$L_n(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} + u^{-1}\begin{pmatrix} -S_n^3 & S_n^+ \\ S_n^- & S_n^3\end{pmatrix} \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots,N) \tag{3.3.25}$$

其中 $S^\pm = S^1 \pm \mathrm{i}S^2$, $S^\alpha(\alpha = 1,\ 2,\ 3)$ 满足(3.3.24)式。现在要证明,在连续极限下(3.3.25)式将给出 NSE 的 Lax-pair 中的 L_n^{NS},即(2.1.46)式。

引入代换(设 Δ 为格点间隔,c 为常数):

$$\begin{cases} S_n^1 = \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{\Delta c}}(\psi_n^+\rho_n + \rho_n\psi_n), \quad S_n^2 = \dfrac{1}{\sqrt{\Delta c}}(\rho_n\psi_n + \psi_n^+\rho_n) \\ S_n^3 = -\dfrac{2}{\Delta c}\left(1 + \dfrac{\Delta c}{2}\psi_n^+\psi_n\right), \quad \rho_n = \left(1 + \dfrac{\Delta c}{4}\psi_n^+\psi_n\right)^{1/2} \end{cases} \tag{3.3.26}$$

其中 $\psi_n = \Delta^{-1/2}\int_{x_n}^{x_n+\Delta} dx\psi(x, t)$， $\psi_n^+ = \Delta^{-1/2}\int_{x_n}^{x_n+\Delta} dx\psi^+(x, t)$

$$(3.3.27)$$

亦即 ψ_n 是 x_n 与 $x_n+\Delta$ 间场量 $\psi(x, t)$ 的平均值再除以 $\sqrt{\Delta}$。以下证明，如果 ψ_n 与 ψ_m^+ 满足以下玻色型对易关系：

$$[\psi_n, \psi_m^+] = \delta_{mn}, \quad [\psi_n, \psi_m] = [\psi_n^+, \psi_m^+] = 0 \quad (3.3.28)$$

则 如(3.3.26)式定义的 S_n^a 必满足(3.3.24)式且 $(\boldsymbol{S})^2 = 1$ (归一化)。

为证明这点，首先证明下式成立：

$$\psi_n\rho(\psi_n^+\psi_n) = \rho(\psi_n^+\psi_n + 1)\psi_n \quad (3.3.29)$$

由于(3.3.26)式，取 ρ 的平方 $\rho^2 = 1 + \beta N_n$，$N_n = \psi_n^+\psi_n$，$\beta = \frac{\Delta c}{4}$，则有

$$[\psi_n, \rho^2(N_n)] = \beta[\psi_n, N_n] = \beta\psi_n$$

故有

$$\psi_n\rho^2(N_n) = (\rho^2(N_n) + \beta)\psi_n = \rho^2(N_n + 1)\psi_n \quad (3.3.30)$$

它表示必有(3.3.29)式，因为(用 $\rho_n \equiv \psi(\psi_n^+\psi_n) = \psi(N_n)$)：

$$\psi_n\rho(N_n)\rho(N_n) = \rho(N_n + 1)\psi_n\rho(N_n) = \rho^2(N_n + 1)\psi_n$$

它正是(3.3.30)式。再下一步计算

$$[S_n^1, S_n^2] = \frac{2i}{c\Delta}(\psi_n^+\rho^2(N_n)\psi_n - \rho(N_n)\psi_n\psi_n^+\rho(N_n))$$

$$= \frac{2i}{c\Delta}\left\{\psi_n^+\left(1 + \frac{c\Delta}{4}N_n\right)\psi_n\right.$$

$$-\psi_n\left(1+\frac{c\Delta}{4}(N_n-1)\right)\psi_n^+\Big\}$$

$$=-\frac{2\mathrm{i}}{c\Delta}\left(1+\frac{c\Delta}{2}N_n\right)=\mathrm{i}S_n^3 \tag{3.3.31}$$

将(3.3.26)式代入(3.3.25)式得到：

$$L_n(u)=\frac{2\mathrm{i}}{u\Delta c}\begin{pmatrix}1-\mathrm{i}\frac{u\Delta c}{2}+\frac{\Delta c}{2}\psi_n^+\psi_n & -\mathrm{i}\sqrt{\Delta c}\psi_n^+\rho_n \\ -\mathrm{i}\sqrt{\Delta c}\rho_n\psi_n & -1-\mathrm{i}\frac{u\Delta c}{2}-\frac{\Delta c}{2}\psi_n^+\psi_n\end{pmatrix}$$

$$=\frac{2\mathrm{i}}{u\Delta c}\begin{pmatrix}1-\mathrm{i}\frac{\lambda\Delta c}{2}+\frac{\Delta c}{2}\psi_n^+\psi_n & \mathrm{i}\sqrt{\Delta c}\psi_n^+\rho_n \\ -\mathrm{i}\sqrt{\Delta c}\rho_n\psi_n & 1+\mathrm{i}\frac{\Delta cu}{2}+\frac{\Delta c}{2}\psi_n^+\psi_n\end{pmatrix}\sigma_3 \tag{3.3.32}$$

其中 σ_3 为泡利矩阵第三个分量。定义

$$L_n^{NS}(u)=\left(-\frac{\mathrm{i}u\Delta}{2}\right)L_n\left(\frac{u}{c}\right)\sigma_3 \tag{3.3.33}$$

则有

$$L_n^{NS}(u)=\begin{pmatrix}1-\mathrm{i}\frac{u\Delta}{2}+\frac{\Delta c}{2}\psi_n^+\psi_n & \mathrm{i}\sqrt{\Delta c}\psi_n^+\rho_n \\ -\mathrm{i}\sqrt{\Delta c}\rho_n\psi_n & 1+\mathrm{i}\frac{u\Delta}{2}+\frac{c\Delta}{2}\psi_n^+\psi_n\end{pmatrix} \tag{3.3.34}$$

由定义(3.3.27)式容易看出，ψ_n 与 ψ_n^+ 正比于 $\Delta^{1/2}$，而 ρ_n 是 $\psi_n^+\psi_n$ 的函数，如只考虑到 Δ 的一阶项，则得：

$$L_n^{NS}(u)=I+\mathrm{i}\begin{pmatrix}-\frac{\Delta}{2}u & \sqrt{c\Delta}\psi_n^+ \\ -\sqrt{c\Delta}\psi_n & \frac{\Delta}{2}u\end{pmatrix} \tag{3.3.35}$$

熟悉孤子理论的读者立即会知道(3.3.35)式正是NSE的Lax-pair形式(2.1.46)式[7,9,13]。

在结束本节之前，要指出，本章中有意用θ，u等表示谱参数，同时引入不同记号的$\check{R}$矩阵(S矩阵)或R矩阵、局域的L矩阵，整体的T矩阵算符等等。目的是使读者熟悉众多文献中所用的符号。同时，从以上讨论可以看出，即使L矩阵或T矩阵已经用物理算符实现出来，决定哈密顿量仍是件技巧性的事。原因是满足RTT关系的系统必定是量子可积的，但对应同一个R矩阵可以有无数个模型，必须在整个过程中引入具体物理实现才可以构成系统的守恒量。这个框架很大，只能提供一族互相对易的量，至于哪个是哈密顿量，一般要根据经典极限或考虑其他因素加以选择。有时选择$\mathrm{tr}T(u)$，有时选$\ln\mathrm{tr}T(u)$，有时选择变形的量子行列式$\widetilde{\det}T(u)$(对有理解)或$\det_q T(u)$(对三角解，均参见下章)表示。当然核心问题是能够将它们对角化并具有明确的物理意义。

§3.4　因式化S矩阵理论

在第二章曾以具体例子简要地介绍了杨振宁等人提出的一维量子可积模型的S矩阵理论[11]。从量子场论角度，由(3.1.32)式无反射渐近态间的关系亦可以定义S矩阵。我们知道，早在50年代末有人在S矩阵解析理论的基础上提出一套理论，企图从S矩阵的解析性、幺正性、交叉对称性(对相对论粒子散射而言)等等要求决定出S矩阵本身，从而想建立不需要具体哈密顿量的量子散射理论(例如π介子散射的积分方程)。然而这种企图失败了，究其原因(撇开量子色动力学等不谈)，主要是两点：首先是这些理论是在四维时空中进行的；其次，在通常量子场论中粒子数是不守恒的，而且多粒子散射的S矩阵是互相独立的，即没有因式化的条件。例如在处理π-π散射时，中间态会出现四个π介子、六个π介

子等更多个 π 介子，而多个 π 介子的 S 矩阵未能分解为两-两散射的 S 矩阵之积。在一维空间散射中，无反射情况相当于只有向前散射。同时，如果不存在直接三体散射，即三进三出的散射可分解为两-两散射的 S 矩阵之积，如图 3.3 所示。这两个条件，再加上粒子数守恒，极大地限制了二体 S 矩阵。当然，无反射条件是非本质的，现在已有许多包括反射的 S 矩阵理论，为了方便，本章只考虑无反射情况。那么考虑到一维空间中粒子数守恒的无反射散射时，用因式化条件，即 YBE(3.1.24)式，解析性、幺正性和交叉对称性等条件，可否严格决定二体散射的 S 矩阵呢？答案是肯定的。这个问题已由 Zamolodchikov 兄弟予以解决[5]，以后有很大发展。由于这个思想对低维量子场论有很大的推进意义，本节扼要予以介绍。

(1) 相对论全同性粒子二体散射的动力学

设两个粒子发生散射，为方便将入射、出射四维动量表示 p_1，…，p_4，且均为入射形式。由于碰撞前后均为自由粒子，故有 ($c = \hbar = 1$)：

$$p^2 = \boldsymbol{p}^2 - p_0^2 = -m^2$$

其中 $p_0 = \varepsilon = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + m^2}$ 为粒子能量。由于粒子是全同的，可以定义不同反应道，例如 s 道、t 道与 u 道，如图 3.9 所示。这里 s，t 与 u 只表示相应反应道，不要将 u 与谱参数相混。相应道中的质心系总能量平方是洛伦兹不变量，在不同道中，它们是：

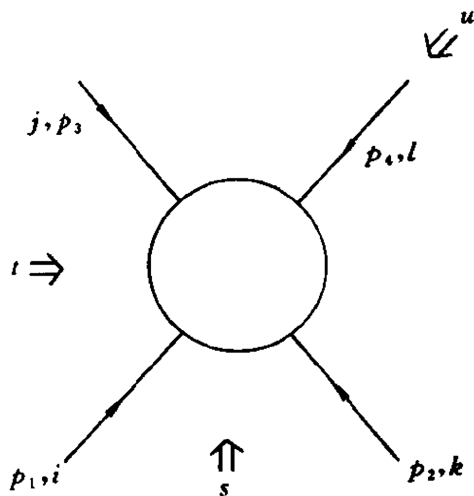


图 3.9

$$\text{I}.\ s\ 道：S_1 = -(p_1 + p_2)^2 = -(p_3 + p_4)^2$$

$$\text{II}.\ t\ 道：S_2 = -(p_1 + p_3)^2 = -(p_2 + p_4)^2$$

$$\text{III}.\ u\ 道：S_3 = -(p_1 + p_4)^2 = -(p_2 + p_3)^2$$

易证 S_1，S_2，S_3 中只有两个是独立的：

$$S_1 + S_2 + S_3 = 4m^2$$

由于粒子全同，例如当 S_2 不动，$2\leftrightarrow 4$ 时，$S_1\leftrightarrow S_3$，这种对称性称为交叉对称性。当选择 s 道时，S_1 为其质心系总能量 $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ 的平方，而在 s 道中 S_2 则与散射角有关，在弹性散射时即有

$$\begin{cases} S_1 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 \\ S_2 = -2\boldsymbol{q}^2(1-\cos\theta) \\ S_3 = -2\boldsymbol{q}^2(1+\cos\theta) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 \end{cases} \tag{3.4.1}$$

其中$\boldsymbol{q}$与 θ 为在质心系中粒子入射的三维动量及其散射角，不要与前几章中的谱参数混淆。在 S 道中，常常令 $S\equiv S_1$，$t\equiv S_2$ 表示质心系总能量平方及动量转移。物理角区域为 $|\cos\theta|\leqslant 1$。实际上根据 Lehmann 解析延拓定理，S 矩阵对 $\cos\theta$ 的解析延拓区域可以扩大为 $z=\cos\theta$ 复平面上的椭圆。注意物理区域为：

$$4m^2 \leqslant S < \infty,\quad -4\boldsymbol{q}^2 \leqslant t \leqslant 0 \tag{3.4.2}$$

由于

$$\boldsymbol{q}^2 = \frac{(S-2m)^2 - 4m^4}{4S}$$

在一维无反射散射时，只有向前散射，即 $\theta = 0$ 或 $S_2 = 0$，此时 $S = 4m^2$ 或 0，这两个点是复平面上支线的起点。无穷远点与该两点的联线即为支线，故可选

$$-\infty < S \leqslant 0,\quad 4m^2 \leqslant S < \infty \tag{3.4.3}$$

引入快度 θ_a 与 θ_b，它们分别对应粒子 a 与粒子 b：

$$p_a^0 = m\mathrm{ch}\theta_a,\quad p_a^1 = m\mathrm{sh}\theta_a$$

对粒子 b 有同样的式子。当粒子 a 与 b 散射时，有：

$$S = -(p_a + p_b)^2 = 2m^2(1 + \mathrm{ch}\theta) \quad (\theta = \theta_a - \theta_b) \tag{3.4.4}$$

两个粒子散射的 S 矩阵在 S 复平面为解析，除了(3.4.3)式所示的割线与其他可能的极点。换言之，$0 < S < 4m^2$ 决定第一黎曼面，相当于

$$0 < \mathrm{Im}\theta \leqslant \pi$$

同时 $S(\theta)$ 在 θ 平面为实解析函数，即在施瓦兹反射时有：

1) 解析性：

$$S(-\theta) = S^*(\theta),\ \mathrm{Im}\theta = 0 \tag{3.4.5}$$

在非相对论近似时，$p^0 \approx 1 + \frac{1}{2m}(p')^2$，$\mathrm{ch}\theta \approx 1 + \frac{1}{2}v^2$，故 $\theta \approx v$，即快度近似为速度，此时便丧失了交叉对称性。现在考虑具有 $O(n)$ 对称性的二体散射，其中内部分立指标可理解为某种同位旋。以 $A_i(p)$ 表示“同位旋”为 i，动量为 p 的粒子态，由 $O(N)$ 对称性可写出振幅一般形式[5]：

$$\begin{aligned} S_{jl}^{ik} &= {}_{\text{out}}\langle A_j(p'_1)A_l(p'_2) | A_i(p_1)A_k(p_2)\rangle_{\text{in}} \\ &= \delta(p_1 - p'_1)\delta(p_2 - p'_2)\{\delta_{ik}\delta_{jl}S_1(S) + \delta_{ij}\delta_{kl}S_2(S) \\ &\quad + \delta_{il}\delta_{jk}S_3(S)\} \pm (i \leftrightarrow k,\ p_1 \leftrightarrow p_2) \\ &(i,\ j,\ k,\ l = 1,\ 2,\ \cdots,\ N) \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

其中“+”对应于玻色子，而“−”对应于费米子，$\delta(p - p') = \delta(\varepsilon - \varepsilon')\delta(p_1 - p'_1)$，(3.4.6)式具有很好的对称性质，如图 3.5 所示。不变振幅为：

$$A = \delta_{ik}\delta_{jl}S_1(S) + \delta_{ij}\delta_{kl}S_2(S) + \delta_{il}\delta_{jk}S_3(S)$$

当

$$\begin{cases} 3\leftrightarrow 4, S_1\text{ 不变}; j\leftrightarrow l,\ S_2\leftrightarrow S_3 \\ 2\leftrightarrow 4,\ S_2\text{ 不变}; k\leftrightarrow l,\ S_1\leftrightarrow S_3 \\ 2\leftrightarrow 3,\ S_3\text{ 不变}; k\leftrightarrow j,\ S_1\leftrightarrow S_2 \end{cases} \tag{3.4.7}$$

这些对称性表示：

$$S_2(S) = S_2(4m^2 - S) \tag{3.4.8}$$

$$S_1(S) = S_3(4m^2 - S) \tag{3.4.9}$$

但当 S 换为 $4m^2 - S$ 时，$\theta \to \mathrm{i}\pi - \theta\left(S = 4m^2\mathrm{ch}^2\,\dfrac{\theta}{2}\right)$，因此有结论：

2）交叉对称性：

$$S_2(\theta) = S_2(\mathrm{i}\pi - \theta) \tag{3.4.10}$$

$$S_1(\theta) = S_3(\mathrm{i}\pi - \theta) \tag{3.4.11}$$

同时，幺正性要求

$$\int \mathrm{d}\theta'_1\mathrm{d}\theta'_2 \sum_{j',k'} S^{ik}_{k'i'} S^{*\,i'k'}_{jl} = \delta_{il}\delta_{jk} \tag{3.4.12}$$

将(3.4.6)式代入(3.4.12)式，其左端包含了 $\delta_{il}\delta_{jk}$，$\delta_{ik}\delta_{jl}$ 与 $\delta_{ij}\delta_{kl}$，但(3.4.12)式右端仅出现 $\delta_{il}\delta_{jk}$，故它们前面的系数必分别为 1，0 和 0，于是给出：

3）幺正性：

$$S_2(\theta)S_2(-\theta) + S_3(\theta)S_3(-\theta) = 1 \tag{3.4.13}$$

$$S_2(\theta)S_3(-\theta) + S_3(\theta)S_2(-\theta) = 0 \tag{3.4.14}$$

$$NS_1(\theta)S_1(-\theta) + S_1(\theta)S_2(-\theta) + S_1(\theta)S_3(-\theta) + S_2(\theta)S_1(-\theta) + S_3(\theta)S_1(-\theta) = 0 \tag{3.4.15}$$

(2) 因式化

假定 S 矩阵满足 YBE，即不存在直接三体散射，这时 S 矩阵应满足(3.1.29)式。将(3.4.6)式代入(3.1.29)式，计算是初等的但比较繁，我们省略中间过程。要注意的是由于每项中均有 δ_{ij} 等记号的乘积，当 $i, j = 1, 2$ 时的计算与 $i, j \geqslant 3$ 时的计算不同。仿照文献[5]，为简化记号，以下结果中第一项依赖于 θ，第二项依赖于 $(\theta + \theta')$，第三项依赖于 θ'，例如 $S_2S_1S_3 = S_2(\theta)S_1(\theta + \theta')S_3(\theta')$。结果为[5]：

$N = 2$

$$S_2S_1S_3 + S_2S_3S_3 + S_3S_3S_2 = S_3S_2S_3 + S_1S_2S_3 + S_1S_1S_2 \tag{3.4.16}$$

$$S_3S_1S_3 + S_3S_2S_3 = S_3S_2S_1 + S_3S_3S_2 + S_2S_3S_1 + S_2S_3S_3 + 2S_1S_3S_1 + S_1S_3S_2 + S_1S_3S_3 + S_1S_2S_1 + S_1S_1S_1 \tag{3.4.17}$$

$N \geqslant 3$（为区别于上式，相应的 S_i 用 σ_i 表示）

$$\sigma_2\sigma_3\sigma_3 + \sigma_3\sigma_3\sigma_2 = \sigma_3\sigma_2\sigma_3 \tag{3.4.18}$$

$$\sigma_2\sigma_1\sigma_1 + \sigma_3\sigma_2\sigma_1 = \sigma_3\sigma_1\sigma_2 \tag{3.4.19}$$

$$N\sigma_1\sigma_3\sigma_1 + \sigma_1\sigma_3\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3\sigma_1 + \sigma_3\sigma_3\sigma_1 + \sigma_1\sigma_1\sigma_1 = \sigma_3\sigma_1\sigma_3 \tag{3.4.20}$$

先解 $N = 2$ 情况。引入

$$h(\theta) = \frac{S_2(\theta)}{S_3(\theta)}, g(\theta) = \frac{S_1(\theta)}{S_3(\theta)} \tag{3.4.21}$$

注意(3.4.16)式和(3.4.17)式中不同顺序依赖于 θ, $\theta + \theta'$ 与 θ'，有

$$h(\theta)g(\theta + \theta') + h(\theta) + h(\theta')$$

$$= h(\theta + \theta') + g(\theta)h(\theta + \theta') + g(\theta)g(\theta + \theta')h(\theta') \tag{3.4.22}$$

$$h(\theta) + h(\theta') - h(\theta + \theta')$$
$$= g(\theta)h(\theta + \theta') - h(\theta)g(\theta + \theta') + g(\theta)g(\theta + \theta')h(\theta') \tag{3.4.23}$$

以及上式中 $\theta \leftrightarrow \theta'$：

$$h(\theta') + h(\theta) - h(\theta + \theta')$$
$$= g(\theta')h(\theta + \theta') - h(\theta')g(\theta + \theta') + g(\theta')g(\theta + \theta')h(\theta) \tag{3.4.24}$$

当 $\theta' = 0$，分别得到

$$\{1 + g(\theta)\}\{h(0) - g(0)h(0)\} = 0 \tag{3.4.25}$$

$$\{1 + g(\theta)\}\{(1 + g(\theta) + h(\theta))g(0) + h(0)\} = 0 \tag{3.4.26}$$

$$\{1 - (g(\theta))^2\}h(0) = 0 \tag{3.4.27}$$

满足这些条件的可能性有：

$$\begin{aligned} &\text{a) } g(\theta) = 1,\ h(\theta) = -1 \\ &\text{b) } g(\theta) = -1,\ h(\theta) = \text{任意} \\ &\text{c) } g(0) = h(0) = 0 \end{aligned} \tag{3.4.28}$$

由于a)导致 $S_1(\theta) = S_3(\theta)$，$S_2(\theta) = -S_3(\theta)$，它们使(3.4.13)式右端为零，与幺正性矛盾；b)导致 $S_1(\theta) = -S_3(\theta)$，即 $-S_3(\theta) = S_3(\mathrm{i}\pi - \theta)$，但这破坏交叉对称性；故只有 c)存在。取(3.4.24)式对 θ' 的微商后，再令 $\theta' = 0$，则当

$$g(0) = h(0) = 0 \tag{3.4.29}$$

有

$$\frac{\mathrm{d}h(\theta)}{\mathrm{d}\theta} = (1 + g(\theta))\{\alpha - \beta h(\theta)\} \tag{3.4.30}$$

其中 $h'(0)=\alpha$, $g'(0)=\beta$ 为任意常数。类似地还有

$$\frac{\mathrm{d}h(\theta)}{\mathrm{d}\theta}+\frac{\mathrm{d}g(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=(1+g(\theta))\{\alpha+\beta h(\theta)+\beta(1+g(\theta))\} \tag{3.4.31}$$

将(3.4.30)式代入(3.4.31)式得到

$$\frac{\mathrm{d}g(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=(1+g)\{2\beta h+\beta(1+g)\} \tag{3.4.32}$$

注意到(3.4.30)式，易推出

$$g(\theta)=\beta h(\theta)\frac{h(\theta)+1}{\alpha-\beta h(\theta)},\quad \frac{\mathrm{d}h(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\alpha+\beta(h(\theta))^2 \tag{3.4.33}$$

其解为：

$$\begin{cases} h(\theta)=-\mathrm{i}\tan\left(\dfrac{4\pi\delta}{\gamma}\right)\mathrm{th}\left(\dfrac{4\pi\theta}{\gamma}\right) \\ g(\theta)=\mathrm{th}\left(\dfrac{4\pi\theta}{\gamma}\right)\mathrm{cth}\left(\dfrac{4\pi}{\gamma}(\mathrm{i}\delta-\theta)\right) \end{cases} \tag{3.4.34}$$

其中已用常数 δ,γ 代替 α, β:

$$\begin{cases} \alpha=(-\mathrm{i})\dfrac{4\pi}{\gamma}\tan\left(\dfrac{4\pi\delta}{\gamma}\right) \\ \beta=(-\mathrm{i})\dfrac{4\pi}{\gamma}\cot\left(\dfrac{4\pi\delta}{\gamma}\right) \end{cases} \tag{3.4.35}$$

于是当 $N=2$ 时得到：

$$\begin{cases} S_3(\theta)=\mathrm{i}\cot\left(\dfrac{4\pi\delta}{\gamma}\right)\mathrm{cth}\left(\dfrac{4\pi\theta}{\gamma}\right)S_2(\theta) \\ S_1(\theta)=\mathrm{i}\cot\left(\dfrac{4\pi\delta}{\gamma}\right)\mathrm{cth}\left\{\dfrac{4\pi}{\gamma}(\mathrm{i}\delta-\theta)\right\}S_2(\theta) \end{cases} \tag{3.4.36}$$

类似的计算，当 $N \geqslant 3$ 时，得到[5]

$$\begin{cases} \sigma_3(\theta) = \dfrac{-\mathrm{i}\lambda}{\theta}\sigma_2(\theta) \\ \sigma_1(\theta) = \dfrac{\mathrm{i}\lambda}{\theta - \mathrm{i}\left(\dfrac{N-2}{2}\right)\lambda}\sigma_2(\theta) \end{cases} \tag{3.4.37}$$

其中 λ 为任意常数，不要与以前的谱参数相混，而 θ 为相对快度是谱参数。(3.4.37)式可以用 R 矩阵有理解的 YB 方案得到[8]，以上沿用了文献[5]的推导。从以上计算可知，S_1、S_3 可用 S_2 表示，σ_1、σ_3 可用 σ_2 表示，这是 YBE 的结果。

以下考虑幺正性的限制，可以验证，对上述解，(3.4.14)式与(3.4.15)式恒满足，仅有(3.4.13)式构成条件，从它易推出：

$N = 2$：

$$S_2(\theta)S_2(-\theta) = \left[1 + \mathrm{ctg}^2\left(\frac{4\pi\delta}{\gamma}\right)\mathrm{cth}^2\left(\frac{4\pi\theta}{\gamma}\right)\right]$$

$$= \frac{\sin^2\left(\dfrac{4\pi\delta}{\gamma}\right)\mathrm{sh}^2\left(\dfrac{4\pi\theta}{\gamma}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{4\pi\delta}{\gamma}\right)\mathrm{sh}^2\left(\dfrac{4\pi\theta}{\gamma}\right) + \cos^2\left(\dfrac{4\pi\delta}{\gamma}\right)\mathrm{ch}^2\left(\dfrac{4\pi\theta}{\gamma}\right)} \tag{3.4.38}$$

$N \geqslant 3$：

$$\sigma_2(\theta)\sigma_2(-\theta) = \frac{\theta^2}{\theta^2 + \lambda^2} \tag{3.4.39}$$

交叉对称性(3.4.10)式给出

$$\delta = \pi, \quad \lambda = \frac{2\pi}{N-2} \tag{3.4.40}$$

而另一条件(3.4.8)式则限制了 $S_2(\theta)$ 与 $\sigma_2(\theta)$ 自己。剩下的事是找满足(3.4.38)式～(3.4.40)式及(3.4.8)式的 $S_2(\theta)$ 与 $\sigma_2(\theta)$。

现以 $\sigma_2(\theta)$为例，同时满足(3.4.38)式及(3.4.8)式的 $\sigma_2(\theta)$ ($\sigma_2(\theta) = \sigma_2(\mathrm{i}\pi - \theta)$) 的充分形式可以用 $\sigma_2^{(\pm)}(\theta)$表达[5]：

$$\sigma_2^{(\pm)}(\theta) = Q^{(\pm)}(\theta)Q^{(\pm)}(\mathrm{i}\pi - \theta) \tag{3.4.41}$$

其中 $Q^{(\pm)}(\theta)$则由下式给出：

$$Q^{(\pm)}(\theta) = \frac{\Gamma\left(\pm\frac{\lambda}{2\pi} - \mathrm{i}\frac{\theta}{2\pi}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\theta}{2\pi}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\lambda}{2\pi} - \mathrm{i}\frac{\theta}{2\pi}\right)\Gamma\left(-\mathrm{i}\frac{\theta}{2\pi}\right)} \tag{3.4.42}$$

$$Q^{(\pm)}(\mathrm{i}\pi - \theta) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\lambda}{2\pi} + \mathrm{i}\frac{\theta}{2\pi}\right)\Gamma\left(1 + \frac{\mathrm{i}\theta}{\pi}\right)}{\Gamma\left(1 \pm \frac{\lambda}{2\pi} + \frac{\mathrm{i}\theta}{2\pi}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}\theta}{2\pi}\right)} \tag{3.4.43}$$

其中 $\Gamma(z)$为 Γ 函数。利用 $\Gamma(1 + z) = z\Gamma(z)$ 易证

$$\sigma_2^{(\pm)}(\theta)\sigma_2^{(\pm)}(-\theta) = \frac{\theta^2}{\theta^2 + \lambda^2} \tag{3.4.44}$$

引入

$$z_1 = \frac{1}{2\pi}(\lambda - \mathrm{i}\theta),\ z_2 = \frac{1}{2\pi}(\lambda + \mathrm{i}\theta)$$

则

$$\frac{\sigma^{(+)}(\theta)}{\sigma^{(-)}(\theta)} = \frac{\sin\pi z_2}{\sin\pi z_1}\frac{\sin\pi\left(\frac{1}{2} + z_1\right)}{\sin\pi\left(\frac{1}{2} + z_2\right)} = \frac{\mathrm{sh}\theta + \mathrm{i}\sin\lambda}{\mathrm{sh}\theta - \mathrm{i}\sin\lambda} \tag{3.4.45}$$

我们注意到由于 $\lambda = \dfrac{2\pi}{N-2}$ 为实数，上式右端为 CDD 型极点，因为它仅在纯虚轴上有极点。实际上，由 S 矩阵解析延拓理论，如果在 θ 复平面第一象限有一零点，则在第四象限对称处必有一极点，

它们对虚轴的反射点有类似性质。存在于纯虚轴上的不成对的零点的共轭必为极点，称为 CDD 极点。现在 $\sigma^{(+)}(\theta)$ 与 $\sigma^{(-)}(\theta)$ 间只差 CCD 极点。这些图景如图 3.10 所示。

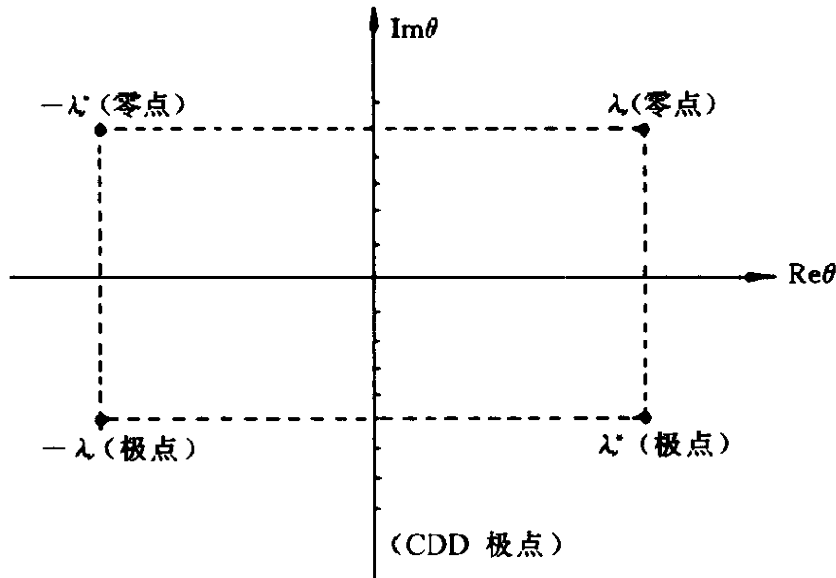


图 3.10

类似的计算，当 $N = 2$ 时有[5]：

$$S_2(\theta) = \frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{4\pi^2}{\gamma}\right)\mathrm{sh}\left(\frac{4\pi\theta}{\gamma}\right)\mathrm{sh}\left\{\frac{4\pi(\mathrm{i}\pi - \theta)}{\gamma}\right\}U(\theta) \tag{3.4.46}$$

$$U(\theta) = \Gamma\left(\frac{8\pi}{\gamma}\right)\Gamma\left(1 + \mathrm{i}\frac{8\theta}{\gamma}\right)\Gamma\left(1 - \frac{8\pi}{\gamma} - \mathrm{i}\frac{8\theta}{\gamma}\right) \cdot \prod_{n=1}^{\infty}\frac{R_n(\theta)R_n(\mathrm{i}\pi - \theta)}{R_n(0)R_n(\mathrm{i}\pi)} \tag{3.4.47}$$

$$R_n(\theta) = \frac{\Gamma\left(2\pi\frac{8\pi}{\gamma} + \mathrm{i}\frac{8\pi}{\gamma}\right)\Gamma\left(1 + 2n\frac{8\pi}{\gamma} + \mathrm{i}\frac{8\theta}{\gamma}\right)}{\Gamma\left((2n+1)\frac{8\pi}{\gamma} + \mathrm{i}\frac{8\theta}{\gamma}\right)\Gamma\left(1 + (2n-1)\frac{8\pi}{\gamma} + \mathrm{i}\frac{8\theta}{\gamma}\right)}$$

显然，$S_2(\theta)$ 与 $\sigma_2(\theta)$ 的决定有一定的任意性，但要满足各种要求：例如，割线的正确位置；与路径积分结果(至少在渐近项)一致的正

确的孤立子行为等等，这不是一件容易的事。本章只讨论了 $O(N)$ 情况，讨论可以推广到 $SU(N+1)$，或其它代数情况[16]。

从以上例子可以看到，因式化条件(YBE)是最重要的限制，加上李代数结构的限制(基本上是内部对称性)、解析性、幺正性、交叉对称性，并辅助若干物理的考虑，原则上可以决定出 S 矩阵的精确解(只差到 CDD 极点)。这是低维完全可积量子场论与通常四维量子场论不同之处。

§3.5 从 YBE 直接解出因式化 S 矩阵

上节中介绍了因式化 S 矩阵的形式，特别是(3.4.37)式所示的 $O(N)(N\geqslant3)$ 对称的 S 矩阵，它反映了满足解析性、幺正性、因式化以及交叉对称性限制下 S 矩阵的形式。需要指出，这种形式可以直接从限定 R 矩阵的形式入手直接解出，而这种设定的形式有很易理解的说明。

在讨论 YBE 的有理解时，曾指出(3.2.2)式是最简单的形式，它是置换算符 P 的简单变形，以下为方便令 θ 为快度以代替谱参数 θ。(3.2.2)式中 $\check{R}(\theta)=\theta P+\eta$ 是快度 θ 的线性函数，进一步的推广则是 θ 的二阶多项式，其系数当然应当是矩阵。但由于置换算符 $P^2=I$，所以只能存在 P 本身，因此推广(3.2.2)式将 $\check{R}(\theta)$ 写为：

$$\check{R}(\theta)=f(\theta)(\theta^2P+\theta M+qI) \tag{3.5.1}$$

其中 $f(\theta)$ 为归一化函数，M 为未知矩阵，I 为单位矩阵，q 为未知参数，将来待定。将(3.5.1)式代入 YBE，得

$$\check{R}_{12}(\theta)\check{R}_{23}(\theta+\theta')\check{R}_{12}(\theta')=\check{R}_{23}(\theta')\check{R}_{12}(\theta+\theta')\check{R}_{23}(\theta) \tag{3.5.2}$$

并按(3.1.30)式与(3.1.31)式要求

$$\check{R}(\theta)\check{R}(-\theta)=I \tag{3.5.3}$$

$$\check{R}(\theta)\big|_{\theta=0}=\text{const}\cdot I \tag{3.5.4}$$

$$\check{R}(\theta\to\infty)=\text{const}\cdot P \tag{3.5.5}$$

将得到许多限制 M, q, $f(\theta)$的方程。以 $P_{i\,i+1}$为相应空间的置换算符的矩阵表示,则将设定的(3.5.1)式代入(3.5.2)式后,得到:

$$\begin{cases} M_{12}P_{23}M_{12}+P_{12}M_{23}M_{12} \\ \quad =M_{23}M_{12}P_{23}+M_{23}P_{12}M_{23} \\ M_{12}M_{23}P_{12}+M_{12}P_{23}M_{12} \\ \quad =M_{23}P_{12}M_{23}+P_{23}M_{12}M_{23} \\ P_{12}M_{23}M_{12}+2M_{12}P_{23}M_{12}+M_{12}M_{23}P_{12} \\ \quad =P_{23}M_{12}M_{23}+2M_{23}P_{12}M_{23}+M_{23}M_{12}P_{23} \\ qP_{12}M_{12}+qP_{23}M_{12}+2qM_{12}P_{23} \\ \qquad +qP_{12}M_{23}+M_{12}M_{23}M_{12} \\ \quad =qM_{12}P_{23}+qM_{23}P_{12}+2qP_{12}M_{23} \\ \qquad +qM_{23}P_{23}+M_{23}M_{12}M_{23} \\ qM_{23}P_{12}+qM_{12}P_{23}+2qP_{23}M_{12} \\ \qquad +qM_{12}P_{12}+M_{12}M_{23}M_{12} \\ \quad =qP_{23}M_{23}+qP_{12}M_{23}+2qM_{23}P_{12} \\ \qquad +qP_{23}M_{12}+M_{23}M_{12}M_{23} \\ 2qP_{23}+M_{12}^2=2qP_{12}+M_{23}^2 \end{cases} \tag{3.5.6}$$

进一步计算表明上式等价于以下方程组:

$$
\begin{cases}
M_{12}P_{23}M_{12} + P_{12}M_{23}M_{12} \\
\quad = M_{23}M_{12}P_{23} + M_{23}P_{12}M_{23} \\
M_{12}M_{23}P_{12} + M_{12}P_{23}M_{12} \\
\quad = M_{23}P_{12}M_{23} + P_{23}M_{12}M_{23} \\
qP_{12}M_{12} + qP_{23}M_{12} + qM_{12}P_{23} + M_{12}M_{23}M_{12} \\
\quad = qM_{23}P_{12} + qP_{12}M_{23} + qM_{23}P_{23} + M_{23}M_{12}M_{23} \\
2qP_{23} + M_{12}^2 = 2qP_{12} + M_{23}^2 \quad MP = PM
\end{cases}
\tag{3.5.7}
$$

这仍是个复杂的矩阵方程，为了找到(3.5.7)式的充分解，假设矩阵 M 具有以下形式：

$$
M = q_1 P + T + q_2 I \tag{3.5.8}
$$

其中 q_1 与 q_2 为待定常数，而 T 为未知矩阵。将 M 代入(3.5.7)式，遂得(3.5.7)式的具体形式：

$$
\begin{cases}
q = q_1 q_2 + 2q_1 PT + 2q_2 T + T^2 = 0, \; PT = TP \\
q_2(P_{12} + P_{23})T_{12} + T_{12}P_{23}T_{12} + P_{12}T_{23}T_{12} \\
\quad = q_2 T_{23}(P_{12} + P_{23}) + T_{23}P_{12}T_{23} + T_{23}T_{12}T_{23} \\
q_2 T_{12}(P_{12} + P_{23}) + T_{12}P_{23}T_{12} + T_{12}T_{23}P_{12} \\
\quad = q_2(P_{12} + P_{23})T_{23} + T_{23}P_{12}T_{23} + P_{23}T_{12}T_{23} \\
q_1 q_2(3T_{12}P_{12} + P_{23}T_{12} + T_{12}P_{23}) + q_2^2 T_{12} \\
\qquad + q_1(P_{12}T_{23}T_{12} + T_{12}P_{23}T_{12} + T_{12}T_{23}P_{12}) \\
\qquad + q_2 T_{12}^2 + T_{12}T_{23}T_{12} \\
\quad = q_1 q_2(3T_{23}P_{23} + P_{12}T_{23} + T_{23}P_{12}) + q_2^2 T_{23} \\
\qquad + q_1(P_{23}T_{12}T_{23} + T_{23}P_{12}T_{23} + T_{23}T_{12}P_{23}) \\
\qquad + q_2 T_{23}^2 + T_{23}T_{12}T_{23}
\end{cases}
\tag{3.5.9}
$$

现仍然无法求出它的一般解，但可找到它的特解，为此选择

$$T = uA$$

$$T = \text{block diagonal } (0, 0, \cdots, 0, A_N, 0, \cdots 0) \tag{3.5.10}$$

其中

$$A_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & & \vdots & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{3.5.11}$$

也就是说,当 $a, b, c, d \in \{(-N+1)/2, (-N+3)/2, \cdots, (N-3)/2, (N-1)/2\}$ 取值时,矩阵 A_N 的矩阵元为

$$(A_N)^{ab}_{cd} = \delta^{a,-b}\delta_{c,-d} \tag{3.5.12}$$

应用(3.5.12)式可以计算出 $T = uA$ 所满足的关系:

$$\begin{cases} uP_{23}T_{12} = P_{12}T_{23}T_{12}, \quad uT_{12} = T_{12}P_{23}T_{12} \\ uT_{23}P_{12} = T_{23}T_{12}P_{23}, \quad uT_{23} = T_{23}P_{12}T_{23} \\ uT_{12}P_{23} = T_{12}T_{23}P_{12}, \quad uP_{12}T_{23} = P_{23}T_{12}T_{23} \\ u^2T_{12} = T_{12}T_{23}T_{12}, \quad u^2T_{23} = T_{23}T_{12}T_{23} \end{cases} \tag{3.5.13}$$

将(3.5.13)式代入(3.5.9)式发现(3.5.9)式极大地简化为:

$$\begin{cases} 2(q_1 + q_2) + Nu = 0 \\ q_2 + u = 0 \\ 3q_1q_2 + q_2^2 + q_1u + q_2Nu + u^2 = 0 \end{cases} \tag{3.5.14}$$

它导致解为

$$q_2 = -u, \ q_1 = (1 - N/2)u, \ q = q_1q_2 \tag{3.5.15}$$

将它代回(3.5.1)式,则得到

$$\check{R}(\theta) = f(\theta)[\theta(\theta + q_1)P + u\theta A + (q_2\theta + q)I] \tag{3.5.16}$$

再利用(3.5.3)式，易知有

$$f(\theta)f(-\theta) = [(\theta^2 - q_1^2)(\theta^2 - q_2^2)]^{-1} \tag{3.5.17}$$

取

$$u = \mathrm{i}\lambda, \quad f(\theta)\theta(\theta + q_1) = \sigma_2(\theta) \tag{3.5.18}$$

则得：

$$\begin{cases} \sigma_1(\theta) \equiv f(\theta)\theta u = \dfrac{u}{\theta + q_1}\sigma_2(\theta) = \dfrac{\mathrm{i}\lambda}{\theta + \dfrac{1}{2}(2 - N)\mathrm{i}\lambda}\sigma_2(\theta) \\ \sigma_3(\theta) \equiv f(\theta)(q_2\theta + q) = \dfrac{q_2}{\theta}\sigma_2(\theta) = \dfrac{\mathrm{i}\lambda}{\theta}\sigma_2(\theta) \end{cases} \tag{3.5.19}$$

注意到

$$f(\theta)f(-\theta) = \sigma_2(\theta)\sigma_2(-\theta)[\theta^2(\theta^2 - q_1^2)]^{-1} \tag{3.5.20}$$

遂得到：

$$\sigma_2(\theta)\sigma_2(-\theta) = \frac{\theta^2}{\theta^2 + \lambda^2} \tag{3.5.21}$$

最后得到：

$$\check{R}(\theta) = \sigma_2(\theta)P + \sigma_1(\theta)A + \sigma_3(\theta)I \tag{3.5.22}$$

其中

$$\begin{cases} \sigma_1(\theta) = \dfrac{-\mathrm{i}\lambda}{-\mathrm{i}\lambda(N-2)/2 - \theta}\sigma_2(\theta) \\ \sigma_3(\theta) = -\dfrac{\mathrm{i}\lambda}{\theta}\sigma_2(\theta) \end{cases} \tag{3.5.23}$$

并且(3.5.21)式成立。比较(3.5.23)式与(3.4.37)式正是上节的结果 ($N \geqslant 3$)，其中 P 与 A 处于 $O(N)$“同位旋”投射算符的意义。

以后还要回到类似(3.5.1)式形式的 $\check{R}$ 矩阵，它具有更深刻的

意义:它可视为 YBE 有理解的 YB(参见第六章)。本节的讨论表明,因式化 S 矩阵与 YB 方案相联系。

§3.6 辫子群关系

由(3.1.28)式所示的 YBE,当谱参数 $u=0$ 时,可取

$$\check{R}(u=0)=I \tag{3.6.1}$$

即

$$\check{R}(u=0)_{ij}^{kl}=\delta_{ik}\delta_{lj} \tag{3.6.2}$$

而当 $u\to\infty$ 时,它的极限

$$b=\lim_{u\to\infty}\check{R}(u) \tag{3.6.3}$$

遵守与 YBE 形式一样的关系,但没有谱参数依赖关系:

$$b_{i_1j_1}^{i'j'}b_{j'k_1}^{k'k_2}b_{i'k'}^{i_2j_2}=b_{j_1k_1}^{j'k'}b_{i_1j'}^{i_2i'}b_{i'k'}^{j_2k_2} \tag{3.6.4}$$

或

$$b_{12}b_{23}b_{12}=b_{23}b_{12}b_{23} \tag{3.6.5}$$

进而如果定义

$$B_i=\overset{(1)}{I}\otimes\overset{(2)}{I}\otimes\cdots\otimes\overset{(i-1)}{I}\otimes b_{i\,i+1}\otimes\overset{(i+1)}{I}\otimes\cdots\otimes\overset{(N)}{I} \tag{3.6.6}$$

则有

$$\begin{cases}B_iB_{i+1}B_i=B_{i+1}B_iB_{i+1}\\ B_iB_j=B_jB_i,\ |i-j|\geqslant 2\end{cases} \tag{3.6.7}$$

它们称为辫子群(braid group)关系。虽然(3.6.7)式在本章中用直积空间(3.6.6)式引出,但(3.6.6)式仅是(3.6.7)式的特殊情况,一般说 B_i 并不一定总能分解成(3.6.6)式的形式,但就我们的讨论而言,(3.6.6)式是足够了的。

(3.6.6)式连同 b 矩阵的幺正性 $bb^{-1}=b^{-1}b=I$，确定了辫子群关系，b 的表示称为辫子群表示，简记为 BGR，它就是 $\check{R}(u)$ 矩阵当 $u\to\infty$ 时的渐近行为，其表示维数就是辅助空间的维数。(3.6.5)式中空间 1，2，3 泛指三个相邻的观测空间，它的图示是把本章图 3.1 中对角度的依赖关系去掉，而把图 3.1 的直线视为任意变形的橡皮筋。(3.6.5)式的规则是保持两线的上交叉点(over crossing)与下交叉点(under crossing)个数不变时，存在关系：

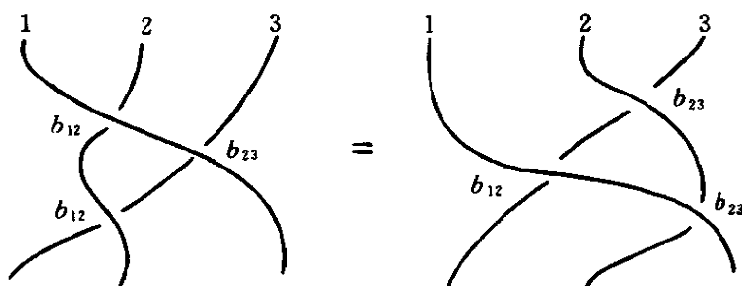


图 3.11

如图 3.11 所示，它表明，三条线可变形，但需保证三个结点数目不变，线的三层顺序不变，相应幺正条件就蜕化为：

$b=$ ， $b^{-1}=$ ， $bb^{-1}=b^{-1}b=$ $=$ $=I$

辫子群是由有限个生成元产生出无限维群的典型例子。例如从一个操作 b 出发，序列 b, b^2, b^3, … 可以产生无穷个元素，显然若附加 $b^2=I$ 的条件，则限制了独立元素只有一个，即 $b=P$（它正是置换群）。如果 b 有有限维表示（在许多问题中都是如此），那么 b 就可视为某个方阵，当该方阵非异时，一定有 M 个独立本征值 λ_1, λ_2, …, λ_M，亦即：

$$\prod_{m=1}^{M}(b-\lambda_m)=0 \tag{3.6.8}$$

这时 b 满足一个矩阵多项式方程。例如，当有两个独立本征值 λ_1、

λ_2 时，有：

$$b^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)b + \lambda_1\lambda_2 = 0$$

或

$$b = -(\lambda_1\lambda_2)b^{-1} + (\lambda_1 + \lambda_2)I \qquad (3.6.9)$$

由于辫子关系可以相差任意乘积常数，可以重新标度 BGR，使得 $\lambda_1 = q_1$，$\lambda_2 = -q^{-1}$，其中 q 为某个参数，则(3.6.9)式可重新标度为：

$$b = b^{-1} + (q - q^{-1})I \qquad (3.6.10)$$

它的图示为：

$= \quad + w \quad , \quad w = (q - q^{-1})$

(3.6.11)

也就是说上交叉可以用下交叉加上不交叉表示出来。显然当 $q = 1$ 时，$b = P$ 即回到置换群。由于(3.6.5)式形式对置换群 P_{ij} 也成立，所以辫子群是 P 的推广，并满足(3.6.7)式，从这个意义上说，(3.6.7)式解中含有另外参数 q 是非常关键的。因此，第二章中 R 矩阵中包含 q(见(2.1.55)式)的 YBE 的解，当谱参数趋于无穷时，就是 BGR，并且属于(3.6.5)式的情况。这种 q 依赖关系导致了 YBE 解的渐近行为越出了置换算符范畴。

辫子群有很长历史，它本来是独立于 YBE 的。实际上用线、结等讨论纽结(knot)理论甚至可以独立于辫子群，但经过数学家的努力，纽结理论已经与辫子群密切结合起来。自从 YBE 理论发展起来，它们又与 YBE 的渐近行为相联系。Birman，Jones，Kauffman 等人在这方面做了大量工作，由于这方面内容太多，不拟在本书中介绍。有兴趣的读者可参阅文献[12，13]。这里仅就某些物理上感兴趣的问题作一些说明。

由于 b(BGR)是 $\check{R}(u)$ 当 $u\rightarrow\infty$ 的渐近行为，所以 b_{ij}^{kl} 仅使依赖于辅助空间(例如自旋空间)。它的地位就是 S 矩阵中仅依赖于分立自由度的部分，而整个 $\check{R}$ 矩阵依赖于动量(谱参数)，如果可以分离变量，那么求解 YBE 就会变得简单。可首先求解 BGR，得到 b，然后设法引进依赖于谱参数 u 的函数，将这些未知函数与 b 的独立幂次相结合，代入 YBE 再加以确定。这种方法有些像解薛定谔方程的过程：首先求出渐近解(不过现在这种渐近解仅依赖于自旋部分)，再去决定"径向"部分。不过现在"径向"方程不是微分方程，而是 YBE 这种代数方程。这种方法称为杨-巴克斯特化[14, 15]，以后再仔细讨论这个问题。

参 考 文 献

1. 朱洪元. 量子场论. 北京：科学出版社，1960
2. Berestetskil V B, Lifshitz E M, Pitaevskii L P. Relativistic Quantum Theory. London: Pergamon Press, 1968
3. de Vega H J, Eichenherr H, Mellet J M. Nucl Phys, 1984, B240:377
4. Jimb M, ed. Yang-Baxter Equation in Integrable Systems. Singapore: World Scientific Publ Co Ltd, 1990
5. Zamolodchikov A B, Zamalodchikov AL B. Ann Phys, 1979, 120:253
6. Ghoshal S, Zamolodchikov A B. Int J Mod Phys, 1994, AP:3841
7. Korepin V E, Bogoliubov N M, Izergin A G. Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Function. London: Cambridge University Press, 1993
8. Ge M L, Wang Y W. Topological Term, Berry's Phase and Two-Particle Confinement Picture Associated with YBE. In: Ling J Q etal, eds. Proceedings of International Symposium on Advanced Topics of Quantum Physics. Beijing: Science Press, 1992
9. Baxter R J. Exactly Solved Models in Statistical Mechanics. London: Academic Press, 1982
10. Mezincescu L, Nepomeche R I. Integrable Higher-Spin Chain With $SU_q(2)$ Symmetry. In: Curtright T, Failie D, Zachos C, eds. Singapore: World Scientific Publ Co Ltd, 1991

11. Yang C N. Phys Rev, 1968, 168:1920
12. Kaffman L H. Knots and Physics. Singapore: World Scientific Publ Co Ltd. 1991
13. Yang C N, Ge M L, eds. Braid Group, Knot Theory and Statistical Mechanics (Ⅰ and Ⅱ). Singapore: World Scientific Publ Co Ltd, 1989 and 1994
14. Jones V F R. Commun Math Phys, 1987, 125:459
15. Ge M L, Wu Y S, Xue K. Int J Mod Phys, 1991, 6A:3735
Cheng Y, Ge M L, Xue K. Commun Math Phys, 1991, 136:195

第 四 章

Yangian 对称性

当给定 YBE 的一个解$\check{R}(u)$矩阵时，通过 RTT 关系可以得到辅助空间中的矩阵元$T_{ab}(u)$之间的对易关系，也就是说 RTT 关系规定了作为量子算符的$T_{ab}(u)$的代数关系。这种代数常常是不封闭的，形成无穷维代数，但由有限个生成元生成。当$\check{R}(u)$矩阵为有理解时，这种代数称为 Yangian。它是由 V. G. Drinfeld 在 1985 年首先引入的，在 Yang 后面加 ian 是为了纪念杨振宁教授在该研究领域的重大贡献。Yangian 属于数学上霍普夫(Hopf)代数[1~3]。从物理角度看，它描述了完全量子可积问题中一类非线性相互作用模型所特有的新型对称性。本书不着眼于普遍数学定理，而侧重于讨论在数学上最简单、但在物理上具有相当普遍意义的情况。本章将从 RTT 关系出发，较详细地讨论与$\check{R}(u) = uP + I$相联系，且P取为 4 维表示时的转移矩阵所形成的代数结构，及其与 Yangian 的关系。还将介绍 Yangian 的若干物理表示及应用。

§ 4.1 $GL(2)$的 RTT 关系与$Y(SL(2))$

为了以最简洁的方式描述与$SL(2)$相关的转移矩阵$T(u)$的代数结构，首先采用$\check{R}(u)$矩阵的有理解的最简单形式(3.2.2)式：$\check{R}(u) = uP + I$，并将置换算符P取成 4 维表示(3.2.3)式。此时相应的$T(u)$是2×2矩阵：

$$T(u)=\begin{bmatrix}T_{11}(u) & T_{12}(u)\\ T_{21}(u) & T_{22}(u)\end{bmatrix}=\sum_{n=0}^{\infty}u^{-n}T^{(n)} \tag{4.1.1}$$

其中

$$T^{(n)}=\begin{bmatrix}T_{11}^{(n)} & T_{12}^{(n)}\\ T_{21}^{(n)} & T_{22}^{(n)}\end{bmatrix},\ T_{ab}(u)=\sum_{n=0}^{\infty}u^{-n}T_{ab}^{(n)}\quad (a,\ b=1,\ 2) \tag{4.1.2}$$

将 $\check{R}(u)=uP+I$ 和(4.1.1)式代入 RTT 关系:

$$\check{R}(u-v)(T(u)\otimes T(v))=(T(v)\otimes T(u))\check{R}(u-v)$$

则有

$$(u-v)[T_{bc}(u),\ T_{ad}(v)]+T_{ac}(u)T_{bd}(v)-T_{ac}(v)T_{bd}(u)=0 \tag{4.1.3}$$

再将(4.1.2)式代入(4.1.3)式,比较独立谱参数 u 和 v 的同次幂项,得到:

$$[T_{ab}^{(0)},\ T_{cd}^{(n)}]=0\ (n\geqslant 0) \tag{4.1.4}$$

和

$$[T_{bc}^{(n+1)},\ T_{ad}^{(m)}]-[T_{bc}^{(n)},\ T_{ad}^{(m+1)}]+T_{ac}^{(n)}T_{bd}^{(m)}-T_{ac}^{(m)}T_{bd}^{(n)}=0\quad (n,\ m\geqslant 0) \tag{4.1.5}$$

由于(4.1.4)要求 $T^{(0)}$ 的矩阵元与 $T^{(n)}$ 的所有矩阵元都对易,所以 $T^{(0)}$ 可以选为 C 数矩阵,可写为:

$$T^{(0)}=\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{bmatrix} \tag{4.1.6}$$

这里取 λ 和 μ 为非零常数,并要求 $\det T^{(0)}\neq 0$。对于 $\mu=0$ 的情况,将专门进行仔细的讨论。当 $\det T^{(0)}\neq 0$ 时,存在矩阵 M,使得在相似变换 $T(u)\to MT(u)M^{-1}$ 下,将 $T^{(0)}$ 变为对角矩阵。并且由于

$$[\check{R}(u),\ M\otimes M]=0,$$

这个变换保持了 $T^{(0)}$ 的矩阵元为对角且 RTT 关系不变,从而

(4.1.6)式为一般形式。以下在(4.1.6)式基础上，由(4.1.3)式确定 $T_{ab}^{(n)}(n \geqslant 1, a, b = 1, 2)$ 间的对易关系。为方便起见引入：

$$\begin{cases} T_0^{(n)} = \lambda T_{22}^{(n)} + \mu T_{11}^{(n)}, \quad T_3^{(n)} = \lambda T_{22}^{(n)} - \mu T_{11}^{(n)} \\ T_+^{(n)} = T_{12}^{(n)}, \quad T_-^{(n)} = T_{21}^{(n)} \end{cases} \tag{4.1.7}$$

则(4.1.3)式可以展开成：

$$\begin{cases} [T_\alpha^{(1)}, T_\alpha^{(1)}] = [T_\alpha^{(1)}, T_\alpha^{(2)}] = 0 \ (\alpha = \pm, 3) \\ [T_3^{(1)}, T_\pm^{(k)}] = [T_3^{(k)}, T_\pm^{(1)}] = \pm\, 2\lambda\mu T_\pm^{(k)} \\ [T_+^{(1)}, T_-^{(k)}] = [T_+^{(k)}, T_-^{(1)}] = T_3^{(k)} \ (k = 1, 2) \end{cases} \tag{4.1.8}$$

$$\begin{cases} [T_0^{(1)}, T_\alpha^{(k)}] = [T_0^{(k)}, T_\alpha^{(1)}] = 0 \ (\alpha = \pm, 3, 0;\ k = 1, 2) \\ [T_0^{(2)}, T_\pm^{(2)}] = \pm\, (T_3^{(1)} T_\pm^{(2)} - T_3^{(2)} T_\pm^{(1)}) \\ [T_0^{(2)}, T_3^{(2)}] = 2\lambda\mu (T_+^{(1)} T_-^{(2)} - T_+^{(2)} T_-^{(1)}) \end{cases} \tag{4.1.9}$$

$$\begin{cases} T_\pm^{(n+1)} = (2\lambda\mu)^{-1} (\pm\, [T_3^{(2)}, T_\pm^{(n)}] + T_0^{(n)} T_\pm^{(1)} - T_0^{(1)} T_\pm^{(n)}) \\ T_3^{(n+1)} = [T_+^{(n)}, T_-^{(2)}] + (2\lambda\mu)^{-1} (T_0^{(n)} T_3^{(1)} - T_0^{(1)} T_3^{(n)}) \ (n \geqslant 2) \end{cases} \tag{4.1.10}$$

和

$$[T_\alpha^{(n)}, T_\alpha^{(m)}] = 0 \ (\alpha = \pm, 3, 0;\quad m, n \geqslant 2) \tag{4.1.11}$$

以及

$$\begin{cases} [T_\alpha^{(m)}, T_\beta^{(n)}] = [T_\alpha^{(1)}, T_\beta^{(m)}] \ (\alpha \neq \beta,\ \alpha, \beta = \pm, 3, 0;\ m < n,\ n > 2) \\ [T_0^{(n+1)}, T_\pm^{(m)}] - [T_0^{(n)}, T_\pm^{(m+1)}] \pm (T_3^{(m)} T_\pm^{(n)} - T_3^{(n)} T_\pm^{(m)}) = 0 \\ [T_0^{(n+1)}, T_3^{(m)}] - [T_0^{(n)}, T_3^{(m+1)}] + 2\lambda\mu (T_+^{(m)} T_-^{(n)} - T_+^{(n)} T_-^{(m)}) = 0 \\ [T_3^{(n+1)}, T_\pm^{(m)}] - [T_3^{(n)}, T_\pm^{(m+1)}] \pm (T_0^{(m)} T_\pm^{(n)} - T_0^{(n)} T_\pm^{(m)}) = 0 \\ [T_+^{(n+1)}, T_-^{(m)}] - [T_+^{(n)}, T_-^{(m+1)}] + (2\lambda\mu)^{-1} (T_0^{(m)} T_3^{(n)} - T_0^{(n)} T_3^{(m)}) = 0 \\ \quad (m < n,\ n \geqslant 2) \end{cases} \tag{4.1.12}$$

(4.1.8)式和(4.1.9)式限定了 $T^{(k)}$ $(k=1,2)$ 所满足的代数关系，(4.1.10)式是 $T^{(n)}$ $(n>2)$ 的递推关系。而(4.1.11)式与(4.1.12)式反映的是高阶 $T^{(n)}$ 之间的代数关系，上述关系并不是彼此完全独立的。经过繁杂的运算，可以由(4.1.8)式～(4.1.11)式导出(4.1.12)式，从而彼此独立的关系式是(4.1.8)式～(4.1.11)式，亦即(4.1.12)式不独立。

特别要指出的是(4.1.11)式中 $\alpha\neq 0$ 的情况。利用递推关系(4.1.10)式，不难证明它等价于：

$$\begin{cases}\left[T_{\pm}^{(m)},\ [T_{3}^{(2)},\ T_{\pm}^{(n)}]\right]+[T_{\pm}^{(m)},\ T_{0}^{(n)}]T_{\pm}^{(1)}=0\\ 2\lambda\mu\left[T_{3}^{(m)},\ [T_{+}^{(m)},\ T_{-}^{(2)}]\right]+[T_{3}^{(m)},\ T_{0}^{(n)}]T_{3}^{(1)}=0\ (m,\ n\geqslant 2)\end{cases}\tag{4.1.13}$$

在 $m=n=2$ 的特殊情况下，注意到(4.1.9)式，(4.1.13)式蜕化为：

$$\begin{cases}\left[T_{\pm}^{(2)},\ [T_{3}^{(2)},\ T_{\pm}^{(2)}]\right]=(T_{3}^{(1)}T_{\pm}^{(2)}-T_{3}^{(2)}T_{\pm}^{(1)})T_{\pm}^{(1)}\\ \left[T_{3}^{(2)},\ [T_{+}^{(2)},\ T_{-}^{(2)}]\right]=(T_{+}^{(1)}T_{-}^{(2)}-T_{+}^{(2)}T_{-}^{(1)})T_{3}^{(1)}\end{cases}\tag{4.1.14}$$

利用(4.1.8)式，求 $T_{\pm}^{(1)}$ 与(4.1.14)式中第二式的对易括号并利用 Jacobi 等式，可以导出：

$$\begin{aligned}&2\lambda\mu\left[T_{\pm}^{(2)},\ [T_{+}^{(2)},\ T_{-}^{(2)}]\right]\mp\left[T_{3}^{(2)},\ [T_{3}^{(2)},\ T_{\pm}^{(2)}]\right]\\ &\quad=2\lambda\mu(T_{+}^{(1)}T_{-}^{(2)}-T_{+}^{(2)}T_{-}^{(1)})\pm(T_{3}^{(1)}T_{\pm}^{(2)}-T_{3}^{(2)}T_{\pm}^{(1)})T_{3}^{(1)}\end{aligned}\tag{4.1.15}$$

(4.1.8)式、(4.1.14)式和(4.1.15)式是非常重要的，它们组成了相关于 $GL(2)$ 代数的 Yangian，记为 $Y(GL(2))$，将来对 $T(u)$ 的量子行列式加上限制，即成为相关于 $SL(2)$ 代数的 Yangian，记为 $Y(SL(2))$。要再强调指出，(4.1.15)式不是独立的，利用 Jacobi 恒等式，由(4.1.8)式与(4.1.14)式可以推出(4.1.15)式，亦即它是

(4.1.14)式与(4.1.18)式的结果，所以 $Y(SL(2))$ 的独立关系为(4.1.8)式、(4.1.14)式。而考虑到 Jcobi 等式，(4.1.14)式中只有一个式独立。以下讨论 $T(u)$ 的量子行列式。

正如在第三章所介绍的，由 RTT 关系，下式成立：

$$[\mathrm{tr}T(u),\ \mathrm{tr}T(v)] = 0$$

注意到(4.1.1)式，容易导出 $[\mathrm{tr}T^{(n)},\ \mathrm{tr}T^{(m)}] = 0$，也就是说，集合 $\mathrm{tr}T^{(n)}$ $(n = 0, 1, \cdots, \infty)$ 构成彼此对易集合。但是，一般说，$\mathrm{tr}T^{(n)}(n \geqslant 2)$ 和 $T^{(m)}$ $(m \geqslant 2)$ 的矩阵元 $T_{ab}^{(m)}$ 是不对易的。那么是否存在一个与 $T_{ab}^{(m)}$（任意元）都对易的可对易集合呢？答案是肯定的。它可以由 $\widetilde{\det}T(u)$ 生成，$\widetilde{\det}T(u)$ 称为量子行列式，它是通常 C 数矩阵行列式的推广。对 2×2 的 $T(u)$ 矩阵可定义为：

$$\widetilde{\det}T(u) = T_{11}(u)T_{22}(u-1) - T_{12}(u)T_{21}(u-1) \tag{4.1.16}$$

并且有：

$$[\widetilde{\det}T(u),\ T_{ab}(u)] = 0\ (a,\ b = 1,\ 2) \tag{4.1.17}$$

于是 $T(u)$ 的逆为：

$$(T(u))^{-1} = (\widetilde{\det}T(u))^{-1}\begin{pmatrix} T_{22}(u-1) & -T_{12}(u-1) \\ -T_{21}(u-1) & T_{11}(u-1) \end{pmatrix} \tag{4.1.18}$$

在证明(4.1.17)式与(4.1.18)式时，要反复使用(4.1.3)式，以及它的特殊情况：$u - v = 1$。$\widetilde{\det}T(u)$ 由(4.1.16)式表达，它包含了谱参数的移动，在 RTT 关系成立时，它与所有算符 $T_{ab}(v)$ 都对易，因此是整个代数的中心。将 $\widetilde{\det}T(u)$ 写成如下级数形式：

$$\widetilde{\det}T(u) = \sum_{n=0}^{\infty} u^{-n} c_n \tag{4.1.19}$$

由(4.1.2)式、(4.1.16)式和(4.1.19)式不难导出：

$$c_0 = \lambda\mu,\ c_1 = \lambda T_{22}^{(1)} + \mu T_{11}^{(1)} = T_0^{(1)} \tag{4.1.20}$$

和

$$c_n = T_0^{(n)} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{m+k=n \\ m,\,k\neq 0}} c_{m,k} T_0^{(m)} - \frac{1}{2}\sum_{\substack{m+k+s=n \\ m,\,k\neq 0}} c_{m,s} A^{(k,m)} \quad (n \geqslant 2) \tag{4.1.21}$$

其中

$$\begin{cases} c_{m,k} = (m+k-1)!/(m-1)!\,k! \\ A^{(k,m)} = (2\lambda\mu)^{-1}(T_3^{(k)}T_3^{(m)} - T_0^{(k)}T_0^{(m)}) + T_+^{(k)}T_-^{(m)} + T_-^{(k)}T_+^{(m)} \end{cases} \tag{4.1.22}$$

由(4.1.17)式和(4.1.19)式，易知：

$$[c_n,\ T_\alpha^{(m)}] = 0 \quad (\alpha = \pm,\ 3,\ 0) \tag{4.1.23}$$

以及

$$[c_n,\ c_m] = 0 \tag{4.1.24}$$

如果附加限制条件

$$\widetilde{\det}T(u) = 1$$

也就是要求 $c_0 = 1$，$c_n = 0\ (n > 1)$，这时由 RTT 关系决定的代数结构中由 $T^{(1)}$ 与 $T^{(2)}$ 组成的集合称为 $Y(SL(2))$。而在不附加限制条件时，c_n 组成对易族。如果取某个 c_n(或某几个 c_n 的线性组合)为哈密顿量时，则诸 $T_\alpha^{(n)}$ 算符均为该哈密顿量的对称(简并)算符。这时意味着该物理体系具有 Yangian 对称性。高阶算符 $T_\alpha^{(n)}$ ($n > 2$，$\alpha = \pm$，3)是不独立的，由(4.1.10)式容易看出，它们可由低阶的 $T_\alpha^{(1)}$，$T_\alpha^{(2)}$ ($\alpha \neq 0$) 和 $T_0^{(1)}$，$T_0^{(2)}$，…，$T_0^{(n-1)}$ 表示出来。

此外,需要指出的是,由 $\mathrm{tr}T(u)$和$\widetilde{\det}T(u)$分别生成的可对易族 $\mathrm{tr}T^{(n)}$与 c_n 彼此间是可对易的,但互不等价。因为如果 $\mathrm{tr}T^{(n)}$可以用诸 c_n 的某种组合表示的话,由于 c_n 与 $T_{ab}^{(m)}$对易,而 $\mathrm{tr}T^{(n)}$则不能对易,从而是矛盾的,但它们存在(4.1.21)式的关系。

从物理角度看很有意义的问题是:给定 Yangian 对称性,可否决定出哈密顿量?也就是说,已知 YB 系统的对称性,如何决定其哈密顿量?当然,涉及哈密顿量就必须依赖于 Yangian 的具体实现,因而更确切地说是某种具体实现将导致相应的哈密顿量,以上的分析已暗示了这个结论。在§4.3 中的(Ⅱ)部分,将提供这方面一个例证:Haldane-Shastry 模型的哈密顿量便可以由 $Y(gL(2))$ 的自旋$\frac{1}{2}$算符关系确定出来。

为了建立 $T(u)$矩阵元与 Yangian 生成元的对应关系,引入算符的集合 $\{I_\alpha,\ J_\alpha;\ \alpha=\pm,\ 3\}$。为了简便起见,取 $T^{(0)}$中的 $\lambda=\mu=1$,定义

$$\begin{cases} T_\pm^{(1)}=I_\pm, \quad T_3^{(1)}=2I_3 \\ T_\pm^{(2)}=-\dfrac{2}{h}J_\pm, \quad T_3^{(2)}=-\dfrac{4}{h}J_3 \end{cases} \tag{4.1.25}$$

其中 h 为任意常数。对 $SL(2)$情况,要求 $\widetilde{\det}T(u)=1$,由(4.1.20)式易知 $c_0=1$ 是满足的,从而要求 $T_0^{(1)}=0$。再由(4.1.21)式给出

$$\begin{aligned} c_2 &= T_0^{(2)}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(T_3^{(1)})^2+T_+^{(1)}T_-^{(1)}+T_-^{(1)}T_+^{(1)}\right) \\ &= T_0^{(2)}-\frac{1}{2}(2I_3^2+I_+I_-+I_-I_+) \\ &= T_0^{(2)}-I^2 \end{aligned} \tag{4.1.26}$$

其中 $\qquad I^2=I_1^2+I_2^2+I_3^2,\ I_\pm=I_1\pm \mathrm{i}I_2$

于是，从 $c_1 = 0$ 和 $c_2 = 0$ 可以定出：

$$T_0^{(1)} = 0,\ T_0^{(2)} = I^2 = I_3^2 + \frac{1}{2}(I_+ I_- + I_- I_+) \tag{4.1.27}$$

而对高阶的 $T^{(n)}$ $(n > 2)$ 的矩阵元通过递推关系(4.1.10)式和(4.1.11)式完全可以用 I_a 与 J_a $(\alpha = \pm,\ 3)$ 表示出来，而 $Y = \{I_\alpha,\ J_\alpha\}$ 所遵从的代数关系由(4.1.8)式、(4.1.14)式和(4.1.15)式决定。将(4.1.25)式代入(4.1.8)式得到：

$$\begin{cases}[I_\alpha,\ J_\alpha] = 0\ (\alpha = \pm,\ 3)\ (I_\pm = I_1 \pm \mathrm{i}I_2) \\ [I_3,\ I_\pm] = \pm I_\pm, \quad [I_+,\ I_-] = 2I_3\end{cases} \tag{4.1.28}$$

和

$$\begin{cases}[I_\alpha,\ J_\alpha] = 0\ (\alpha = \pm,\ 3)\ (J_\pm = J_1 \pm \mathrm{i}J_2) \\ [I_3,\ J_\pm] = [J_3,\ I_\pm] = \pm J_\pm \\ [I_+,\ J_-] = [J_+,\ I_-] = 2J_3\end{cases} \tag{4.1.29}$$

显然，(4.1.28)式就是李代数 $SL(2)$ 的代数关系。(4.1.28)、(4.1.29)式可写为更简洁的形式：

$$[I_\lambda,\ I_\mu] = \mathrm{i}\varepsilon_{\lambda\mu\nu}I_\nu,\ [I_\lambda,\ J_\mu] = \mathrm{i}\varepsilon_{\lambda\mu\nu}J_\nu(\lambda,\ \mu,\ \nu = 1,\ 2,\ 3) \tag{4.1.30}$$

而(4.1.14)式与(4.1.15)式相应地变为：

$$\begin{cases}\big[J_\pm,\ [J_3,\ J_\pm]\big] = \dfrac{h^2}{4}(I_3J_\pm - J_3I_\pm)I_\pm \\ \big[J_3,\ [J_+,\ J_-]\big] = \dfrac{h^2}{4}(I_+ J_- - J_+ I_-)I_3\end{cases} \tag{4.1.31}$$

和不独立的关系式：

$$\begin{aligned}&\big[J_\pm,\ [J_+,\ J_-]\big] \pm 2\big[J_3,\ [J_3,\ J_\pm]\big] \\ &\quad = \frac{h^2}{4}\{(I_+ J_- - J_+ I_-)I_\pm \pm 2(I_3J_\pm - J_3I_\pm)I_3\}\end{aligned} \tag{4.1.32}$$

(4.1.28)式～(4.1.32)式定义了一个无穷维代数，称为$Y(SL(2))$，它由生成元 I_α 与 $J_\alpha(\alpha=\pm, 3)$ 生成。显然，$Y(SL(2))$ 包含一个子代数 $SL(2)$，以及另一组独立生成元 J_α，它所引起的对易关系越出了 $SL(2)$，生成了无穷维代数。$Y(SL(2))$ 是由上述转移矩阵 $T(u)$ 在 $\widetilde{\det}T(u)=1$ 的限制下生成的。对李代数 A 为子代数的 Yangian $Y(A)$的普遍形式是由 V. G. Drinfeld 定理给出的[1,2]。

Drinfeld 定理：

$Y(A)$是由生成元 I_λ 与 J_λ 组合的集合，其中$\{I_\lambda\}$组成单李代数，它们遵从如下代数关系：

$$[I_\lambda, I_\mu]=c_{\lambda\mu\nu}I_\nu, \quad [I_\lambda, J_\mu]=c_{\lambda\mu\nu}J_\nu \tag{4.1.33}$$

$$[J_\lambda, [J_\mu, I_\nu]]-[I_\lambda, [J_\mu, J_\nu]]=a_{\lambda\mu\nu\alpha\beta\gamma}\{I_\alpha, I_\beta, I_\gamma\} \tag{4.1.34}$$

$$\begin{aligned}&[[J_\lambda, J_\mu], [I_\sigma, J_\tau]]+[[J_\sigma, J_\tau], [I_\lambda, J_\mu]]\\&=(a_{\lambda\mu\nu\alpha\beta\gamma}c_{\sigma\tau\nu}+a_{\sigma\tau\nu\alpha\beta\gamma}c_{\lambda\mu\nu})\{I_\alpha, I_\beta, J_\gamma\}\end{aligned} \tag{4.1.35}$$

其中 $c_{\lambda\mu\nu}$是 A 的全反对称张量，当取群度规为 $g_{ab}=\delta_{ab}$ 时，$c_{\lambda\mu\nu}$就是结构常数。

$$a_{\lambda\mu\nu\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{4!}c_{\lambda\alpha\sigma}c_{\mu\beta\tau}c_{\nu\gamma\rho}c_{\sigma\tau\rho} \tag{4.1.36}$$

$$\{x_1, x_2, x_3\}=\sum_{i\neq j\neq k}x_ix_jx_k$$

有人把(4.1.35)式称为 Yangian 的 Serre 关系，不过这不是 Drinfeld 原始的定义。以上诸式中相重指标表示求和。与(4.1.33)式～(4.1.35)式同时，还存在余乘法(co-product)的定义：

$$\Delta(I_\lambda)=I_\lambda\otimes 1+1\otimes I_\lambda$$

$$\Delta(J_\lambda)=J_\lambda\otimes 1+1\otimes J_\lambda+\frac{1}{2}\mathrm{i}\varepsilon_{\lambda\mu\nu}I_\nu\otimes I_\mu$$

以后再讨论余乘法问题。当 $A = SL(2)$ 时，情况最为简单，$c_{\lambda\mu\nu} = \mathrm{i}\varepsilon_{\lambda\mu\nu}(\lambda, \mu, \nu = 1, 2, 3)$ 为三维全反对称张量。(4.1.33)式就是(4.1.30)式，而(4.1.34)式的左端为

$$[J_\lambda, [J_\mu, I_\nu]] - [I_\lambda, [J_\mu, J_\nu]]$$

$$= \mathrm{i}\varepsilon_{\mu\nu\sigma}[J_\lambda, J_\sigma] + \mathrm{i}\varepsilon_{\lambda\mu\gamma}[J_\nu, J_\sigma] + \mathrm{i}\varepsilon_{\nu\lambda\sigma}[J_\mu, J_\sigma] \quad (4.1.37)$$

显然，当 $\lambda \neq \mu \neq \nu$ 和 $\lambda = \mu = \nu$ 时，上式为零，$\mu = \nu \neq \lambda$ 时亦为零。$\lambda = \mu \neq \nu$ 时，上式变为：

$$\mathrm{i}\varepsilon_{\lambda\nu\sigma}[J_\lambda, J_\sigma] + \mathrm{i}\varepsilon_{\nu\lambda\sigma}[J_\lambda, J_\sigma] = 0$$

类似地，当 $\lambda = \nu \neq \mu$ 时，也有同样的结果。于是对 $Y(SL(2))$，(4.1.34)式的左端恒为零。通过直接计算，可以推出(4.1.34)式的右端亦恒为零。也就是说，对 $Y(SL(2))$ 而言，由(4.1.33)式导致(4.1.34)式是恒等关系。这说明，对 $Y(SL(2))$，仅有(4.1.33)式和(4.1.35)式是独立代数关系。经过简化之后，不难发现(4.1.35)式正是(4.1.31)式和(4.1.32)式。对非 $SL(2)$ 的单李代数，则情况完全不同：(4.1.34)式不再是恒等式，对 $SL(n)$ $(n > 2)$ (4.1.34)式是独立的关系式，而(4.1.35)式不再是独立的，它可以由(4.1.33)式和(4.1.34)式导出。

观察(4.1.33)式～(4.1.35)式，容易看出，当 $\{J_\alpha\}$ 作如下变换时：

$$\tilde{J}_\alpha = J_\alpha + \lambda I_\alpha \ (\alpha = \pm, 3) \quad (4.1.38)$$

时，其中 λ 为任意常数，则由 I_α 与 $\tilde{J}_\alpha$ 组成的集合仍满足所有 $Y(SL(2))$ 的代数关系。事实上，这个性质对任意 $Y(A)$ 都对。

通过上面的讨论，已经建立了转移矩阵的矩阵元 $T_\alpha^{(n)}$ 与 $Y(SL(2))$ 的生成元 $\{I_\alpha, J_\alpha; \alpha = \pm, 3\}$ 之间的对应关系(4.1.25)式和(4.1.27)式。如果去掉条件(4.1.27)式，亦即取掉 $\widetilde{\det}T(u) =$

1的限制，则$T_{a}^{(n)}$对应的代数以$GL(2)$为子代数。同时，也必须注意，对$SL(2)$以外的单李代数，(4.1.25)式和(4.1.27)式不再成立，需要重新通过RTT关系确定$T(u)$的矩阵元与$Y(A)$的对应关系。V.G.Drinfeld已经证明[3]，由RTT关系限制的$T_{ab}^{(n)}$可以决定出一系列算符，在$\widetilde{\det}\, T(u)=1$条件下，对$SL(N)$，它们同构于$Y(SL(N))$。并且由$T^{(n)}(n\leqslant 2)$的矩阵元及相应的代数结构决定$Y(SL(N))$。当然，由于当$N\geqslant 3$时，李代数的根图至少是二维的，这时只由正根及其反根不足以全部表达整个代数，必须引入Serre关系[2,3]。然而，正如在文献[4]中所指出的，如果从RTT关系出发，计算代数关系，就不必担心Serre关系，它会自动由RTT关系给出。这也是用RTT讨论问题的一大优点。一般情况下的具体讨论很费篇幅而且数学化，本书不再作进一步讨论，可参考Drinfeld的原始文献及有关文献[1～5]。

要强调的是，与物理模型相联系的是转移矩阵$T(u)$。哈密顿量可由$\mathrm{tr}T(u)$中的某个展开项给出，也可能由c_n给出。当哈密顿量由$\mathrm{tr}T^{(n)}$给出时，可以允许附加$\widetilde{\det}\, T(u)=1$的条件，不过由于$Y(SL(2))$的生成元一般不与$\mathrm{tr}T^{(n)}$对易，即表示这种哈密顿量不具有$Y(SL(2))$对称性。当哈密顿量由$c_n$给出时，自然不能再加以$\widetilde{\det}\, T(u)=1$的限制，但这时模型具有$Y(GL(2))$对称性。在构造$T(u)$矩阵时，建立$T^{(n)}$ $(n\leqslant 2)$与$\{I_\lambda\}$、$\{J_\lambda\}$之间的对应关系并不是特别困难的事。而直接验证高阶$T^{(n)}$ $(n>2)$所满足的代数关系是非常麻烦的。而Drinfeld的结果使得问题大大简化：只需要知道$\{I_\lambda\}$和$\{J_\lambda\}$就可以了，更高阶的算符可以自洽给出[1～3]。从物理角度看，重要的是在于用量子力学及场论等物理中已知的算符给出Yangian的实现，并进而探讨Yangian对称性会比过去熟悉的李代数多告知那些更有物理兴趣的结果。

(4.1.28)、(4.1.29)式与(4.1.31)式或(4.1.33)式与(4.1.35)式定义了算符$\boldsymbol{I}$与$\boldsymbol{J}$的量子对易关系，也即规定了量子

矢量空间中的运算，但它们没有规定量子空间中的张量运算。但量子空间中的张量运算是十分重要的，没有它，整个量子空间的运算便是不封闭的，为表现这种运算引入余乘法，用 Δ 来表示。

余乘积定义为：

$$\Delta(T_{ab}(u)) = \sum_c T_{ac}(u) \dot{\otimes} T_{cb}(u) \equiv T_{ac}(u) \dot{\otimes} T_{cb}(u) \tag{4.1.39}$$

其中$\dot{\otimes}$表示两个量子空间的直积，不要与 RTT 关系中辅助空间直积相混。Δ 运算的一个重要性质是：

$$\Delta(AB) = \Delta(A)\Delta(B) \tag{4.1.40}$$

为了解余乘积的含义，仍以(4.1.3)式为例。我们将证明，形如(4.1.39)式并具有(4.1.40)式运算形式的余乘积保证了(4.1.3)式（也就是 RTT 关系）量子张量空间仍然成立。将 Δ 作用在 $[T_{bc}(u), T_{ad}(v)]$上，得到：

$$\begin{aligned}
&\Delta([T_{bc}(u), T_{ad}(v)]) \\
&\quad = \Delta(T_{bc}(u))\Delta(T_{ad}(v)) - \Delta(T_{ad}(v))\Delta(T_{bc}(u)) \\
&\quad = (T_{bn}(u) \dot{\otimes} T_{nc}(u))(T_{am}(v) \dot{\otimes} T_{md}(v)) \\
&\qquad - (T_{an}(v) \dot{\otimes} T_{nd}(v))(T_{bm}(u) \dot{\otimes} T_{mc}(u))
\end{aligned}$$

注意算符直积公式

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$$

其中 A 与 C，B 与 D 的次序不可颠倒，则有

$$\begin{aligned}
\Delta([T_{bc}(u), T_{ad}(v)]) = {} & [T_{bn}(u), T_{am}(v)] \dot{\otimes} T_{nc}(u)T_{md}(v) \\
& + T_{am}(v)T_{bn}(u) \dot{\otimes} [T_{nc}(u), T_{md}(v)]
\end{aligned}$$

将上式中量子对易括号用(4.1.3)式代入，遂得：

$$
\begin{aligned}
&(u-v)\Delta([T_{bc}(u),\ T_{ad}(v)]) \\
&= (T_{am}(v)\otimes T_{mc}(v))(T_{bn}(u)\otimes T_{nd}(u)) \\
&\quad - (T_{am}(u)\otimes T_{mc}(u))(T_{bn}(v)\otimes T_{nd}(u)) \\
&= \Delta(T_{ac}(v))\Delta(T_{bd}(u)) - \Delta(T_{ac}(u))\Delta(T_{bd}(v))
\end{aligned}
$$

上式右端正与(4.1.3)式第二、三项取 Δ 后抵消，因此得出结论：(4.1.3)式对余乘积运算是不变的，因而保证了它在量子张量空间运算的封闭性。将(4.1.39)式与(4.1.40)式应用于(4.1.7)式诸量，将 $T_{ab}^{(\alpha)}(u)$ $(\alpha=0,\ \pm,\ 3)$ 对 u 的展开式只取到 u^{-2} 即可：

$$
\begin{cases}
\Delta(T_{ab}^{(0)}) = \sum\limits_{c} T_{ac}^{(0)}\otimes T_{cb}^{(0)} \\
\Delta(T_{ab}^{(1)}) = \sum\limits_{c} (T_{ac}^{(1)}\otimes T_{cb}^{(0)} + T_{ac}^{(0)}\otimes T_{cb}^{(1)}) \\
\Delta(T_{ab}^{(2)}) = \sum\limits_{c} (T_{ac}^{(2)}\otimes T_{cb}^{(0)} + T_{ac}^{(0)}\otimes T_{cb}^{(2)} + T_{ac}^{(1)}\otimes T_{cb}^{(1)})
\end{cases}
\tag{4.1.41}
$$

取 $\lambda=\mu=1$，$T^{(0)}$ 为单位矩阵，$h=1$，则(4.1.41)第一式给出 $\Delta(1)=1\otimes 1$，自然成立。后两式变为：

$$
\begin{cases}
\Delta(T_{ab}^{(1)}) = T_{ab}^{(1)}\otimes 1 + 1\otimes T_{ab}^{(1)} \\
\Delta(T_{ab}^{(2)}) = T_{ab}^{(2)}\otimes 1 + 1\otimes T_{ab}^{(2)} + \sum\limits_{c} T_{ab}^{(1)}\otimes T_{cb}^{(1)}
\end{cases}
\tag{4.1.42}
$$

将(4.1.25)式代入(4.1.42)式，并注意 $T_0^{(n)} = T_{11}^{(n)} + T_{22}^{(n)}$，$T_3^{(n)} = T_{22}^{(n)} - T_{11}^{(n)}$ $(n=1,\ 2)$，则有：

$$\begin{cases}\Delta(I_\alpha)=I_\alpha\otimes 1+1\otimes I_\alpha\ (\alpha=\pm,\ 3)\\ \Delta(J_\pm)=J_\pm\otimes 1+1\otimes J_\pm\pm\frac{h}{2}(I_3\otimes I_\pm-I_\pm\otimes I_3)\\ \qquad -\frac{h}{4}(I_\pm\otimes T_0^{(1)}+T_0^{(1)}\otimes I_\pm)\\ \Delta(J_3)=J_3\otimes 1+1\otimes J_3+\frac{h}{4}(I_+\otimes I_- - I_-\otimes I_+)\\ \qquad -\frac{h}{4}(I_3\otimes T_0^{(1)}+T_0^{(1)}\otimes I_3)\end{cases}\tag{4.1.43}$$

与

$$\begin{cases}\Delta(T_0^{(1)})=T_0^{(1)}\otimes 1+1\otimes T_0^{(1)}\\ \Delta(T_0^{(2)})=T_0^{(2)}\otimes 1+1\otimes T_0^{(2)}+2I_3\otimes I_3+I_+\otimes I_-\\ \qquad +I_-\otimes I_++\frac{1}{2}T_0^{(1)}\otimes T_0^{(1)}\end{cases}\tag{4.1.44}$$

由 $I_\pm=I_1+\mathrm{i}I_2$, $J_\pm=J_1+\mathrm{i}J_2$, (4.1.43)式与(4.1.44)式,它可写为

$$\begin{cases}\Delta(I_\lambda)=I_\lambda\otimes 1+1\otimes I_\lambda\\ \Delta(J_\lambda)=J_\lambda\otimes 1+1\otimes J_\lambda+\frac{h}{2}\mathrm{i}\varepsilon_{\lambda\mu\nu}I_\nu\otimes I_\mu\\ \qquad -\frac{h}{4}(I_\lambda\otimes T_0^{(1)}+T_0^{(1)}\otimes I_\lambda)\end{cases}\tag{4.1.45}$$

对于 $Y(SL(2))$,由(4.1.27)式有 $T_0^{(1)}=0$, $T_0^{(2)}=I^2$, (4.1.45)式则蜕化为:

$$\begin{cases}\Delta(I_\lambda)=I_\lambda\otimes 1+1\otimes I_\lambda\\ \Delta(J_\lambda)=J_\lambda\otimes 1+1\otimes J_\lambda+\frac{h}{2}\mathrm{i}\varepsilon_{\lambda\mu\nu}I_\nu\otimes I_\mu\end{cases}\tag{4.1.46}$$

同时，(4.1.46)式中的第一式是显然的，第二式则可由(4.1.44)式的第一式导出：

$$\Delta(I^2) = \Delta(I_3)\Delta(I_3) + \frac{1}{2}(\Delta(I_+)\Delta(I_-) + \Delta(I_-)\Delta(I_+))$$

$$= I^2 \otimes 1 + 1 \otimes I^2 + 2I_3 \otimes I_3 + I_+ \otimes I_- + I_- \otimes I_+$$

对任意的单李代数 A，(4.1.46)式可以改写为普遍形式[1,2]：

$$\begin{cases} \Delta(I_\lambda) = I_\lambda \otimes 1 + 1 \otimes I_\lambda \\ \Delta(J_\lambda) = J_\lambda \otimes 1 + 1 \otimes J_\lambda + \dfrac{h}{2} c_{\lambda\mu\nu} I_\nu \otimes I_\mu \end{cases} \tag{4.1.47}$$

对 Yangian 常数 h 取为-2。

这里要指出的是，(4.1.41)式是最广泛形式的余乘积的定义，当 $T_0^{(n)}$ 不采取满足 $\widetilde{\det}\, T(u) = 1$ 条件时，余乘积用 I_λ 与 J_λ 表示时，可能不再具有(4.1.47)式的形式。同时，算符 I_λ、J_λ 所满足的对易关系式(4.1.33)～(4.1.35)与余乘积形式(4.1.43)式组成一个整体。当改变对易关系时，如恰当地改变余乘积形式，其整体仍可能满足霍普夫代数的要求。

以上扼要地以一些具体例子的形式介绍了 Yangian 的基本含义。以下将通过一些具体物理实现介绍 Yangian 的物理含义，并进而对 Yangian 加深了解。

§4.2 RTT 的四维流形式

上面讨论过形如 $\check{R}(u) = uP + I$ 的 $\check{R}$ 矩阵所决定的 RTT 关系，当自旋为 1/2 时，P 作为交换相邻空间 1 与 2 的自旋的算符可写为：

$$P_{12} = \frac{1}{2}I + 2\sum_{i=1}^{3} t_i(1)t_i(2), \quad t_i = \frac{1}{2}\sigma_i \tag{4.2.1}$$

其中 $\sigma_i(1)$ 与 $\sigma_i(2)$ 是分别作用在空间 1 与空间 2 上的泡利矩阵。易知

$$[t_j(a), t_k(b)] = \mathrm{i}\delta_{ab}\varepsilon_{jkl}t_l(a) \quad (a, b = 1, 2) \tag{4.2.2}$$

则 RTT 关系可写为：

$$R_{12}(u - v)\overset{1}{T}(u)\overset{2}{T}(v) = \overset{2}{T}(v)\overset{1}{T}(u)R_{12}(u - v) \tag{4.2.3}$$

其中

$$\overset{1}{T} = T \otimes 1, \overset{2}{T} = 1 \otimes T \tag{4.2.4}$$

将(4.2.1)式代入(4.2.3)式遂得：

$$(u - v)\left(P_{12}\overset{1}{T}(u)\overset{2}{T}(v) - \overset{1}{T}(v)\overset{2}{T}(u)P_{12}\right)$$
$$= \overset{1}{T}(v)\overset{2}{T}(u) - \overset{1}{T}(u)\overset{2}{T}(v) \tag{4.2.5}$$

利用 $(P_{12})^2 = I$ 等性质，将上式左乘 P_{12}，则有：

$$(u - v)[\overset{1}{T}(u), \overset{2}{T}(v)] = P_{12}\left(\overset{1}{T}(v)\overset{2}{T}(u) - \overset{1}{T}(u)\overset{2}{T}(v)\right) \tag{4.2.6}$$

由于 $t_i(i = 1, 2, 3)$ 是通常自旋算符，引入四维矢量：

$$T_i(u) = \mathrm{tr}(t_iT(u)), T_0(u) = \mathrm{tr}T(u) \tag{4.2.7a}$$

将(4.2.6)左端乘以 $t_i(1)t_j(2)$，并对空间 1 与空间 2 分别取迹，并考虑到(4.2.1)式，得到：

$$(u - v)[T_i(u), T_j(v)]$$
$$= \mathrm{tr}_{12}t_i(1)t_j(2)P_{12}\left(\overset{1}{T}(v)\overset{2}{T}(u) - \overset{1}{T}(u)\overset{2}{T}(v)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(T_i(v)T_j(u) - T_j(u)T_i(v)\right) + 2\mathrm{tr}_{12}\{t_i(1)t_j(2)t_k(1)t_k(2)$$
$$\cdot (\overset{1}{T}(v)\overset{2}{T}(u) - \overset{1}{T}(u)\overset{2}{T}(v))\} \tag{4.2.7b}$$

注意 $\mathrm{tr}(t_i)=0$, $t_j t_k = \mathrm{i}\varepsilon_{jkl}t_l (j\neq k)$, $t_j^2=\frac{1}{4}I$, 稍经计算便得到

$$
\begin{aligned}
&(u-v)[T_i(u),\ T_j(v)]\\
&=\frac{1}{2}\big([T_i(v),\ T_j(u)]-[T_i(u),\ T_j(v)]\big)\\
&+\frac{\mathrm{i}}{4}\varepsilon_{ijk}\big(T_0(u)T_k(v)-T_0(v)T_k(u)\\
&+T_k(v)T_0(u)-T_k(u)T_0(v)\big)
\end{aligned}
\tag{4.2.8}
$$

另一方面,在(4.2.6)式中交换 u 与 v 则得到:

$$
(u-v)[\overset{1}{T}(v),\ \overset{2}{T}(u)]=P_{12}\big(\overset{1}{T}(v)\overset{2}{T}(u)-\overset{1}{T}(u)\overset{2}{T}(v)\big)
\tag{4.2.9}
$$

将(4.2.9)式与(4.2.6)式比较,知

$$
[\overset{1}{T}(u),\ \overset{2}{T}(v)]=[\overset{1}{T}(v),\ \overset{2}{T}(u)]
\tag{4.2.10}
$$

这是显然的,因为 $\overset{1}{T}$ 与 $\overset{2}{T}$ 分属不同辅助空间,而它们不能区分谱参数 u 与 v。

将(4.2.10)式左乘以 $t_i(1)t_j(2)$ 或 $t_i(1)$,并取 tr_{12},则有

$$
\begin{cases}
[T_i(u),\ T_j(v)]=[T_i(v),\ T_j(u)]\\
[T_i(u),\ T_0(v)]=[T_i(v),\ T_0(u)]
\end{cases}
\tag{4.2.11}
$$

将(4.2.11)式代入(4.2.8)式得到

$$
[T_i(u),\ T_j(v)]=\frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon_{ijk}\big(T_0(u)T_k(v)-T_0(v)T_k(u)\big)/(u-v)
\tag{4.2.12}
$$

如对(4.2.6)式左乘 $t_i(1)$,并对 1, 2 空间均取迹,可得到

$$
(u-v)[T_i(u),\ T_0(v)]
$$

$$= \mathrm{tr}_{12}\left\{\left(\frac{1}{2}t_i(1) + 2t_i(1)t_k(1)t_k(2)\right)\right.$$

$$\left.\cdot\left(\overset{1}{T}(v)\overset{2}{T}(u) - \overset{1}{T}(u)\overset{2}{T}(v)\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left([T_i(v), T_0(u)] - [T_i(u), T_0(v)]\right)$$

$$+ \mathrm{i}\epsilon_{ikl}\left(T_l(v)T_k(u) - T_l(u)T_k(v)\right) \qquad (4.2.13)$$

考虑到(4.2.12)式,便有:

$$[T_i(u), T_0(v)] = \mathrm{i}\epsilon_{ijk}\left(T_k(v)T_j(u) - T_k(u)T_j(v)\right)/(u-v) \qquad (4.2.14)$$

很容易将(4.2.12)式与(4.2.14)式写成统一的式子,令:

$$\begin{cases} j_0 = \frac{1}{2}T_0, \ j_k = T_k \ \ (k = 1, 2, 3) \\ j_\mu = g_{\mu\nu}j^\nu, \ g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\ (1, -1, -1, -1) \\ \epsilon_{0123} = 1 \end{cases} \qquad (4.2.15)$$

同时,对(4.2.3)式取迹,易知

$$[T_0(u), T_0(v)] = 0 \qquad (4.2.16)$$

于是(4.2.12)式、(4.2.14)式与(4.2.16)式即可写成:

$$[j_\mu(u), j_\nu(v)] = [j_\mu(v), j_\nu(u)]$$

$$= \frac{\mathrm{i}}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\frac{j^\rho(u)j^\sigma(v) - j^\rho(v)j^\sigma(u)}{u-v} \qquad (4.2.17)$$

这是整体转移矩阵所满足的 4 维流形式,注意流的指标 $\mu, \nu, \rho, \sigma = 0, 1, 2, 3$ 且具有洛伦兹度规。要注意的是这种流包含任意复参数,(4.2.17)式显然是通常圈(loop)代数的量子化推广,并由 RTT 关系限制出来,它的物理实现在高能物理有用途。

§ 4.3　自旋模型与 $Y(SL(2))$

由于 $SL(2)$ 可以有许多具体物理实现，现从最简单的自旋算符开始。

(1) XXX 模型和 $Y(SL(2))$ 的实现

自旋算符满足对易关系

$$[S_j^\alpha,\ S_k^\beta] = \mathrm{i}\delta_{jk}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}S_j^\gamma(\alpha,\ \beta,\ \gamma = 1,\ 2,\ 3;\ j,\ k = 1,\ 2,\ \cdots,\ N) \tag{4.3.1}$$

其中 α、β、γ 为自旋指标，j，k 表示格点位置。具有 N 个格点的自旋链上的总自旋为：

$$\boldsymbol{S} = \sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{S}_j \tag{4.3.2}$$

由(4.3.1)式易得总自旋满足对易关系：

$$[S^\alpha,\ S^\beta] = \mathrm{i}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}S^\gamma \tag{4.3.3}$$

由于局域转移矩阵 $L_n(u)$ 和整体转移矩阵 $T(u)$ 都遵从 RTT 关系，并且具有同一 $\check{R}(u)$ 矩阵。所以将前两节中的 $T(u)$ 换成 $L_n(u)$ 后(n 为格点指标)，所有公式都是正确的。由(4.1.25)式和(4.1.27)式给出的对应关系易将对应于 $Y(SL(2))$ 的 $L_n(u)$ 写成：

$$L_n(u) = 1 + u^{-1}\begin{pmatrix} -I_n^3 & I_n^+ \\ I_n^- & I_n^3 \end{pmatrix} + u^{-2}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}I_n^2 - J_n^3 & J_n^+ \\ J_n^- & \frac{1}{2}I_n^2 + J_n^3 \end{pmatrix} + \cdots \tag{4.3.4}$$

其中 $\{I_n^\alpha,\ J_n^\alpha;\ \alpha = \pm,\ 3\}$ 组成第 n 个格点处的 $Y(SL(2))$ 的生成元。如果对展开式(4.3.4)式取到 u^{-1} 项，并令 $\boldsymbol{I}_n = \boldsymbol{S}_n$，$\boldsymbol{S}_n$ 满足

(4.3.1)式，则

$$L_n(u) = 1 + u^{-1}\begin{pmatrix} -S_n^3 & S_n^+ \\ S_n^- & S_n^3 \end{pmatrix} \tag{4.3.5}$$

是 RTT 关系在第 n 格点处的解，也即 XXX 模型的局域转移矩阵。以前已介绍过，整体转移矩阵 $T(u)$ 可以由 $L_n(u)$ 表示为：

$$T(u) = \prod_{n=1}^{\widehat{N}} L_n(u) = L_N(u)L_{N-1}(u)\cdots L_1(u) \tag{4.3.6}$$

利用(4.1.16)式，可以计算出 $\left(S_n^2 = S(S+1) = \dfrac{3}{4}\right)$

$$\begin{cases} \widetilde{\det} L_n(u) = (L_n(u))_{11}(L_n(u-1))_{22} - (L_n(u))_{12}(L_n(u-1))_{21} \\ \qquad\qquad = f(u) \\ f(u) = u^{-1}(u-1)^{-1}\left\{u(u-1) - \dfrac{3}{4}\right\} \end{cases} \tag{4.3.7}$$

由于 RTT 关系中，$L_n(u)$ 可以允许差任意常数因子，从而可以引入：

$$L_n'(u) = (f(u))^{-1}L_n(u) \tag{4.3.8}$$

亦即 $\widetilde{\det} L_n'(u) = 1$。相应地，(4.3.6)式变为：

$$T'(u) = \prod_{n=1}^{\widehat{N}} L_n'(u) = f_{(u)}^{-N} \prod_{n=1}^{\widehat{N}} L_n(u) \tag{4.3.9}$$

由于可以证明成立：

$$\widetilde{\det} T(u) = \widetilde{\det} L_N(u) \cdot \widetilde{\det} L_{N-1}(u) \cdot \cdots \cdot \widetilde{\det} L_1(u) \tag{4.3.10}$$

从而知道必有

$$\widetilde{\det} T'(u) = 1$$

这样，可以确定，由(4.3.5)式、(4.3.8)式和(4.3.10)式给出的

$T'(u)$对应于 $Y(SL(2))$，亦即 $T'(u)$必有如下形式：

$$T'(u) = 1 + u^{-1}\begin{pmatrix} -I_3 & I_+ \\ I_- & I_3 \end{pmatrix} + u^{-2}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}I^2 - J_3 & J_+ \\ J_- & \frac{1}{2}I^2 + J_3 \end{pmatrix} + \cdots \tag{4.3.11}$$

将(4.3.5)式、(4.3.8)式代入(4.3.9)式，然后与(4.3.11)式比较，可以得出[6,7]：

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{S} = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{S}_j \tag{4.3.12}$$

$$\boldsymbol{J} = (-\mathrm{i}) \sum_{j>k}^{N} (\boldsymbol{S}_j \times \boldsymbol{S}_k) \tag{4.3.13}$$

(4.3.12)式与(4.3.13)式给出 $Y(SL(2))$的一种自旋为1/2的表示。它满足 Yangian 的代数关系(4.1.30)式～(4.1.33)式(可以直接验证)。(4.3.1)式是基本对易关系，对自旋 1/2 模型，S^{α} ($\alpha = \pm, 3$) 可以用费米子二次量子化算符表示为：

$$S^+ = \sum_{j=1}^{N} a_j^+ b_j,\ S^- = \sum_{j=1}^{N} b_j^- a_j,\ S^3 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} (a_j^+ a_j - b_j^+ b_j) \tag{4.3.14}$$

其中

$$a_j^+ = c_{j\uparrow}^+,\ a_j = c_{j\uparrow},\ b_j^+ = c_{j\downarrow}^+,\ b_j = c_{j\downarrow} \tag{4.3.15}$$

$c_{j\sigma}^+$ 与 $c_{j\sigma}$ 遵从费米子的反对易关系：

$$[c_{j\sigma}^+, c_{j\sigma}]_+ = \delta_{ij}\delta_{\sigma\sigma'}\quad (\sigma, \sigma' = \uparrow, \downarrow) \tag{4.3.16}$$

其中 $[A, B]_+ = AB + BA$。将(4.3.13)式改写为：

$$J_{\pm}=\mp\sum_{i\neq j}^{N}\varepsilon_{ij}S_i^{\pm}S_j^3,\ J_3=\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^{N}\varepsilon_{ij}S_i^{+}S_j^{-} \tag{4.3.17}$$

$$\varepsilon_{ij}=\begin{cases}1 & (i<j)\\ -1 & (i>j)\end{cases}$$

遂可将 J_a 用产生算符、湮没算符表出：

$$\begin{cases}J_{+}=\left(-\dfrac{1}{2}\right)\displaystyle\sum_{i\neq j}^{N}\varepsilon_{ij}a_i^{+}b_i(a_j^{+}a_j-b_j^{+}b_j)\\ J_{-}=\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i\neq j}^{N}\varepsilon_{ij}b_i^{+}a_i(a_j^{+}a_j-b_j^{+}b_j)\\ J_3=\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i\neq j}^{N}\varepsilon_{ij}a_i^{+}b_ib_j^{+}a_j\end{cases} \tag{4.3.18}$$

通过上述实现已经可以看出，$\boldsymbol{I}=\boldsymbol{S}$ 描述固定格点上自旋矢量的“转动”行为，而 $\boldsymbol{J}$ 则引起从一个格点迁移到另一个格点的行为。因此，$\boldsymbol{I}$ 一定组成封闭代数，而包含 $\boldsymbol{J}$ 的代数一定是无穷的，它使自旋从一个位置移到任意远处。所谓 Yangian 关系，是保证了这种移动-转动的自洽组合。

XXX 模型的哈密顿量由 $\mathrm{tr}T(u)$ 组成，可由 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\ln\mathrm{tr}T(u)|_{u=0}=\sum_{i=1}^{N}P_{i,i+1}$ 给出，当自旋为 1/2 时，遂为：

$$H_{\mathrm{XXX}}\sim\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{S}_i\cdot\boldsymbol{S}_{i+1} \tag{4.3.19}$$

由 $Y(SL(2))$ 的生成元的实现(4.3.12)式和(4.3.13)式，不难验证 $[H_{\mathrm{XXX}},\boldsymbol{I}]=0$，但 $[H_{\mathrm{XXX}},\boldsymbol{J}]\neq 0$，也就是说，XXX 模型不具有 $Y(SL(2))$ 的对称性。

为了具体说明(4.3.12)式与(4.3.13)式的物理意义，讨论总格点数 $N=2,3,4$ 的情况。将会看到，$Y(SL(2))$ 算符及其组合实际上是李代数空间的跃迁算符。熟知两个李代数表示 Λ_1 与 Λ_2 直

积并分解为若干个独立子空间的直和：

$$\Lambda_1 \otimes \Lambda_2 = \bigoplus_{i=1}^{M} E_i \tag{4.3.20}$$

在李代数意义上 $E_1, E_2, \cdots, E_M$ 间是独立的，李代数的运算是在给定权 E_i 内进行的。实现 E_i 与 E_{i+1} 间的跃迁算符就是由 $\boldsymbol{J}$ 组成的。

考虑两个自旋 1/2 的系统，其三重态与单态波函数分别对易 $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 1 \oplus 0$ 形式分解的两部分：

$$\begin{aligned}
&S = 1: \\
&\quad \psi_{1,1} = |\underset{1}{\uparrow}\underset{2}{\uparrow}\rangle \\
&\quad \psi_{1,0} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\underset{1}{\uparrow}\underset{2}{\downarrow}\rangle + |\underset{1}{\downarrow}\underset{2}{\uparrow}\rangle) \\
&\quad \psi_{1,-1} = |\underset{1}{\downarrow}\underset{2}{\downarrow}\rangle \\
&S = 0: \\
&\quad \psi_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\underset{1}{\uparrow}\underset{2}{\downarrow}\rangle - |\underset{1}{\downarrow}\underset{2}{\uparrow}\rangle)
\end{aligned} \tag{4.3.21}$$

其中 ψ_{S,S_z} 表示相应于总自旋 S 投影为 S_z 的态，箭号下面的数字表示粒子。现在问一个问题：在通常李代数范畴内，只能用 $I^{\pm}$ 改变 S_z 的值，即只能在 $S=1$ 里升、降。这在李代数中是个很普遍的情况：李代数线性算符不改变表示的权。那么什么样子的算符能将 $S=1$ 的态改变为 $S=0$ 的态，即在三重态与单态间引起跃迁呢？

答案是：(4.3.13)式给出的 $\boldsymbol{J}$ 算符就起着这样的作用。观察图 4.1：

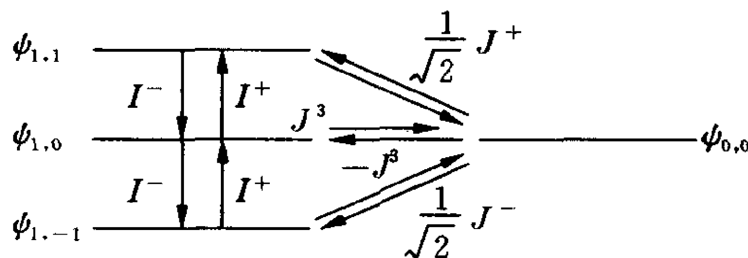


图 4.1

其中

$$\begin{cases} Q^{\pm} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} J^{\pm} = \mp \dfrac{1}{\sqrt{2}} (S_1^{\pm} S_2^3 - S_2^{\pm} S_1^3) \\ \quad = \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}} (S_2^{\pm} S_1^3 - S_1^{\pm} S_2^3) \\ J^3 = S_1^+ S_2^- - S_2^+ S_1^- \end{cases} \tag{4.3.22}$$

很容易验证图 4.1,例如:

$$Q^+ \psi_{1,-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} J^+ |\underset{1}{\downarrow} \underset{2}{\downarrow}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (S_2^+ S_1^3 - S_1^+ S_2^3) |\underset{1}{\downarrow} \underset{2}{\downarrow}\rangle$$

为方便将态归一为

$$S_m^3 |\underset{m}{\downarrow}\rangle = - |\underset{m}{\downarrow}\rangle, \; S_m^3 |\underset{m}{\uparrow}\rangle = |\underset{m}{\uparrow}\rangle$$

$$S_m^+ |\underset{m}{\downarrow}\rangle = |\underset{m}{\uparrow}\rangle, \; S_m^- |\underset{m}{\uparrow}\rangle = |\underset{m}{\downarrow}\rangle \text{ 等}$$

有(注意 $S_m^+ |\underset{m}{\uparrow}\rangle = S_m^- |\underset{m}{\downarrow}\rangle = 0$):

$$Q^+ \psi_{1,-1} = (-1) \frac{1}{\sqrt{2}} |\underset{1}{\downarrow} \underset{2}{\uparrow}\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} (-1) |\underset{1}{\uparrow} \underset{2}{\downarrow}\rangle$$

$$= \psi_{0,0}$$

$$Q^+ \psi_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (S_2^+ S_1^3 - S_1^+ S_2^3)(|\underset{1}{\uparrow} \underset{2}{\downarrow}\rangle - |\underset{1}{\downarrow} \underset{2}{\uparrow}\rangle)$$

$$= \frac{1}{2} (|\underset{1}{\uparrow} \underset{2}{\uparrow}\rangle + |\underset{1}{\uparrow} \underset{2}{\uparrow}\rangle) = |\underset{1}{\uparrow} \underset{2}{\uparrow}\rangle = \psi_{1,1}$$

$$J^3 \psi_{0,0} = (S_1^+ S_2^- - S_2^+ S_1^-) \frac{1}{\sqrt{2}} (|\underset{1}{\uparrow} \underset{2}{\downarrow}\rangle - |\underset{1}{\downarrow} \underset{2}{\uparrow}\rangle)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (- |\underset{1}{\downarrow} \underset{2}{\uparrow}\rangle - |\underset{1}{\uparrow} \underset{2}{\downarrow}\rangle) = - \psi_{1,0}$$

$$J^3 \psi_{1,0} = \frac{1}{\sqrt{2}} (S_1^+ S_2^- - S_2^+ S_1^-)(|\underset{1}{\uparrow} \underset{2}{\downarrow}\rangle + |\underset{1}{\downarrow} \underset{2}{\uparrow}\rangle)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(-|\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle)$$

$$= \psi_{0,0}$$

因此 $\boldsymbol{J}$ 实际上是两个自旋 1/2 组成的系统的跃迁算符，它实现了自旋单态与三重态间的转变。从这个例子可以看出，算符 $\boldsymbol{J}$ 的本质是改变李代数表示的权，也就是量子力学中的跃迁算符。再看三个自旋 1/2 组成的系统中权的变更情况。

三个粒子，每个粒子自旋为 1/2 时，有[19]：

$$\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2} = 1\oplus 0$$

$$\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2} = \underbrace{\frac{3}{2}\oplus\frac{1}{2}}_{\text{来自两个粒子自旋为 1 的态}}\oplus\frac{1}{2}$$

由于全同粒子对称性的要求，取线性组合后，定义：

$O_S^\alpha = \hat{J}_{23}^\alpha + \hat{J}_{13}^\alpha$ $(\alpha = \pm, 3)$（S 表示对称，图 2.8 中实线）

$O_A^\alpha = 3\mathrm{i}(2\hat{J}_{12}^\alpha - \hat{J}_{23}^\alpha + \hat{J}_{13}^\alpha)$（$A$ 表示反对称，图 2.8 中虚线）

其中为方便，将

$$\begin{cases}\hat{J}_{ij}^\pm = \mp\frac{1}{2}(S_i^\pm S_j^3 - S_j^\pm S_i^3) & (i<j)\ i, j = 1, 2, 3\\ \hat{J}_{ij}^3 = S_i^+ S_j^- - S_j^+ S_i^- \end{cases} \tag{4.3.23}$$

而用以标志总自旋 S，S_z 与两个粒子态原来的合自旋 s 的态记为 $|S, S_z; s\rangle$：

$$\left|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 1\right\rangle = |\underset{1}{\uparrow}\underset{2}{\uparrow}\underset{3}{\uparrow}\rangle$$

$$\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2};1\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}(|\underset{1}{\downarrow}\underset{2}{\uparrow}\underset{3}{\uparrow}\rangle+|\underset{1}{\uparrow}\underset{2}{\downarrow}\underset{3}{\uparrow}\rangle+|\underset{1}{\uparrow}\underset{2}{\uparrow}\underset{3}{\downarrow}\rangle)$$

$$\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2};1\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}(|\uparrow\downarrow\downarrow\rangle+|\downarrow\uparrow\downarrow\rangle+|\downarrow\downarrow\uparrow\rangle)$$

$$\left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2};1\right\rangle=|\downarrow\downarrow\downarrow\rangle$$

$$\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2};1\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{6}}(|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle+|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle-2|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle)$$

$$\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2};1\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{6}}(|\uparrow\downarrow\downarrow\rangle+|\downarrow\uparrow\downarrow\rangle-2|\downarrow\downarrow\uparrow\rangle)$$

$$\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2};0\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle-|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle)$$

$$\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2};0\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\downarrow\rangle-|\downarrow\uparrow\downarrow\rangle)$$

$$I^{\pm}\equiv I^{\pm}_{123}$$

上式中自旋的次序依次为 1，2 与 3。可以直接验证下式关系，见图 4.2。

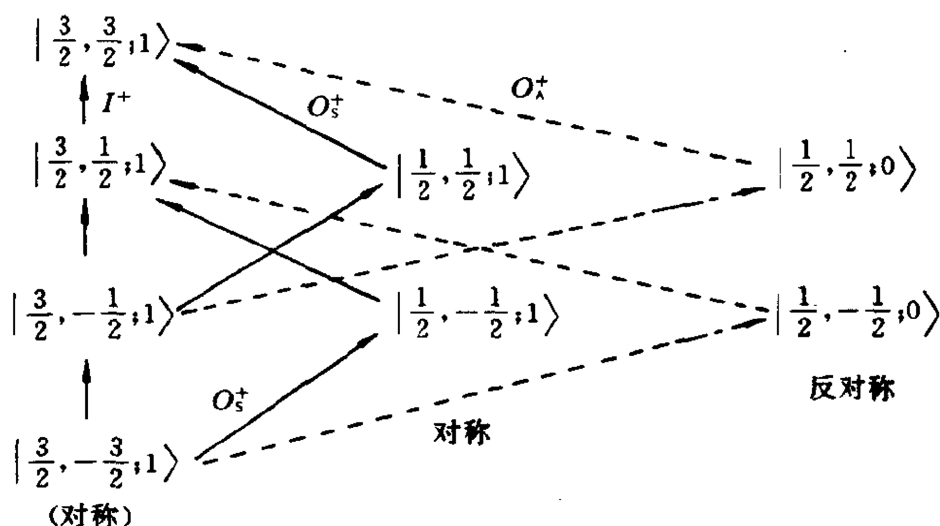


图 4.2

四个粒子时，先将两个粒子组成自旋三重态与单态，再取其自身直积：

$$\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2}=1\oplus 0$$

$$\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2}=(1\oplus 0)\otimes(1\oplus 0)$$

$$=\underbrace{2\oplus 1\oplus 0}_{\text{由1，1构成}}\oplus 1\oplus 1\oplus 0$$

上式右端第一个三重态 1 由 0，1 构成，而第二个三重态则由 1，0 构成。同是单态前面的由 1，1 构成，而最后的则有 0，0 构成。保留这些作为态的分类则有(前面两个数字表示 $2S$，S_z)：

$$|4,-2,1,1\rangle=|\underset{1}{\downarrow}\underset{2}{\downarrow}\underset{3}{\downarrow}\underset{4}{\downarrow}\rangle$$

$$|4,-1,1,1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow\rangle+|\downarrow\uparrow\downarrow\downarrow\rangle$$
$$+|\downarrow\downarrow\uparrow\downarrow\rangle+|\downarrow\downarrow\downarrow\uparrow\rangle)$$

$$|4,0,1,1\rangle=\frac{1}{\sqrt{6}}(|\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\rangle+|\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\rangle$$
$$+|\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\rangle+|\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\rangle$$
$$+|\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\rangle+|\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\rangle)$$

$$|4,1,1,1\rangle=\frac{1}{2}(|\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow\rangle+|\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow\rangle$$
$$+|\uparrow\uparrow\downarrow\uparrow\rangle+|\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow\rangle)$$

$$|4,2,1,1\rangle=|\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow\rangle$$

$$|2,-1,0,1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow\rangle-|\downarrow\downarrow\uparrow\downarrow\rangle)$$

$$|2, 1, 0, 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow\rangle - |\uparrow\uparrow\downarrow\uparrow\rangle)$$

$$|2, 0, 0, 1\rangle = \frac{1}{2}(|\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\rangle + |\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\rangle)$$

$$|2, -1, 1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\uparrow\downarrow\downarrow\rangle - |\downarrow\downarrow\downarrow\uparrow\rangle)$$

$$|2, 1, 1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow\rangle - |\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow\rangle)$$

$$|2, 0, 1, 0\rangle = \frac{1}{2}(|\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\rangle - |\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\rangle)$$

$$|2, 0, 0, 0\rangle = \frac{1}{2}(|\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\rangle + |\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\rangle)$$

$$|2, -1, 1, 1\rangle = \frac{1}{2}(|\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow\rangle + |\downarrow\downarrow\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\downarrow\downarrow\rangle - |\downarrow\downarrow\downarrow\uparrow\rangle)$$

$$|2, 0, 1, 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\rangle)$$

$$|2, 1, 1, 1\rangle = \frac{1}{2}(|\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\uparrow\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow\rangle - |\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow\rangle)$$

$$|0', 0, 1, 1\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}(2|\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\rangle + 2|\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\rangle - |\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\rangle)$$

引入算符（$\alpha=\pm, 3$）：

$$\begin{cases} O^{\alpha}_{S_{13}S_{24}}=\hat{J}^{\alpha}_{12}-\hat{J}^{\alpha}_{23}+\hat{J}^{\alpha}_{34}+\hat{J}^{\alpha}_{14} \\ O^{\alpha}_{A_{13}S_{24}}=2\hat{J}^{\alpha}_{13}+\hat{J}^{\alpha}_{12}+\hat{J}^{\alpha}_{23}-\hat{J}^{\alpha}_{34}+\hat{J}^{\alpha}_{14} \\ O^{\alpha}_{S_{13}A_{24}}=2\hat{J}^{\alpha}_{24}-\hat{J}^{\alpha}_{12}+\hat{J}^{\alpha}_{23}+\hat{J}^{\alpha}_{34}+\hat{J}^{\alpha}_{14} \end{cases} \tag{4.3.24}$$

不同态的跃迁见图 4.3。

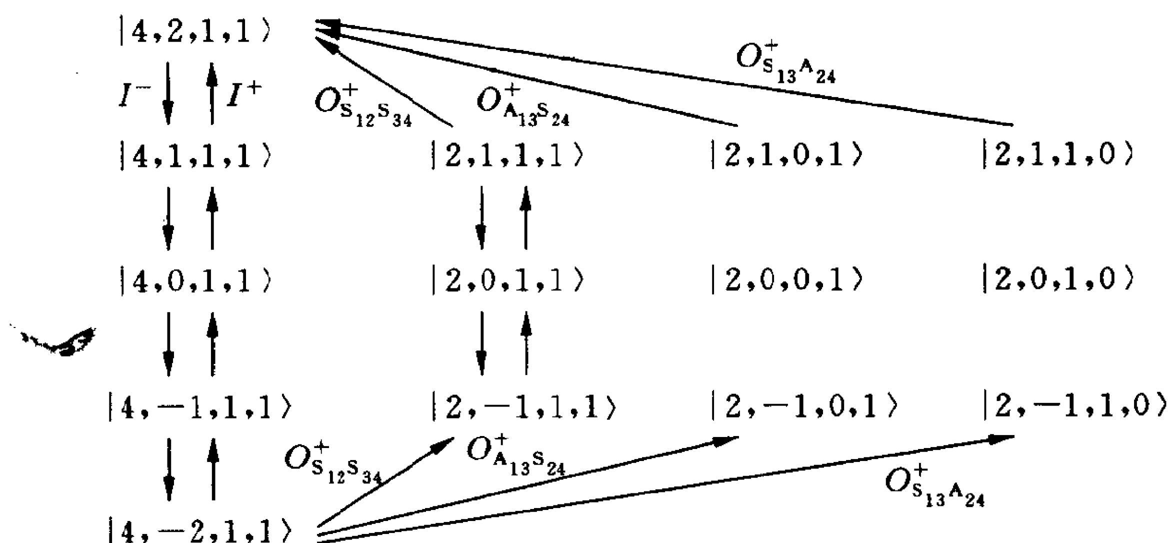


图 4.3

所有逆向变换为 O^-，横向均为相应的 O^3

2. 长程自旋相互作用实现与 Haldane-Shastry 模型

XXX 模型描写的是近邻相互作用的一维磁链问题，它的推广是 Haldane-Shastry (H-S)模型[6~10]。为了解 H-S 模型，首先讨论 J_λ 的长程相互作用实现。保持(4.3.12)式不变，即 $\boldsymbol{I}$ 不变，而将(4.3.13)式的 $\boldsymbol{J}$ 推广为：

$$J_{\pm}=\mp\sum_{i\neq j}^{N}W_{ij}S_i^{\pm}S_j^3,\quad J_3=\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^{N}W_{ij}S_i^{+}S_j^{-} \tag{4.3.25}$$

其中 W_{ij} 为待定参数。将(4.3.12)式和(4.3.25)式代入(4.1.29)式，易知必须有

$$W_{ij}=-W_{ji} \tag{4.3.26}$$

再将(4.3.12)式和(4.3.25)式代入(4.1.30)式和(4.1.31)式，并取 $h=-2$，得到如下限制条件：如果 $(S_i^{\pm})^2 \neq 0$，$(S_i^3)^2 \neq$ 常数，即非自旋 1/2 时，则要求 $(W_{ij})^2 = 1$。如果 $(W_{ij})^2 \neq 1$，W_{ij}是依赖于格点 i，j 的函数，则要求 $(S_i^{\pm})^2 = 0$，$(S_i^3)^2 =$ 常数，并且 W_{ij}要满足限制方程：

$$\Delta_{ijk} \equiv W_{ij}W_{jk} + W_{jk}W_{ji} + W_{ki}W_{kj} = 1 \ (i \neq j \neq k) \tag{4.3.27}$$

其中重复指标不表示求和。

对 $(W_{ij})^2 = 1$ 的情况，有 $W_{ij} = 1 \ (i < j)$，$-1 \ (i > j)$，当 $\boldsymbol{S}_i$ 具有自旋 1/2 时，(4.3.25)式就是(4.3.13)式，由此可见，(4.3.13)式对任意自旋都满足 Yangian 的代数关系。

对 $(W_{ij})^2 \neq 1$，自旋为 1/2。(4.3.27)式的一般解为[6~10]

$$W_{ij} = \frac{Z_i + Z_j}{Z_{ij}},\ Z_{ij} = Z_i - Z_j \tag{4.3.28}$$

其中 Z_k 为分立的复数集合，例如 $Z_k = \omega^k$，$\omega = e^{i\pi/N}$。(4.3.25)式的形式可以推广到更一般的形式。对 $SU(N)$ $(N > 2)$，定义：

$$I_a = \sum_{i=1}^{N} S_i^a,\ J_a = \sum_{i \neq j}^{N} W_{ij} f_{abc} S_i^b S_j^c \tag{4.3.29}$$

其中 I_a 为 $SU(N)$的基本表示的生成元，遵从对易关系

$$[S_i^a,\ S_j^b] = \delta_{ij} f_{abc} S_i^c \tag{4.3.30}$$

f_{abc}为 $SU(N)$的结构常数，满足 Jacobi 等式：

$$f_{abc}f_{dec} + f_{aec}f_{bdc} + f_{adc}f_{ebc} = 0 \tag{4.3.31}$$

为了确定 W_{ij}的限制条件，需要用到 Yangian 的代数关系(4.1.33)式~(4.1.35)式。正如在§4.2 节所述，这时(4.1.34)式不再是恒等式，而(4.1.35)式可以由(4.1.33)与(4.1.34)式导出。

由于要求 $W_{ij} = - W_{ji}$，即(4.3.26)式。而(4.1.34)式要求：

$$\Delta_{ijk} = W_{ij}W_{ik} + W_{jk}W_{ki} + W_{ki}W_{ij} = h^2 \tag{4.3.32}$$

它的证明较为复杂，为节约篇幅不再赘述。(4.3.32)式的一般解由(4.3.28)式给出($h = 1$)。当取 $Z_k = \omega^k$，$\omega = \exp(2\mathrm{i}\pi/N)$ 时，有

$$W_{ik} = \mathrm{i}\,\mathrm{ctg}\,\frac{(j-k)\pi}{N} \tag{4.3.33}$$

相应的 J_a 为：

$$J_a = \mathrm{i} \sum_{j \neq k}^{N} \mathrm{ctg}\left(\frac{(j-k)\pi}{N}\right) \cdot f_{abc} S_j^b S_k^c \quad (a,\ b,\ c = 1,\ 2,\ \cdots,\ 8) \tag{4.3.34}$$

由(4.3.29)式及(4.3.34)式给出的 Yangian 实现的显著特点是它包含了长程效应的函数 W_{ij}。相应的转移矩阵 $T(u)$ 不能由各个局域的 $L_n(u)$ 乘积得到。这种 Yangian 的具体实现描述了具有长程相互作用的 H-S 模型的对称性[8, 9]。

H-S 模型的哈密顿量族具有如下形式：

$$H_2 = \sum_{i,\ j}{}' \left(\frac{Z_i Z_j}{Z_{ij} Z_{ji}}\right)(P_{ij} - 1) \tag{4.3.35}$$

其中求和号 $\sum'$ 内代表求和时 $i \neq j$。

$$H_3 = \sum_{i,\ j,\ k}{}' \left(\frac{Z_i Z_j Z_k}{Z_{ij} Z_{jk} Z_{ki}}\right)(P_{ijk} - 1) \tag{4.3.36}$$

和

$$\begin{cases} H_4 = \sum\limits_{i,\ j,\ k,\ l}{}' \left(\dfrac{Z_i Z_j Z_k Z_l}{Z_{ij} Z_{jk} Z_{kl} Z_{li}}\right)(P_{ijkl} - 1) + H'_4 \\ H'_4 = \dfrac{1}{3} H_2 - 2 \sum\limits_{i,j}{}' \left(\dfrac{Z_i Z_j}{Z_{ij} Z_{ji}}\right)(P_{ij} - 1) \end{cases} \tag{4.3.37}$$

其中 $\sum'$ 表示求和指标 i，j，…均不相等，P_{ij}是格点 i 和 j 处的

"自旋"交换算符，并且（相重指标不求和）

$$\begin{cases} P_{ijk} = P_{ij}P_{jk} + P_{jk}P_{ki} + P_{ki}P_{ij} \\ P_{ijkl} = P_{ij}P_{jk}P_{kl} + (i,\ j,\ k,\ l\ \text{所有轮换项}) \end{cases} \tag{4.3.38}$$

对 $SU(2)$，P_{ij}可以表示为

$$P_{ij} = S_i^+S_j^- + S_i^-S_j^+ + 2S_i^3S_j^3 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + 2\boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{S}_j \tag{4.3.39}$$

当格点长度 $L = Na$ (a 为格点距离) $\rightarrow \infty$ 时，可以证明[8, 9]：

$$[H_m,\ J_a] = 0\ (a = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n) \tag{4.3.40}$$

其中 $m = 4$ 时为数值计算结果，当 N 为有限时，(4.3.40)式不成立。注意，$[H_m,\ I_a] = 0$ 是显然的，这样 H_m 便与 Yangian 对易，亦即具有 Yangian 对称性。

一个自然的问题是，如何构造整体转移矩阵 $T(u)$，并建立$T(u)$与$\{I_a,\ J_a\}$的对应关系，同时用 $T(u)$生成出哈密顿族 H_m。这个问题 H-S 并未解决得很好，对于自旋为 1/2 的模型，可以用本章前述的理论加以解决。如前所述，由于 $\widetilde{\det}T(u) = 1$ 条件的限制在本质上限制了 $T_0^{(n)}$，例如对 $Y(SL(2))$它限制了 $T_0^{(2)} = I^2 = (\boldsymbol{S})^2$，使得RTT 关系得以满足。如果解脱这一限制，那么 $\widetilde{\det}T(u)$ 与 $T_0^{(n)}$ 必须满足(4.1.21)式，而且 $\widetilde{\det}T(u)$ 与 $T_{ab}^{(n)}$ 对易。要强调的是，现在 c_n 并不能由 I_a，J_a 表示出来，而是由"更基本"的、构成 I_a、J_a 本身的自旋算符表达的，因而 c_n 可表为量子空间的算符，而在辅助空间的行为像"常数"矩阵，$T_0^{(n)}$ 此时也不能像 $SL(2)$那里用 I^2 表达，而是用依赖于格点的自旋算符表达，但 $T_0^{(n)}$ 必须满足 RTT 关系的要求。不加$\widetilde{\det}T(u) = 1$ 条件时，Yangian 用$Y(GL(2))$表示，这时 $T_a^{(n)}$ ($a = \pm,\ 3;\ n = 1,\ 2$) 与$\{I_a\}$、$\{J_a\}$的对应关系由(4.1.25)式给出（为方便取 $h = -2$），

但是 $T_0^{(1)}$ 与 $T_0^{(2)}$ 能由(4.1.9)式确定，而且高阶的 $T_a^{(n)}$ $(a=\pm, 3)$ 依赖于 $\{I_a\}$、$\{J_a\}$ 和 $T_0^{(1)}, \cdots, T_0^{(n-1)}$。因此，$T(u)$ 矩阵依赖于 $T_0^{(n)}$ 的构造。为此首先考虑 $T_0^{(n)}$，它必须通过 RTT 关系决定。可以构造出[10]：

$$T_0^{(2)} = \frac{1}{2}\sum_{i,j}{}'(W_{ij})^2(P_{ij}-1) \tag{4.3.41}$$

$$T_0^{(3)} = -\frac{1}{18}\sum_{i,j,k}{}'W_{ij}W_{jk}W_{ki}(P_{ijk}-1) - \frac{1}{2}T_0^{(1)}T_0^{(2)} \tag{4.3.42}$$

和

$$\begin{aligned} T^{(4)} = & -\frac{1}{32}\sum_{i,j,k,l}{}'(W_{ij}W_{jk}W_{kl}W_{li}+1)(P_{ijkl}-1) \\ & +\frac{1}{4}\sum_{i,j,k,l}{}'\left(W_{ij}W_{jk}P_{ik}P_{jl}-\frac{1}{2}W_{ij}W_{kl}P_{il}P_{jk}\right) \\ & -\sum_{i,j,k}{}'\left[\frac{1}{8}(2N-11)W_{ij}W_{jk}+\frac{3}{4}(W_{ij})^2\right]P_{ik} \\ & -DT_0^{(2)}-T_0^{(1)}T_0^{(3)}-\frac{1}{2}H_4''-\frac{3}{4}(T_0^{(2)})^2+\frac{1}{6}H_2 \end{aligned} \tag{4.3.43}$$

其中

$$\begin{cases} D = \dfrac{N}{2}+T_0^{(2)}-I^2+\dfrac{1}{8}(T_0^{(1)})^2 \\ H''_4 = -2\displaystyle\sum_{i,j}{}'\left(\frac{Z_iZ_j}{Z_{ij}Z_{ji}}\right)^2(P_{ij}-1) \end{cases} \tag{4.3.44}$$

注意 $T_0^{(1)}$ 与所有的 $T^{(n)}$ 矩阵元都对易，为简单可取为 c 数。在构造出 $T_0^{(n)}$ 的基础上，再利用递推关系式(4.1.10)式可以得到 $T_a^{(n)}$ $(a\neq 0, n>2)$，便可逐阶定出高阶 $T^{(n)}$ 的矩阵元。由于写起来非常繁琐，不再赘述。由(4.3.35)式～(4.3.37)式给出的 $H_m(m=2, 3,$

4）可以由 $\widetilde{\det}T(u)$ 生成出来，由(4.1.21)式可以计算出 $(c_1 = T_0^{(1)})$：

$$\begin{cases} c_1 = 常数 \\ c_2 = -2H_2 + A_2 \\ c_3 = -\dfrac{4}{9}H_3 + A_3 \\ c_4 = \dfrac{1}{2}H_4 + A_4 \end{cases} \tag{4.3.45}$$

其中

$$\begin{cases} A_2 = \dfrac{1}{2}\left(c_1 + \dfrac{1}{2}c_1^2\right) + \dfrac{1}{4}N(N+2) \quad A_3 = c_2 \\ A_4 = 2\sum_{i,j}{}'(W_{ij})^2 - \dfrac{3}{8}N\sum_{i,j}{}'(W_{ij})^2 \\ \qquad + \dfrac{1}{2}(3c_3 - c_2) - \dfrac{1}{2}c_1(c_3 - c_2) \end{cases} \tag{4.3.46}$$

(4.3.45)式表明，H-S 模型的哈密顿族可以由 $\widetilde{\det}T(u)$ 中的 c_m 得到，而 c_m 则由 $T_0^{(m)}$ 与低阶 $T_{ab}^{(m-1)}$ 等算符表示。通过解 RTT 关系，构造出 $\mathrm{tr}T^{(m)}$，以及 $T_{ab}^{(m-1)}$，便可得到 $T(u)$矩阵，进而计算其 c_m，发现正是 H_m 族。这种转移矩阵 $T(u)$是整体的，它不能再"分解"为诸局域转移矩阵的乘积。已知像 XXX 模型，那里通过局域转移矩阵 $L_n(u)$，便可生成出整体的 $T(u)$。现在由于长程作用函数 W_{ij} 是格点的函数，它不能因式化为每个格点处具有相同形式的$L_n(u)$的乘积。这也就是说，H-S 模型不存在局域转移矩阵。这个现象在 RTT 关系的解中是比较普遍的，以后还会涉及到。

§4.4 一维 Hubbard 模型与 $Y(SL(2))$对称性

应用(4.3.18)式所示的二次量子化表象，生成元 $\{I_a, J_a,$

$\alpha=\pm,3\}$ 也可以用以下形式实现[11]：

$$I_{+}=\sum_{i=1}^{N}a_i^{+}b_i,\ I_{-}=\sum_{i=1}^{N}b_i^{+}a_i,\ I_3=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(a_i^{+}a_i-b_i^{+}b_i) \tag{4.4.1}$$

$$\begin{cases} J_{-}=\sum\limits_{i,j}\theta_{ij}\,a_i^{+}b_j-U\sum\limits_{i,j}\varepsilon_{ij}I_i^{+}I_j^{3} \\ J_{-}=\sum\limits_{i,j}\theta_{ij}\,b_i^{+}b_j+U\sum\limits_{i,j}\varepsilon_{ij}I_i^{-}I_j^{3} \\ J_3=\frac{1}{2}\Big\{\sum\limits_{i,j}\theta_{ij}(a_i^{+}a_j-b_i^{+}b_j)+U\sum\limits_{i,j}\varepsilon_{ij}I_i^{+}I_j^{-}\Big\} \end{cases} \tag{4.4.2}$$

其中　$I_i^{+}=a_i^{+}b_i,\ I_i^{-}=b_i^{+}a_i,\ I_i^{3}=\frac{1}{2}(a_i^{+}a_i-b_i^{+}b_i)$

$$\theta_{ij}=\delta_{i,j-1}-\delta_{i,j+1},\ \varepsilon_{ij}=\begin{cases}1, & i<j\\ 0, & i=j\\ -1, & i>j\end{cases} \tag{4.4.3}$$

U 为耦合常数。与(4.3.18)式相比较，容易看出(4.4.2)式增加了含 θ_{ij} 项。直接计算表明，(4.4.1)式、(4.4.2)式满足(4.1.30)式～(4.1.32)式或(4.1.33)式与(4.1.35)式。整个计算是基本的，但要处处注意(4.3.16)式费米子的反对易关系，尤其是不同格子的费米子反对易。

这种 $Y(SL(2))$ 的实现有一个重要性质，就是与一维 Hubbard 模型的哈密顿量对易。熟知的哈密顿量为：

$$H_{\rm H}=-\sum_{i=1}^{N}(a_i^{+}a_{i+1}+a_{i+1}^{+}a_i+b_i^{+}b_{i+1}+b_{i+1}^{+}b_i)+U\sum_{i=1}^{N}\left(a_i^{+}a_i-\frac{1}{2}\right)\left(b_i^{+}b_i-\frac{1}{2}\right) \tag{4.4.4}$$

$$[H_{\rm H},I_\alpha]=0,\ [H_{\rm H},J_\alpha]=0\ (\alpha=\pm,3) \tag{4.4.5}$$

(4.4.5)式成立的条件是 $N\to\infty$，即无穷长链。(4.4.5)式第二式

证明较为繁琐,因此只列出要点。由于

$$[J_+, H_H] = A + BU + CU^2$$

其中 A, B 与 C 表示将(4.4.4)式、(4.4.2)式代入(4.4.5)式第二式后参数 U 相应幂次前的系数,例如

$$A = -\left[\sum_{i=1}^{N}(a_i^+ b_{i+1} - a_i^+ b_{i-1}),\right.$$

$$\left.\sum_{j=1}^{N}(a_j^+ a_{j+1} + a_{j+1}^+ a_j + b_j^+ b_{j+1} + b_{j+1}^+ b_j)\right]$$

$$= \sum_{i,j}\{(\delta_{i,j+1} a_j^+ + a_{j+1}^+ \delta_{ij}) b_{i+1} - a_i^+ (\delta_{i+1,j} b_{j+1} + \delta_{i,j} b_j)$$

$$- (\delta_{i,j+1} a_j^+ - \delta_{ij} a_{j+1}^+) b_{i-1} + a_i^+ (\delta_{i+1,j} b_{i+1} + \delta_{i,j} b_j)\}$$

$$= \sum_i \{a_i^+ b_{i+2} - a_i^+ b_i - a_i^+ b_{i+2} - a_i^+ b_i - a_i^+ b_i - a_i^+ b_{i-2}$$

$$+ a_i^+ b_i + a_i^+ b_{i-2}\} = 0$$

上式中用到了一维格点链为无穷长($N \to \infty$)的条件。用类似的计算可以证明当 $N \to \infty$ 时,B 与 C 均为零。比较繁琐的计算可以证明 J_+, J_3 与 H_H 对易:

$$[J_\pm, H_H] = [J_3, H_H] = 0$$

由于

$$[I_\pm, H_H] = [I_3, H_H] = 0 \tag{4.4.6}$$

而 $Y(SL(2))$ 由 I 与 J 组成,故有

$$[Y(SL(2)), H_H] = 0 \tag{4.4.7}$$

亦即 $Y(SL(2))$ 是一维 Hubbard 模型的对称,如果存在 $Y(SL(2))$ 表示的有限维表示,那么(4.4.7)式表明,H_H 存在该维数的简并度。即使在基态,也存在这种简并度。我们知道,简并度是与对称

性相联系的，现在 $Y(SL(2))$ 是一种过去未曾注意到的新的对称性，它提供了新的简并度。(4.4.7)式首先由文献[11]提出的。现在已经知道，$Y(SL(2))$ 存在有限维表示[12]，这样研究一维 Hubbard 模型基态的新的简并问题成为可能，这是个有兴趣的问题。通过这个例子，我们对 $Y(SL(2))$ 的本质有了比较具体的了解。

自旋 1/2 的相互作用磁链系统，每个格点上有 $SL(2)$ 局域对称性，经典图象是绕 z 轴旋转的不变性，这种对称性用 $\boldsymbol{I}$ 表达，它并不能产生粒子的移动。这种对称性对没有相互作用的个别自旋系统是成立的。现在要问：当该系统存在不同格点间的非线性相互作用时(自旋间耦合引起的 Hopping 过程)，这个系统还存在对称性吗？(4.4.6)式表明，一维 Hubbard 模型中，总自旋仍然是好量子数。但是，现在粒子能够跳动，仅用局域自旋转动算符来描述是不够的，必须引入 Hopping 算符，它就是 $\boldsymbol{J}$。$\boldsymbol{J}$ 的作用描述了粒子从格点 i 向相邻的格点 $i-1$ 或 $i+1$ 跳动，从而引起不同格点间自旋的耦合。显然 $\boldsymbol{J}$ 是不可能封闭的，因为可以一直跳到无穷远处。这种跳动的特点是，$\boldsymbol{J}$ 是引起相邻格点的作用算符，作用一次，在格点上移动一格，一直下去形成无穷维代数。例如从 i 跳到 $i+2$ 必须与从 i 跳到 $i+1$，再从 $i+1$ 跳到 $i+2$ 相自洽。从代数角度讲，无穷维代数可能由无穷个生成元构成，这时结构将比较复杂。现在这个无穷维代数只由跳动一个格的基本算符(与 $\sum_{i,j}\boldsymbol{S}_i\times\boldsymbol{S}_j$ 相配)不断操作形成。因此，Yangian 正是描述这种非线性相互作用模型的严格对称性；同时，Yangian 的引入大大简化了这种新型对称性的描述。因为 $Y(SL(2))$ 只涉及 6 个算符：$\boldsymbol{I}$ 与 $\boldsymbol{J}$，但却生成了整个无穷维代数。这种无穷的特性是容易理解的，因为在处理相互作用系统时，从微扰论的观点，必须用原始对称性算符作无穷展开，造成无穷项修正项，这是因为没有找到反映整个相互作用的

严格对称性，因而不能严格处理非线性问题。现在 Yangian 正是一大类非线性量子完全可积系统的严格对称性，而知道了系统的全部对称性意味着可以得到能谱的重要信息。历史上典型的例子是氢原子问题中的 Runge-Lenz 向量。由于该向量的存在，使得氢原子具有 $SO(4)$ 对称性，$SO(4) \sim SU(2) \otimes SU(2)$，它导致氢原子能谱 $\sim \frac{1}{n^2}$(n 为正整数)。而 Hubbard 模型已证明存在 $SO(4)$ 对称性，其中一个 $SU(2)$ 表现了局域自旋算符 $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{S}$ 的对称性，另一个 $SU(2)$ 由 η-pair 实现[9, 10]，这个 $SO(4)$ 对称性对任意维 Hubbard 模型都成立。现在知道，对一维 Hubbard 模型，除了对 $\boldsymbol{S}$ 的对称性外，另一个 $SU(2)$ 被推广，合为 $Y(SL(2))$。用 Yangian 对称性重新研究能谱结构，这是个刚刚发展的课题。值得提到的是，XXX 模型谱的实验研究已经获得相当的成功[13]。因而 Yangian 算符在跃迁行为中的作用是值得研究的。

§4.5 Yangian 的初等量子力学实现

上面 $Y(SL(2))$ 的实现是通过自旋算符实现的，或等效的用产生算符、湮没算符表示的。但在通常量子力学中，粒子运动的基本量是动量 $\boldsymbol{p}$(或 $\boldsymbol{x}$)与轨道角动量 $\boldsymbol{L}$。那么我们可否用它们实现 $Y(SL(2))$ 呢？答案是肯定的。现在扼要介绍南开大学研究组在这方面的成果。由于我们将讨论一般理论，首先讨论简单情况。

(1) 由三维运动的 $E(3)$ 代数构造 Yangian

三维空间运动的相空间由 6 个量组成，为 $\{M_1, M_2, M_3, p_1, p_2, p_3\}$，它们遵守泊松括号[14]

$$\begin{cases} \{M_\alpha, M_\beta\} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} M_\gamma \\ \{M_\alpha, p_\beta\} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} p_\gamma \\ \{p_\alpha, p_\beta\} = 0 \ (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3) \end{cases} \tag{4.5.1}$$

以上(及以下)相重指标代表求和。

注意,把 p_α 换成坐标 x_α,所有(4.5.1)式的关系形式是不变的。(4.5.1)式中有两个 Casimir 算符:

$$f_1 = p_\alpha^2 \ (\text{或 } x_\alpha^2),\ f_2 = p_\alpha M_\alpha (\text{或 } x_\alpha M_\alpha) \tag{4.5.2}$$

$$\{f_i, M_\alpha\} = 0 \ (i = 1, 2, \alpha = 1, 2, 3) \tag{4.5.3}$$

一般说(4.5.1)式并不要求 $\boldsymbol{p}$(或 $\boldsymbol{x}$)与 $\boldsymbol{M}$ 垂直,但它们的标积必为 Casimir,即

$$\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{M} = gp,\ p = (p_\alpha^2)^{1/2} \tag{4.5.4}$$

或

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{M} = gr,\ r = (x_\alpha^2)^{1/2} \tag{4.5.5}$$

可以定义新的量 $\boldsymbol{l}$,它与 $\boldsymbol{p}$(或 $\boldsymbol{x}$)垂直:

$$l_\alpha = M - gp_\alpha/p,\ p_\alpha M_\alpha = 0 \tag{4.5.6}$$

或(注意 l_α 为角动量)

$$l_\alpha = M - gx_\alpha/r,\ x_\alpha l_\alpha = 0 \tag{4.5.7}$$

现在看,当 $g \neq 0$ 时,(4.5.6)式(或(4.5.7)式能引起什么物理效果。以下将说明,常数 g 正是经典磁荷。将上述直角坐标系转化为球坐标系,如图 4.4 所示。

设 $\boldsymbol{p}$(或 $\boldsymbol{r}$)与 z 轴夹角为 θ,绕 z 轴旋 φ 角,则角动量 $\boldsymbol{L}$ 三个分量可用绕垂直于第 2 与第 3 轴的平面旋转的角动量算符 l_θ 和绕垂直于 1,2 平面旋转的角动量算符 l_φ 表示出来。根据图 4.4,有[14]

$$\begin{cases} p_1 = p\sin\theta\cos\varphi,\ p_2 = p\sin\theta\sin\varphi,\ p_3 = p\cos\theta \\ l_1 = l_\varphi\cot\theta\cos\varphi - l_\theta\sin\varphi \\ l_2 = l_\varphi\cot\theta\sin\varphi + l_\theta\cos\varphi \\ l_3 = -l_\varphi \end{cases} \tag{4.5.8}$$

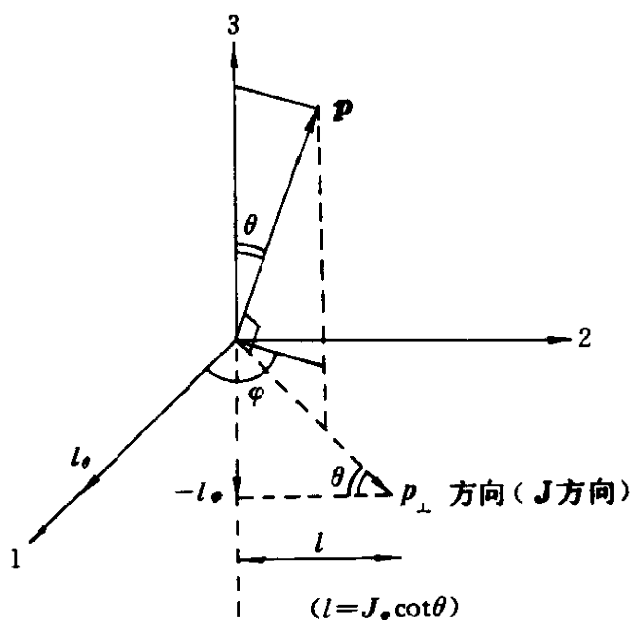


图 4.4

其中θ取值为$|\theta|\leqslant\pi/2$，$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$。$\boldsymbol{l}$与$\boldsymbol{p}$垂直。将(4.5.8)式、(4.5.7)式代入(4.5.1)式、(4.5.6)式，注意 Casimir 与任意元素的泊松括号为零，易得：

$$\begin{aligned}&\{\theta,\ \varphi\}=\{l_\theta,\ \varphi\}=\{l_\varphi,\ \theta\}=0\\&\{\theta,\ l_\theta\}=\{\varphi,\ l_\varphi\}=1\end{aligned}\tag{4.5.9}$$

$$\{l_\theta,\ l_\varphi\}=g\sin\theta\tag{4.5.10}$$

由(4.5.9)式可以看到，l_θ、l_φ分别为角度θ与φ的共轭动量，但两个转动算符间的次序不可颠倒，这个效应反映了$g\neq 0$。按一般微分几何理论，作二次型：

$$\text{当}\quad \{q^i,\ q^j\}=0,\ \{q^i,\ \pi_j\}=\delta^i_j,\ \{\pi_i,\ \pi_j\}=F_{ij}(x)\tag{4.5.11}$$

当$F=F_{ij}\mathrm{d}q^i\wedge\mathrm{d}q^j$封闭即$\mathrm{d}F=0$时，原来的二次型$\mathrm{d}p_i\wedge\mathrm{d}q^i$应修改为：

$$\Omega=\mathrm{d}\pi_i\wedge\mathrm{d}q^i+F_{ij}\mathrm{d}q^i\wedge\mathrm{d}q^j=\mathrm{d}\pi_i\wedge\mathrm{d}q^i+F\tag{4.5.12}$$

在物理上，$F_{ij}(x)$就是电磁场，$\pi_i = p_i + \frac{e}{c}A_i$ 为力学动量。$F_{ij}\mathrm{d}q^i \wedge \mathrm{d}q^j$ 为微分磁通量。现在将(4.5.9)式与(4.5.10)式代入(4.5.12)式，有

$$\Omega = \mathrm{d}J_\theta \wedge \mathrm{d}\theta + \mathrm{d}J_\varphi \wedge \mathrm{d}\varphi + g\sin\theta \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\varphi \tag{4.5.13}$$

其中

$$F = g\sin\theta \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\varphi \tag{4.5.14}$$

F 为磁场，它的通量为在球面上积分：

$$\oiint_{S^2} F = g \oiint_{S^2} \sin\theta \mathrm{d}\theta \wedge \mathrm{d}\varphi = g \cdot 4\pi \tag{4.5.15}$$

也就是说 g 为磁荷。这种经典磁荷表现为拓扑性质((4.5.15)式)。现在，(4.5.4)式或(4.5.5)式的物理意义很明确：当 $g \neq 0$ 时，导致正则共轭动量满足(4.5.10)式，即相当于引起电磁矢量势，它对应的场引起有散力线状磁通，导致磁单极的存在，g 遂为磁荷。因此，在以后讨论中，凡是用到(4.5.4)式或(4.5.5)式中 $g \neq 0$ 者即代表磁单极效应。

现在回到量子力学。此时有[15]：

$$\begin{cases} [M_\alpha, M_\beta] = \mathrm{i}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}M_\gamma \\ [M_\alpha, K_\beta] = \mathrm{i}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}K_\gamma \ \ (\text{或}[M_\alpha, x_\beta] = \mathrm{i}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}x_\gamma) \end{cases} \tag{4.5.16}$$

$$\begin{cases} K_\alpha M_\alpha = M_\alpha K_\alpha \\ [K_\alpha^2, M_\beta] = [x_\alpha^2, M_\beta] = [K_\alpha M_\alpha, M_\beta] \\ \qquad = [x_\alpha M_\alpha, M_\beta] = 0 \end{cases} \tag{4.5.17}$$

$$\boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{M} = gK, \ K = (\boldsymbol{K}^2)^{1/2} \text{ 为 Casimir} \tag{4.5.18}$$

现在引入算符

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{M} \tag{4.5.19}$$

$$\boldsymbol{J} = (\boldsymbol{M})^2\boldsymbol{K} \quad \left((\boldsymbol{M})^2 = \sum_{\alpha=1}^{3}(\boldsymbol{M}_\alpha)^2\right) \tag{4.5.20}$$

易知

$$[I_\alpha, J_\beta] = \mathrm{i}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}J_\gamma \tag{4.5.21}$$

即满足(4.1.33)式。而 J_α 间的对易关系为：

$$[J_\alpha, J_\beta] = 2\mathrm{i}(\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{K})\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}J_\gamma - 2\mathrm{i}K^2(\boldsymbol{M})^2\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}M_\gamma \tag{4.5.22}$$

考虑到(4.5.18)，得到

$$[J_\alpha, J_\beta] = 2\mathrm{i}gK\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}J_\gamma - 2\mathrm{i}K^2(\boldsymbol{M})^2\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}M_\gamma \tag{4.5.23}$$

由于 $(\boldsymbol{M})^2$ 不是代数的 Casimir，即不与所有元素对易，所以不构成封闭李代数。定义 $J_\pm = J_1 \pm \mathrm{i}J_2$，经过直接计算(所有计算公式都可以在文献[15]中找到)，发现下面关系成立：

$$\big[J_3, [J_+, J_-]\big] = (4K^2)I_3(J_- I_+ - I_- J_+) \tag{4.5.24}$$

$$\big[J_\pm, [J_3, J_\pm]\big] = (4K^2)I_\pm (J_\pm J_3 - I_\pm J_3) \tag{4.5.25}$$

$$\begin{aligned}&2\big[J_3, [J_3, J_\pm]\big] + \big[J_\pm, [J_\pm, J_\mp]\big] \\ &\quad = (4K^2)\{2I_3(J_\pm I_3 - I_\pm J_3) \mp I_\pm (I_- J_+ - J_- I_+)\}\end{aligned} \tag{4.5.26}$$

显然，它正是(4.1.31)式与(4.1.32)式当 $h^2 = (4K)^2$ 的情况，也就是(4.1.35)式。由于 K^2 为 Casimir，可取为常数。事实上，(4.5.24)式两端均等于：

$$\begin{aligned}\mp 8K^2(\boldsymbol{M})^2\{\pm M_3(M_\pm K_3 - M_3K_\pm) + M_3K_\pm + M_\pm K_3 \\ + \mathrm{i}M_\pm (M_1K_2 - M_2K_1)\}\end{aligned}$$

其中 $K_\pm = K_1 \pm \mathrm{i}K_2$。从对易关系来说，(4.5.24)式与(4.5.25)式及 $\boldsymbol{M}$ 定义了 Yangian。由于此时 T 矩阵与 I_α，J_α 存在简单关系

((4.1.25)式),当取 $\frac{1}{4}h^2 = 4K^2$,或为简单取 $4K^2 = 1$ 时,可以决定局域的 T 矩阵元,并按局域乘积可以引入整体 $\boldsymbol{J}'$ 算符为

$$\boldsymbol{J}' = \lambda \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{M}_i + \sum_{i>j}^{N} \boldsymbol{M}_i \times \boldsymbol{M}_j \tag{4.5.27}$$

其中 i 可理解为第 i 个粒子指标。(4.5.27)式与

$$\boldsymbol{I}' = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{M}_i \tag{4.5.28}$$

即为多粒子体系的 $Y(SL(2))$ 表达式,它是用粒子的算符 $\boldsymbol{M}_i$ 与 $\boldsymbol{K}_i$(或 $\boldsymbol{x}_i$)实现的。由于(4.5.27)式与(4.5.28)式可通过RTT关系定义,其余乘积可由(4.1.39)式定义。要特别强调的是,上面所有计算是对 $g \neq 0$ 进行的,这表示这样的Yangian的实现包含了磁单极效应。另外,可以直接验算,如果不使用(4.5.20)式的定义,而使用 $\boldsymbol{K}(\hat{\boldsymbol{M}})^2$,它也满足(4.5.24)式与(4.5.25)式。然而两者之差正是与Runge-Lenz向量有关的部分,可参见文献[15]。事实上,在处理氢原子的对称性时,由于采用了 $\frac{1}{r}$ 类型的作用势,哈密顿量与角动量、Runge-Lenz向量均对易,并且取了矢量 $\boldsymbol{K}(\hat{\boldsymbol{M}})^2 - (\hat{\boldsymbol{M}})^2\boldsymbol{K} = \boldsymbol{A}$,故形成封闭的李代数。现在这些条件不再满足,因而形成了无穷维代数。然而这种无穷维代数结构比较简单,它可用Yangian来表达。

这种对称的特性在坐标表象中更为明显。现回到磁单极的吴大峻-杨振宁解[16,17]问题。在有磁单极时,其角动量为

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{A}) - g\boldsymbol{r}/r \quad (e = 1)$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 在球坐标系中两个区域 R_a 与 R_b 的表达式为:

$$\begin{cases} (A_r)_a = (A_\theta)_a = 0,\ (A_\varphi)_a = \dfrac{g}{r\sin\theta}(1 - \cos\theta) \\ (A_r)_b = (A_\theta)_b = 0,\ (A_\varphi)_b = \dfrac{-g}{r\sin\theta}(1 + \cos\theta) \end{cases} \tag{4.5.29}$$

满足

$$[M_\alpha, M_\beta] = \mathrm{i}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}M_\gamma$$

且

$$\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{M} = -g \tag{4.5.30}$$

其中 g 为磁荷。有兴趣的是，由 J_α 构成的流代数(4.5.23)式右端第一项标出了磁单极的贡献。考虑球对称的电子-磁单极系统，这时球谐函数 Y_{lm} 应换成 $Y_{q,l,m}$[17]。通常的流的作用只改变 Δm，但(4.5.23)式右端第一项由于有 $\boldsymbol{J}$ 的作用，它改变 $\Delta l = \pm 1$，亦即产生偶极跃迁，这个现象的应用是值得思考的问题。

(2) $Y(SL(2))$的升降算符作用

在前面讨论的 H-S 模型和一维 Hubbard 模型中，Yangian 的作用是描述该物理体系的对称性，而 Yangian 还存在另一种直观的物理含义：它可以组成初等量子力学中能谱的升降算符(shift operators)。这方面的研究刚刚起步，本节只介绍一部分初步成果。

在初等量子力学中，已熟知角动量 $\boldsymbol{L}$ 的第三分量 L_3 的本征值(用 m 标记)可以通过 $L_\pm$ 作用在 L_3 的本征态上引起改变，即变为 $m\pm 1$。从而 $L_\pm$ 具有李代数固定权内不同 m 分量($m = L, L-1, \cdots, -L$)的升降算符的作用。那么对一个守恒量集合，例如 $\{H, L^2, L_3\}$，除 L_3 外，哈密顿量 H 与 L^2 的升降算符是什么呢？这是个非常有兴趣的问题。在量子力学中，一些特定势的哈密顿量，例如三维各向同性谐振子、氢原子等，这种升降算符问题已有很多讨论[18]，这里不再重复。我们关心的是从 Yangian 角度重新考察这一问题，说明它的根源来源于 Yangian 代数。

下面讨论一个普遍的结论。前面已经介绍过的 $Y(SL(2))$的生成元由 I_α, J_α ($\alpha = \pm, 3$) 组成，遵从对易关系

$$[I_3, I_\pm] = \pm I_\pm,\ [I_+, I_-] = 2I_3 \tag{4.5.31}$$

$$[I_3, J_\pm] = [J_3, I_\pm] = \pm J_\pm, \quad [I_\pm, J_\mp] = \pm 2J_3 \tag{4.5.32}$$

由上式和

$$I^2 = \sum_{i=1}^{3} I_i^2 = \frac{1}{2}(I_+ I_- + I_- I_+) + I_3^2 \tag{4.5.33}$$

易知

$$\begin{cases} [I^2, J_\pm] = \pm 2(I_3 J_\pm - J_3 I_\pm) \\ [I^2, J_3] = I_+ J_- - I_- J_+ - 2J_3 \end{cases} \tag{4.5.34}$$

并且成立：

$$[I_\alpha, \quad \boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{J}] = 0 \quad (\alpha = \pm, 3) \tag{4.5.35}$$

引入一个算符：

$$O_3(f) = I_+ J_- - I_- J_+ + fJ_3 - \frac{4}{4+f}(\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{J}) I_3 \tag{4.5.36}$$

其中 f 是某一参数。利用 $[I^2, I_\alpha] = 0$ 与(4.5.31)式及(4.5.32)式可推出：

$$[I^2, O_3(f)] = (f+4) O_3(f) + J_3(4I^2 - f^2 - 6f - 8) \tag{4.5.37}$$

以及

$$[I_3, O_3(f)] = 0 \tag{4.5.38}$$

当 I^2 与 I_3 的共同本征矢为 $|j, m\rangle$，且有

$$I^2 |j, m\rangle = q|j, m\rangle, \ I_3|j, m\rangle = m|j, m\rangle \tag{4.5.39}$$

可以将参数 f 的限制条件选为：

$$(4I^2 - f^2 - 6f - 8)|j, m\rangle = (4q - f^2 - 6f - 8)|j, m\rangle = 0 \tag{4.5.40}$$

亦即

$$f_\pm(q) = -3 \pm \sqrt{1+4q} \tag{4.5.41}$$

标记 $O_3(f_\pm(q)) = O_3^\pm(q)$，遂有

$$O_3^\pm(q) = I_+ J_- - I_- J_+ + f_\pm(q)J_3 - \frac{4}{f_\pm(q)+4}(\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{J})I_3 \tag{4.5.42}$$

且
$$[I^2, O_3^\pm(q)] = (f_\pm(q)+4)O_3^\pm(q) \tag{4.5.43}$$

亦即

$$I^2(O_3^\pm(q)|j, m\rangle) = (q + f_\pm(q) + 4)(O_3^\pm(q)|j, m\rangle) \tag{4.5.44}$$

(4.5.44)式表明，$O_3^\pm(q)$是 I^2 本征矢的升降算符，它将本征值 q 变为 $q+f_\pm(q)+4$。由于 $O_3^\pm(q)$与 I_3 对易，故 $O_3^\pm(q)$的作用不改变 I_3 的本征值 m。

类似(4.5.36)式，还可引入：

$$O_\pm(f) = \mp 2(I_\pm J_3 - I_3 J_\pm) + fJ_\pm - \frac{4}{f+4}(\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{J})I_\pm \tag{4.5.45}$$

$O_\pm(f)$与 I^2 和 I_3 的对易关系为：

$$\begin{cases}[I^2, O_\pm(f)] = (f+4)O_\pm(f) + J_\pm(4I^2 - f^2 - 6f - 8) \\ [I_3, O_\pm(f)] = \pm O_\pm(f)\end{cases} \tag{4.5.46}$$

由(4.5.36)式和(4.5.45)式，立即得到：

$$O_\pm^\varepsilon(q) = \mp 2(I_\pm J_3 - I_3 J_\pm) + f_\varepsilon(q)J_\pm - \frac{4}{f_\varepsilon(q)+4}(\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{J})I_\pm \tag{4.5.47}$$

并且在 $|j, m\rangle$上有

$$[I^2, O_\pm^\varepsilon(q)] = (f_\varepsilon(q)+4)O_\pm^\varepsilon(q) \tag{4.5.48}$$

其中 $\epsilon = \pm$。

$O_{\pm}^{\epsilon}(q)$和 $O_3^{\epsilon}(q)$的共同点是它们都是 I^2 的本征矢的升降算符，将本征值 q 变为 $q + f_{\epsilon}(q) + 4$。它们的差别是，由于 $[O_3^{\epsilon}(q), I_3] = 0$，$O_3^{\epsilon}(q)$不改变 I_3 的本征值，而 $O_{\pm}^{\epsilon}(q)$也是 I_3 的升降算符，将本征值变为 $(m \pm 1)$。

上面的结论具有一般性，不依赖于 $Y(SL(2))$的具体实现，而且 $O_{\pm}^{\epsilon}(q)$与 $O_3^{\epsilon}(q)$是用算符形式实现的，便于在海森伯表象讨论问题。下面结合具体物理模型，演示在量子力学中，$Y(SL(2))$作为升降算符的作用。

(3) 三维谐振子情况

用升降算符讨论谐振子是很平凡的情况，为了以后一般性讨论，我们从它开始。其哈密顿量熟知为：

$$H = \frac{1}{2}\boldsymbol{p}^2 + \frac{1}{2}\omega^2\boldsymbol{x}^2 \tag{4.5.49}$$

该系统守恒量集合为$\{H, \boldsymbol{L}^2, L_3\}$。在这个简单例子中，$Y(SL(2))$可以用坐标 $\boldsymbol{x}$、动量 $\boldsymbol{p}$ 与角动量 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p}$ 实现。这时 $E(3)$代数的生成元 $\boldsymbol{M}$ 取为 $\boldsymbol{L}$，此时 $\boldsymbol{p}$ 或 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{L}$ 的对易关系均为(4.5.16)式，这表示将 $E(3)$代数的生成元 $\boldsymbol{K}$ 写成 $\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{x}$ 的线性组合时，(4.5.20)仍然成立，特别 K_i 选为 a_i^+ 或 a_i $(i = 1, 2, 3)$ 时仍然成立，这里 a_j^+ 与 a_j 满足：

$$a_j^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\omega}\,x_j - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{\omega}}p_j\right), \quad a_j = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\omega}\,x_j + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{\omega}}p_j\right) \tag{4.5.50}$$

从而可以取

$$[a_j, a_k] = [a_j^+, a_k^+] = 0, \quad [a_j, a_k^+] = \delta_{jk} \tag{4.5.51}$$

或

$$[k_j, k_k] = 0。$$

$$\boldsymbol{I}^{(1)} = \boldsymbol{L},\ \boldsymbol{J}^{(1)} = L^2\boldsymbol{a}^+ \tag{4.5.52}$$

$$\boldsymbol{I}^{(2)} = \boldsymbol{L},\ \boldsymbol{J}^{(2)} = L^2\boldsymbol{a} \tag{4.5.53}$$

其中 $\boldsymbol{a}^+ = (a_1^+,\ a_2^+,\ a_3^+)$，引入

$$a_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 \mp \mathrm{i}a_2),\ a_\pm^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1^+ \pm \mathrm{i}a_2^+) \tag{4.5.54}$$

易知

$$L_\pm = \pm\ \sqrt{2}\,(a_3^+ a_\mp - a_\pm^+\ a_3),\ L_3 = N_+ - N_- \tag{4.5.55}$$

其中 $N_\alpha = a_\alpha^+ a_\alpha(\alpha = \pm,\ 3)$，相应的(4.5.52)式可改写为：

$$I_\alpha^{(1)} = L_\alpha,\quad J_\pm^{(1)} = L^2 a_\pm^+,\quad J_3^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} L^2 a_3^+ \tag{4.5.56}$$

$$I_\alpha^{(2)} = L_\alpha,\quad J_\pm^{(2)} = L^2 a_\mp,\quad J_3^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} L^2 a_3 \tag{4.5.57}$$

由(4.5.49)式和(4.5.50)式易知：

$$H = \omega\Big(\sum_{\alpha=\pm,\ 3} a_\alpha^+ a_\alpha + 3/2\Big) \tag{4.5.58}$$

在量子力学中熟知，$a_\alpha^+(a_\alpha)$ 是三维谐振子能量本征态（实际是粒子数本征态）的升降算符，在守恒量集合$\{H,\ L^2,\ L_3\}$的共同本征态空间中，由 $I_\pm$ 和 $J_\pm$，J_3，I_3 组成的 $O_\alpha^\varepsilon(q)$ $(\alpha = \pm,\ 3,\ \varepsilon = \pm)$ 才是升降算符。$\boldsymbol{I}$ 现在就是角动量，现在只考虑 $O_\alpha^{(\pm)}(q)$算符。三维谐振子的本征矢设为$|n,\ l,\ m\rangle$，其中 n，l，m 分别为径向量子数、角动量量子数与磁量子数，且：$(\hbar = 1)$

$$\begin{aligned} H|n,\ l,\ m\rangle &= \omega(2n + l + 3/2)|n,\ l,\ m\rangle \\ L^2|n,\ l,\ m\rangle &= l(l+1)|n,\ l,\ m\rangle \\ L_3|n,\ l,\ m\rangle &= m\ |n,\ l,\ m\rangle \end{aligned} \tag{4.5.59}$$

此时有 $q = l(l + 1)$，由(4.5.41)式得出：

$$f_+(l) = 2(l-1),\ f_-(l) = -2(l+1) \quad (4.5.60)$$

同时 $\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{J}=0$，即没有磁单极，则 $Y(SL(2))$ 给出的算符(4.5.42)式与(4.5.47)式变为：

$$O^{\pm}_{3(\beta)}(l) = I_+ J^{(\beta)}_- - I_- J^{(\beta)}_+ + f_\pm(l) J^{(\beta)}_3 \quad (4.5.61)$$

$$O^{\varepsilon}_{\pm(\beta)}(l) = \mp 2(I_\pm J^{(\beta)}_3 - I_3 J^{(\beta)}_\pm) + f_\varepsilon(l) J^{(\beta)}_\pm \quad (4.5.62)$$

其中 $\beta=1,2$，相应于 $J^{(1)}_\alpha$ 与 $J^{(2)}_\alpha$，$\varepsilon=\pm$。注意到 $q+f_+(q)+4=(l+1)(l+2)$，$q+f_-(q)+4=(l-1)l$，则 $O^{+}_{\alpha(\beta)}(l)$ 作用在 $|n,l,m\rangle$ 上将 l 变为 $l+1$，而 $O^{-}_{\alpha(\beta)}(l)$ 则将 l 变为 $l-1$；同时

$$\begin{cases}[H, O^{\varepsilon}_{\alpha(1)}(l)] = \omega O^{\varepsilon}_{\alpha(1)}(l) \\ [H, O^{\varepsilon}_{\alpha(2)}(l)] = -\omega O^{\varepsilon}_{\alpha(2)}(l)\end{cases} (\alpha=\pm, 3) \quad (4.5.63)$$

因此，$O^{\varepsilon}_{\alpha(1)}$ 的作用是能谱升算符，$O^{\varepsilon}_{\alpha(2)}$ 则为降算符。$O^{\varepsilon}_{3(\beta)}(l)$ 保持 m 不变，而 $O^{\varepsilon}_{\pm(\beta)}$ 使 m 变为 $m\pm 1$。显然通过 $O^{\varepsilon}_{\alpha(\beta)}(l)$ 作用，可将 $\{H, L^2, L_3\}$ 的共同本征空间完全生成出来。示意图见图 4.5。

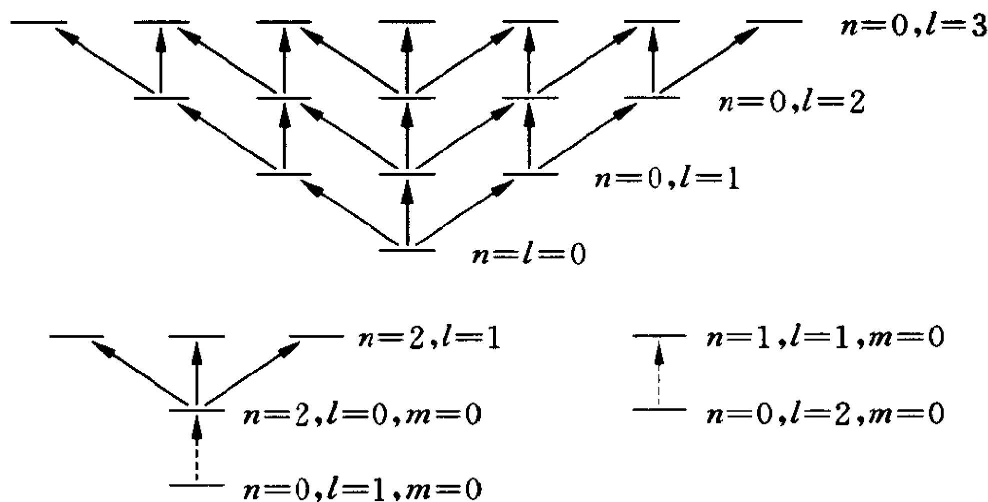
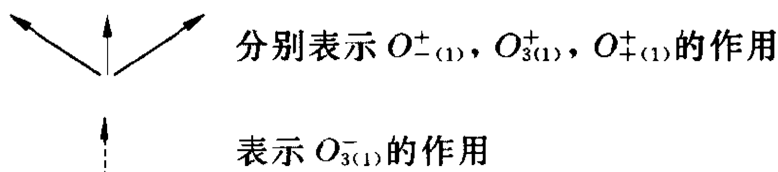


图 4.5



（4）二维空间 anyon 系统

Yangian 作为跃迁算符在二维空间中应用的例子，介绍一下它在 anyon 系统的应用，由于此时产生算符、湮没算符可通过复数 Z 与 Z^* 表示出来，因而也代表 Yangian 的一类具体实现。为较系统地了解这方面应用，先从 anyon 具体理论开始，最后讨论三个 anyon 的情况。

二维空间的 N 体 anyon 系统的哈密顿为[19]：

$$H_{\mathrm{A}} = \sum_{i=1}^{N}\left[\left(\boldsymbol{p}_i - 2e\sum_{j\neq i}^{N}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j)\right)^2 + \frac{1}{2}\omega^2\boldsymbol{x}_i^2\right] \tag{4.5.64}$$

其中 e 表示电荷的绝对值，规范势 $\boldsymbol{A}$ 的形式为：

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j) = \frac{\Phi}{2\pi}[\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j)]/|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j|^2 \tag{4.5.65}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为垂直于二维平面的单位矢量，Φ 是磁通量。(4.5.65)式可写为更明显的形式：

$$\begin{cases} A^{(1)}(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j) = -\dfrac{\Phi}{2\pi}\dfrac{x_i^{(2)} - x_j^{(2)}}{|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j|^2} \\ A^{(2)}(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j) = \dfrac{\Phi}{2\pi}\dfrac{x_i^{(1)} - x_j^{(1)}}{|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j|^2} \end{cases} \tag{4.5.66}$$

其中上角标(1)与(2)表示二维平面上的两个分量。由于规范势为纯规范，所以只带来拓扑效应。求解薛定谔方程

$$H_{\mathrm{A}}\psi(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_N) = E\psi(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_N) \tag{4.5.67}$$

要考虑规范势影响。$\boldsymbol{A}$ 可以写为一个标量势的梯度。引入

$$\varphi_{ij} = \mathrm{tg}^{-1}\frac{x_i^{(2)} - x_j^{(2)}}{x_i^{(1)} - x_j^{(1)}}$$

可知
$$A(x_i - x_j) = -\frac{\Delta}{e}\nabla_j \varphi_{ij} \tag{4.5.68}$$

其中 $\Delta = e\Phi/2\pi$，显然 φ_{ij}为幅角。对波函数做变换：

$$\psi'(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_N) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\Delta\sum\limits_{i<j}^{N}\varphi_{ij}}\psi(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_N) \tag{4.5.69}$$

相应哈密顿量变换为：

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{A}}' &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\Delta\sum\limits_{i<j}^{N}\varphi_{ij}} H_{\mathrm{A}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\Delta\sum\limits_{i<j}^{N}\varphi_{ij}} \\ &= U^{-1}H_{\mathrm{A}}U \end{aligned} \tag{4.5.70}$$

则本征方程变为：

$$H_{\mathrm{A}}'\psi'(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_N) = E\psi'(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_N)$$

在变换(4.5.70)式后，哈密顿量 H' 具有二维谐振子形式。事实上由于

$$H_{\mathrm{A}}' = H_{\mathrm{A}} + U^{-1}[H, U] = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{p}_i^2 + \frac{1}{2}\omega\boldsymbol{x}_i^2\right)$$

然而，我们不能用二维谐振子的波函数 ψ' 再通过(4.5.69)式得到 ψ。原因在于 ψ' 的单值性。当幅角绕 z 轴转一周时，ψ' 保持不变，由(4.5.69)式知 ψ 变化一因子 $\exp(-\mathrm{i}4\pi\Delta)$。当 Δ 不等于半整数或整数时，ψ 不具有单值性。这就是 anyon 与二维谐振子的重要区别：当要求 ψ 具有单值性时，ψ' 则一定是非单值的，它来源于 $\boldsymbol{A}$ 的引入改变了原来二维谐振子的拓扑性质。有关波函数在规范势作用下单值性的一般理论可参阅文献[20]。我们只考虑简单的 anyon 系统。

回到本征方程(4.5.67)，并设为两个 anyon 系统。按一般量子力学计算，先分出两者质心坐标

$$\boldsymbol{x}_c = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2), \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2$$

则有

$$H' = H_c + H_r$$

$$H_c = \frac{1}{4}\boldsymbol{p}_c^2 + \omega^2 \boldsymbol{x}_c^2, \; H_r = \boldsymbol{p}_x^2 + \frac{1}{4}\omega^2 x^2$$

由于 φ_{12} 仅为 $\boldsymbol{x}$ 的函数，与质心部分无关，故

$$H_c \psi'(\boldsymbol{x}_c) = E_c \psi'(\boldsymbol{x}_c) \tag{4.5.71}$$

正是通常谐振子方程

$$\psi'(\boldsymbol{x}_c) = \mathrm{e}^{-\omega x_c^2 + \mathrm{i} m_c \varphi_c} x_c^{|m_c|} L_{n_c}^{|m_c|}(2\omega x_c^2) \tag{4.5.72}$$

$$E_c = \omega(2n_c + |m_c| + 1)$$

其中 n_c 为径向量子数，m_c 为 $\boldsymbol{L}_c$ 第三分量量子数，$n_c = 0, 1, \cdots$，$m_c = 0, \pm 1, \cdots$，φ_c 为 $\boldsymbol{x}_c$ 的幅角。相对运动部分的本征方程为：

$$H_r \psi'(\boldsymbol{x}) = E_r \psi'(\boldsymbol{x}) \tag{4.5.73}$$

令 $\psi'(\boldsymbol{x}) = R(x)\exp(\mathrm{i}(m_r - 2\Delta)\varphi)$，$\varphi$ 为 $\boldsymbol{x}$ 幅角，由于当 $\varphi \to \varphi + 2\pi$ 时要求 $\psi''(\boldsymbol{x}) \to \psi'(\boldsymbol{x})\exp(-\mathrm{i}4\pi\Delta)$，所以 $m_r = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$。(4.5.73)式的径向方程为：

$$\left\{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \frac{(m_r - 2\Delta)^2}{x^2} - \left(\frac{\omega}{2}\right)^2 x^2 + E\right\} R(x) = 0$$

该方程与二维谐振子的径向方程比较，差别仅在于 m_r 变成了 $m_r - 2\Delta$，其解为：

$$R(x) = \mathrm{e}^{-\omega x^2/4} x^{|m_r - 2\Delta|} L_{n_r}^{|m_r - 2\Delta|}\left(\frac{1}{2}\omega x^2\right) \tag{4.5.74}$$

$$E_r = \omega(2n_r + |m_r - 2\Delta| + 1) \tag{4.5.75}$$

整个波函数 $\psi'(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \psi'(\boldsymbol{x}_c)\psi'(\boldsymbol{x})$，$E = E_c + E_r$。引入复坐标

$$Z_c = x_c \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_c}, \; Z = x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \tag{4.5.76}$$

则得

$$\psi'(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \mathrm{e}^{-\omega|Z_c|^2} W_c^{|m_c|} L_{n_c}^{|m_c|}(2\omega|Z_c|^2)$$

$$\cdot \mathrm{e}^{-\omega|Z|^2/4} W_r^{|m_r-2\Delta|} L_{n_r}^{|m_r-2\Delta|}\left(\frac{1}{2}\omega|Z|^2\right) \quad (4.5.77)$$

其中

$$W_c = \begin{cases} Z_c & (m_c > 0) \\ Z_c^* & (m_c < 0) \end{cases}, \quad W_r = \begin{cases} Z_r & (m_r - 2\Delta > 0) \\ Z_r^* & (m_r - 2\Delta < 0) \end{cases}$$

由于非单值性,anyon 系统较之通常二维谐振子的能谱有相当不同,对 m_r 而言,E_r 不再是简并的。其基态能态也依赖于 Δ。对相对运动部分而言,通常谐振子的基态是由量子数 $n_r = m_r = 0$ 给出的,对 anyon 则不一定。例如,当 $0 < \Delta < 1/2$ 时,将 Δ 分为三个区域:$0 < \Delta < 1/4$, $\Delta = 1/4$, $1/4 < \Delta < 1/2$, $n_r = m_r = 0$ 的波函数为:

$$\psi'_{0,0} = \mathrm{e}^{-\omega|Z|^2/4}(Z^*)^{2\Delta} \quad (4.5.78)$$

相当的能量为 $E_{0,0} = \omega(2\Delta + 1)$。而 $n_r = 0$, $m_r = \pm 1$ 的波函数为

$$\psi'_{0,\pm 1} = \mathrm{e}^{-\omega|Z|^2/4} W_r^{|\pm 1 - 2\Delta|} \quad (4.5.79)$$

相应的能量为 $E_{0,\pm 1} = \omega(|\pm 1 - 2\Delta| + 1)$。对区域 $0 < \Delta < 1/4$, $\psi'_{0,0}$是基态。对 $\Delta = 1/4$, $E_{0,0} = E_{0,+1}$,基态则为 $\psi'_{0,0}$和 $\psi'_{0,+1}$,即基态有简并。对区域 $1/4 < \Delta < 1/2$, $E_{0,+1} < E_{0,0}$,其基态为 $\psi'_{0,+1}$。

有了以上的知识,以下讨论两个 anyon 系统的升降算符问题。由于这时与二维谐振子的差别只在于相对运动部分,所以只考虑这部分的 $Y(SL(2))$实现。注意到 H'_r具有和二维谐振子相同的形式,引入产生算符、湮没算符 $b_\pm^+$, $b_\pm$。在复坐标中,它们可以表为

$$\begin{cases} b_+ = \dfrac{1}{2}\left[\sqrt{\dfrac{\omega}{2}}Z^* + 2\sqrt{\dfrac{2}{\omega}}\dfrac{\partial}{\partial Z}\right], & b_- = \dfrac{1}{2}\left[\sqrt{\dfrac{\omega}{2}}Z + 2\sqrt{\dfrac{2}{\omega}}\dfrac{\partial}{\partial Z^*}\right] \\ b_+^+ = \dfrac{1}{2}\left[\sqrt{\dfrac{\omega}{2}}Z - 2\sqrt{\dfrac{2}{\omega}}\dfrac{\partial}{\partial Z^*}\right], & b_-^+ = \dfrac{1}{2}\left[\sqrt{\dfrac{\omega}{2}}Z^* - 2\sqrt{\dfrac{2}{\omega}}\dfrac{\partial}{\partial Z}\right] \end{cases} \tag{4.5.80}$$

H_r' 可写为：

$$H_r' = \omega\Big(\sum_{\alpha=+,-} b_\alpha^+ b_\alpha + 1\Big) \tag{4.5.81}$$

于是得到 $Y(SL(2))$ 实现：

$$\begin{cases} I_+ = b_+^+ b_-, \; I_- = b_-^+ b_+, \; I_3 = \dfrac{1}{2}(b_+^+ b_+ - b_-^+ b_-) \\ J_\pm^{(1)} = \pm I^2 (b_\pm^+)^2, \; J_3^{(1)} = -I^2 b_+^+ b_-^+ \\ J_\pm^{(2)} = \pm I^2 (b_\mp)^2, \; J_3^{(2)} = I^2 b_+ b_- \end{cases} \tag{4.5.82}$$

系统的守恒量为 $\{H_r', L_3'\}$，其中 $L_3' = 2I_3$。虽然算符形式上与二维谐振子类似，但由(4.5.82)式如将 b 算符作用在本征态的情况是不同的。例如，对 $\psi_{0,0}'$ 有：

$$b_+ \psi_{0,0}' = 0 \tag{4.5.83}$$

但是

$$b_- \psi_{0,0}' = 2\sqrt{\frac{2}{\omega}}\Delta(Z^*)^{-1}\psi_{0,0}' \tag{4.5.84}$$

当 $|Z| \to 0$ 时，$a_- \psi_{0,0}'$ 发散。所以不能用 b_- 作用在 $\psi_{0,0}'$。类似地，有

$$b_-^+ \psi_{0,0}' = \sqrt{\frac{\omega}{2}}Z^* \psi_{0,0}' \sim \psi_{0,-1}'$$

$$b_+^+ \psi_{0,0}' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\omega}Z - \frac{4\Delta}{\sqrt{\omega}}Z^{*-1}\right)\psi_{0,0}' \xrightarrow{|Z|\to 0} \infty$$

所以，仅能用 b_-^+ 和 b_+ 作用在 $\psi'_{0,0}$ 上面，而不能用 b_+^+ 和 b_- 作用在它上面。由(4.5.78)式可以看出，当 $0<\Delta<1/4$ 时，用 b_α^+ 和 b_α^- ($\alpha=+,-$) 描述的能态按 m_r 的取值分为两部分：$m=0,-1,-2,\cdots$ 和 $m=-1,-2,\cdots$，其图示见图 4.6，当中态的标记用 (n_r, m_r) 标出。

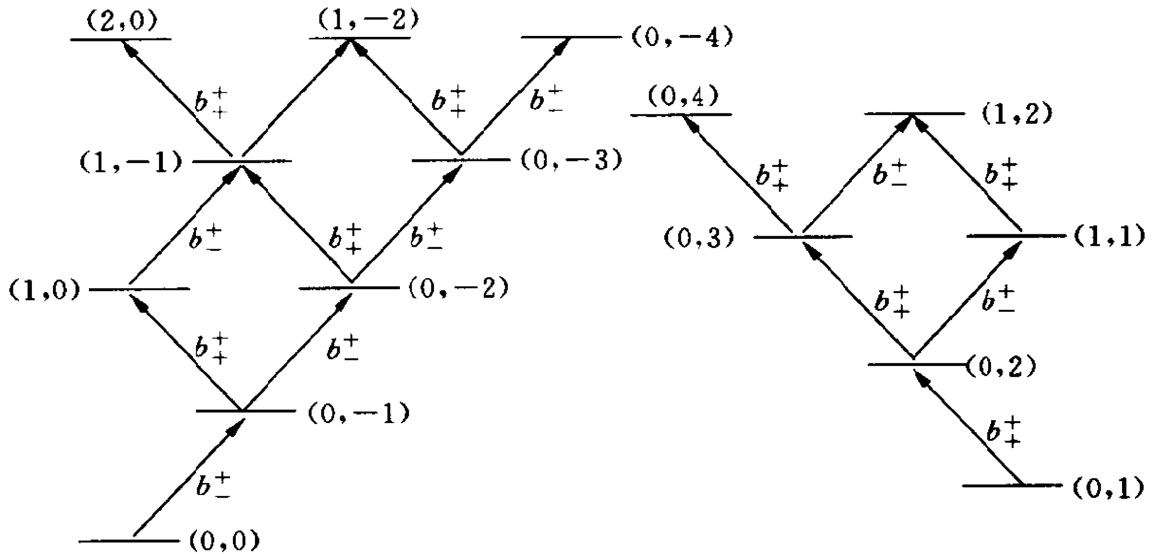


图 4.6 态为 (n_r, m_r)

同样可以由 $Y(SL(2))$ 决定出算符 $O_\alpha^\epsilon(n/2)$，$n=2n_r+|m_r-2\Delta|$，在态空间中作用，得出图 4.6 所示的整个本征空间。由于用 b_α^+ 和 b_α 较之用 $O_\alpha^\epsilon(n/2)$ 更为简便，这里不再赘述。正如我们强调的，这种上升、下降算符从算符意义(不作用在本征态上)是由 Yangian 组成的，这是问题的本质。在一些简单模型中，它们可以简化，那就是特例了。

此外，由于 ψ' 空间的任意力学量 F' 同 ψ 空间相应的力学量 F 都有对应关系：

$$F=UF'U^{-1},\ U=\exp\Big(\mathrm{i}2\Delta\sum_{i<j}\varphi_{ij}\Big) \tag{4.5.85}$$

例如，定义在 ψ' 空间中的 $b_\alpha^+(b_\alpha)$ 可以通过(4.5.85)式变换到 ψ 空间中的 $\tilde{b}_\alpha^+(\tilde{b}_\alpha)$：

$$\widetilde{b}_\alpha^+ = U b_\alpha^+ U^{-1} \tag{4.5.86}$$

则有

$$H_r = \sum_{\alpha=+,-} \widetilde{b}_\alpha^+ + \widetilde{b}_\alpha \tag{4.5.87}$$

上面讨论的 anyon 系统是最简单的情况，它们的本征方程可以直接求解。但对于三个 anyon 则难以分解变量并直接求解，采用升降算符生成能谱的作法不仅有理解 Yangian 的意义，而且是一个有希望的求能谱的方法。目前这方面发展仍是初步的，仅作初步介绍。

(5) 三体 anyon 的升降算符

对三个 anyon 系统，首先构造需要的产生算符、湮没算符。仿照二体 anyon 作法，引入复坐标：

$$Z_j = r_j e^{i\varphi_j} \quad (j = 1, 2, 3) \tag{4.5.88}$$

其中 $r_j = |\boldsymbol{x}_j|$。利用复坐标，引入

$$\begin{aligned}
b_j^{(+)} &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{\omega} Z_j^* + \frac{2}{\sqrt{\omega}} \frac{\partial}{\partial Z_j}\right) \\
b_j^{(-)} &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{\omega} Z_j + \frac{2}{\sqrt{\omega}} \frac{\partial}{\partial Z_j^*}\right) \\
b_j^{(+)+} &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{\omega} Z_j - \frac{2}{\sqrt{\omega}} \frac{\partial}{\partial Z_j^*}\right) \\
b_j^{(-)+} &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{\omega} Z_j^* - \frac{2}{\sqrt{\omega}} \frac{\partial}{\partial Z_j}\right)
\end{aligned} \tag{4.5.89}$$

易验证成立：

$$\begin{cases} [a_j^{(\alpha)}, a_k^{(\beta)}] = [a_j^{(\alpha)+}, a_k^{(\beta)+}] = 0 \\ [a_j^{(\alpha)}, a_k^{(\beta)+}] = \delta_{jk}\delta_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = +, -; j, k = 1, 2, 3) \end{cases} \tag{4.5.90}$$

由于 anyon 与谐振子的区别在于存在纯规范势 $\boldsymbol{A}$，而 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_i -$

$\boldsymbol{x}_j$)，所以为了描述 anyon 系统，必须对 $b_j^{(\alpha)^+}$ 和 $b_j^{(\alpha)}$ 作某种组合。引入

$$\begin{cases} B_\alpha(1,1,1) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sum_{j=1}^{3} B_j^{(\alpha)},\ B_\alpha(2,3) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} B_{23}^{(\alpha)} \\ B_\alpha(1,2;1,3) = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(B_{12}^{(\alpha)} + B_{13}^{(\alpha)}) \\ B_{ij}^{(\alpha)} = B_i^{(\alpha)} - B_j^{(\alpha)} \quad (\alpha = \pm) \end{cases} \tag{4.5.91}$$

其中 $B = b, b^+$。(4.5.91)式中的 $B_\alpha(1, 1, 1)$对粒子指标 1，2，3 进行轮换是不变的，它描述的是三个 anyon 系统的质心部分，而 $B_\alpha(2, 3)$对粒子指标轮换后得到 $B_\alpha(3, 1)$与 $B_\alpha(1, 2)$。$B_\alpha(1, 2; 1, 3)$在轮换后变为 $B_\alpha(2, 3; 2, 1)$和 $B_\alpha(3, 1; 3, 2)$，即 $B_\alpha(2, 3)$与 $B_\alpha(1, 2; 1, 3)$在轮换后并不是不变的。所以(4.5.91)式的定义并不是唯一的，也可以用 $B_\alpha(1, 1, 1)$，$B_\alpha(3, 1)$，$B_\alpha(2, 3; 2, 1)$或 $B_\alpha(1, 1, 1)$，$B_\alpha(1, 2)$，$B_\alpha(3, 1; 3, 2)$代替(4.5.91)式。事实上它们是等价的，用哪一组都可以。但不能将 $B_\alpha(2, 3)$和 $B_\alpha(1, 2; 1, 3)$进行轮换对称化，因为 $B_\alpha(1, 2) + B_\alpha(2, 3) + B_\alpha(3, 1) = 0$。对 $B_\alpha(1, 2; 1, 3)$亦如此。由 $b_j^{(\alpha)^+}$ ($b_j^{(\alpha)}$)组合得到的(4.5.91)式仍是产生算符和湮没算符，并且三种组合彼此对易。借助于(4.5.91)式，引入 $Y(SL(2))$表示：

$$\begin{cases} I_+(1,1,1) = b_+^+(1,1,1)b_-(1,1,1) \\ I_-(1,1,1) = b_-^+(1,1,1)b_+(1,1,1) \\ I_3(1,1,1) = \dfrac{1}{2}(b_+^+(1,1,1)b_+(1,1,1) \\ \qquad\qquad - b_-^+(1,1,1)b_-(1,1,1)) \\ J_\pm^{(1)}(1,1,1) = \pm(I(1,1,1))^2(b_\pm^+(1,1,1))^2 \\ J_3^{(1)}(1,1,1) = -(I(1,1,1))^2 b_+^+(1,1,1)\dot{b}_-^+(1,1,1) \end{cases}$$

(4.5.92)

$$
\begin{cases}
I_+(2,3) = b_{\mp}^{+}(2,3)b_-(2,3) \\
I_-(2,3) = b_{\pm}^{+}(2,3)b_+(2,3) \\
I_3(2,3) = \dfrac{1}{2}(b_{\mp}^{+}(2,3)b_+(2,3) \\
\qquad\qquad - b_{\pm}^{+}(2,3)b_-(2,3)) \\
J_{\pm}^{(1)}(2,3) = \pm(I(2,3))^2(b_{\pm}^{+}(2,3))^2 \\
J_3^{(1)}(2,3) = -(I(2,3))^2 b_{\mp}^{+}(2,3)b_{\pm}^{+}(2,3)
\end{cases}
\tag{4.5.93}
$$

和

$$
\begin{cases}
I_+(1,2;1,3) = b_{\mp}^{+}(1,2;1,3)b_-(1,2;1,3) \\
I_-(1,2;1,3) = b_{\pm}^{+}(1,2;1,3)b_+(1,2;1,3) \\
I_3(1,2;1,3) = \dfrac{1}{2}(b_{\mp}^{+}(1,2;1,3)b_+(1,2;1,3) \\
\qquad\qquad - b_{\pm}^{+}(1,2;1,3)b_-(1,2;1,3)) \\
J_{\pm}^{(1)}(1,2;1,3) = \pm(I(1,2;1,3))^2(b_{\pm}^{+}(1,2;1,3))^2 \\
J_3^{(1)}(1,2;1,3) = -(I(1,2;1,3))^2 \\
\qquad\qquad \cdot b_{\mp}^{+}(1,2;1,3)b_-(1,2;1,3)
\end{cases}
\tag{4.5.94}
$$

$J_\alpha^{(2)}(1,1,1)$、$J_\alpha^{(2)}(2,3)$和$J_\alpha^{(2)}(1,2;1,3)$的写法和上三式形式类似,不再重复。为了构造三个 anyon 系统的升降算符,需要进一步对(4.5.93)式和(4.5.94)式作轮换对称化处理。为此引入:

$$
\begin{cases}
I_\alpha^S = \dfrac{2}{3}(I_\alpha(2,3) + I_\alpha(3,1) + I_\alpha(1,2)) \\
J_\alpha^{(1)S} = \dfrac{2}{3}(I^S)^2 K_\alpha^{(1)S} \\
K_\alpha^{(1)S} = K_\alpha^{(1)}(2,3) + K_\alpha^{(1)}(3,1) + K_\alpha^{(1)}(1,2)
\end{cases}
\tag{4.5.95}
$$

其中

$$
\begin{cases}
K_{\pm}^{(1)}(a,b) = \pm(b_{\pm}^{+}(a,b))^2 \\
K_3^{(1)}(a,b) = -b_{\mp}^{+}(a,b)b_{\pm}^{+}(a,b)
\end{cases}
\tag{4.5.96}
$$

$a, b = 1, 2; 2, 3; 3, 1$。不难证明：

$$\begin{cases}[I_3^S, I_\pm^S] = \pm I_\pm^S, \quad [I_+^S, I_-^S] = 2I_3^S \\ [I_3^S, K_\pm^{(1)S}] = [K_3^{(1)S}, I_\pm^S] = \pm K_\pm^{(1)S} \\ [I_+^S, K_-^{(1)S}] = [K_+^{(1)S}, I_-^S] = 2K_3^{(1)S} \\ [K_\alpha^{(1)S}, K_\beta^{(1)S}] = 0\end{cases} \tag{4.5.97}$$

可见$\{I_\alpha^S, K_\alpha^{(1)S}\}$是$E(3)$代数的一种实现。再根据本节(1)中的结果，则相应的$\{I_\alpha^S, J_\alpha^{(1)S}\}$组成$Y(SL(2))$的一种实现。对$J_\alpha^{(2)}$的处理完全类似，只要将$K_\alpha^{(1)}(a, b)$换为：

$$K_\pm^{(2)}(a, b) = \pm(b_\mp(a, b))^2, K_3^{(2)}(a, b) = b_+(a, b)b_-(a, b)$$

即可。

(4.5.95)式是通过对(4.5.93)式作对称化处理的结果。同样也可以对(4.5.94)式作完全类似的轮换对称化。注意到对易关系(4.5.97)式，可直接验证：

$$I_\alpha(1, 2; 1, 3) + \text{轮换项} = I_\alpha(2, 3) + \text{轮换项}$$

$$K_\alpha^{(j)}(1, 2; 1, 3) + \text{轮换项} = K_\alpha^{(j)}(2, 3) + \text{轮换项} \quad (j = 1, 2)$$

也就是说，(4.5.94)式的轮换对称化完全等同于(4.5.95)式。这样，最终得到两个具有轮换对称性的$Y(SL(2))$的实现：(4.5.92)式和(4.5.93)式。

依据本节(2)的结果，由(4.5.92)式和(4.5.93)式可构造出$O_{\alpha(j)}^{\epsilon(c)}$和$O_{\alpha(j)}^{\epsilon(s)}$，其形式为：

$$\begin{cases}O_{3(j)}^{\pm(c)}(q) = I_+^c J_-^{(j)c} - I_-^c J_+^{(j)c} \\ \qquad + f_\pm(q)J_3^{(j)c} - \dfrac{4}{f_\pm(q) + 4}(\boldsymbol{I}^c \cdot \boldsymbol{J}^{(j)c})I_3^c \\ O_{\pm(j)}^{\epsilon(c)}(q) = \mp 2(I_\pm^c J_3^{(j)c} - I_3^c J_\pm^{(j)c}) + f_\epsilon(q)J_\pm^{(j)c} \\ \qquad - \dfrac{4}{f_\epsilon(q) + 4}(\boldsymbol{I}^c \cdot \boldsymbol{J}^{(j)c})I_\pm^c\end{cases} \tag{4.5.98}$$

其中

$I_\alpha^c = I_\alpha(1,1,1)$，$J_\alpha^{(j)c} = J_\alpha^{(j)}(1,1,1)$，$j = 1, 2$,$q$ 是$(I^c)^2$的本征值。

$$
\begin{cases}
O_{3(j)}^{\pm(s)}(p) = I_+^s J_-^{(j)s} - I_-^s J_+^{(j)s} + f_\pm(p) J_3^{(j)s} \\
\qquad\qquad - \dfrac{4}{f_\pm(p)+4}(\boldsymbol{I}^s \cdot \boldsymbol{J}^{(j)s}) I_3^s \\
O_{\pm(j)}^{\varepsilon(s)}(p) = \mp 2(I_\pm^s J_3^{(j)s} - I_3^s J_\pm^{(j)s}) + f_\varepsilon(p) J_\pm^{(j)s} \\
\qquad\qquad - \dfrac{4}{f_\varepsilon(p)+4}(\boldsymbol{I}^s \cdot \boldsymbol{J}^{(j)s}) I_\mp^s
\end{cases}
$$

其中 p 是$(I^s)^2$的本征值。由直接计算，发现 $\boldsymbol{I}^c \cdot \boldsymbol{J}^{(j)c} = 0$，但是 $\boldsymbol{I}^s \cdot \boldsymbol{J}^{(j)s} = 0$。

在上面讨论的基础上，定义“粒子”数算符：

$$
\begin{cases}
N_c' = \sum\limits_{\alpha=+,-} b_\alpha^+(1,1,1) b_\alpha(1,1,1) \\
N_s' = \sum\limits_{\alpha=+,-} \{ b_\alpha^+(2,3) b_\alpha(2,3) \\
\qquad + b_\alpha^+(3,1) b_\alpha(3,1) + b_\alpha^+(1,2) b_\alpha(1,2) \}
\end{cases}
\tag{4.5.99}
$$

由于总粒子数及总角动量的第三分量分别是：

$$
\begin{cases}
N' = \sum\limits_{i=1}^{3} \sum\limits_{\alpha=\pm} \{ b_i^{(\alpha)+} b_i^{(\alpha)} \} \\
L_3' = \sum\limits_{i=1}^{3} \{ b_i^{(+)^+} b_i^{(+)} - b_i^{(-)^+} b_i^{(-)} \}
\end{cases}
\tag{4.5.100}
$$

直接验证有：

$$
N' = N_c' + N_s', \quad L_3' = 2(I_3^c + I_3^s) \tag{4.5.101}
$$

从而可将哈密顿量 H' 分解为：

$$
H' = H_c' + H_s' \tag{4.5.102}
$$

其中

$$H' = \omega(N' + 3),\ H'_c = \omega(N'_c + 1),\ H'_s = \omega(N'_s + 2) \tag{4.5.103}$$

因此,H'可分解为互相独立的质心部分(由H'_c决定),及相对运动部分,由H'_s决定。而三个anyon的系统则是由H'_s描述的。这样,(4.5.103)式可写成

$$\begin{cases} H_c\psi_c(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{x}_3) = E_c\psi_c(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{x}_3) \\ H_s\psi_s(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{x}_3) = E_s\psi_s(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{x}_3) \end{cases} \tag{4.5.104}$$

总的波函数

$$\psi'(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{x}_3) = \psi_c\psi_s$$

其质心部分与单体二维谐振子完全相同,不再讨论。我们关心的是相对运动部分的本征值问题。注意到:

$$[N'_s,\ I^s_\alpha] = 0 \tag{4.5.105}$$

从而可以考虑守恒量H'_s,$L'_s = 2I^s_3$的对角化问题。通过直接验,有

$$[N'_s,\ k^{(1)s}_\alpha] = 2k^{(1)s}_\alpha,\ [N'_s,\ k^{(2)s}_\alpha] = -\ 2k^{(2)s}_2$$

由此容易导出:

$$\begin{cases} [N'_s,\ O^{\epsilon(s)}_{\alpha(1)}(p)] = 2O^{\epsilon(s)}_{\alpha(1)}(p) \\ [N'_s,\ O^{\epsilon(s)}_{\alpha(2)}(p)] = -\ 2O^{\epsilon(s)}_{\alpha(2)}(p) \end{cases} \tag{4.5.106}$$

这说明$O^{\epsilon(s)}_{\alpha(1)}(p)$和$O^{\epsilon(s)}_{\alpha(2)}$是$N'_s$的升降算符,也就是$H'_s$的升降算符。利用$O^{\epsilon(s)}_{\alpha(1)}$可以从低能态升到高能态,能态的结构与两个anyon系统类似,也可分为两部分:第一部分的最低能态是(n_s, m_s分别是N'_s和L'^s_3的本征值):

$$\psi'_0 = (Z^*_{12}Z^*_{23}Z^*_{31})^{2\Delta}\mathrm{e}^{-\omega|Z_s|^2/3} \tag{4.5.107}$$

其中,$|Z_s|^2 = \dfrac{2}{3}(|Z_{12}|^2 +$ 轮换项),相应的有

$n_s = 6\Delta$, $m_s = -6\Delta$，第二部分的最低能态是：

$$\psi_1' = (Z_{12}Z_{23}Z_{31})^{1-2\Delta}e^{-\omega|Z_s|^2/3} \tag{4.5.108}$$

相应的 $n_s = 3(1-2\Delta)$，$m_s = 3(1-2\Delta)$。在(4.5.107)式和(4.5.108)式中已略去了下角标 s。这两部分是不能通过产生算符、湮没算符联系起来的。需要指出的是，两部分的最低能态 ψ_0' 与 ψ_1' 中的"最低"是有条件的：仅在 $0 < 2\Delta < 1$ 时，它们才是能量最低态，否则不是。至于 ψ_0' 和 ψ_1' 哪一个更低，则类似于二 anyon 系统，依赖于 Δ 所在的区域。

从 ψ_0' 和 ψ_1' 出发，用 $O_{\alpha(1)}^{+(s)}$ 依次作用，可以得到一系列 H_s' 和 $L_3'^s$ 的本征态。这里不再重复这些相当繁琐的计算，仅给出一些简单的例子。

在上述第一部分系列里：

$$\begin{cases} \psi_0^{(1)} = \left(1 - \dfrac{1}{4(1+3\Delta)}\omega|Z_s|^2\right)\psi_0', \\ \qquad (n_s = 2+6\Delta,\ m_s = -6\Delta) \\ \psi_0^{(2)} = (Z_{12}^{*2} + Z_{23}^{*2} + Z_{31}^{*2})\psi_0' \\ \qquad (n_s = 2+6\Delta,\ m_s = -2-6\Delta) \end{cases} \tag{4.5.109}$$

在第二部分系列里：

$$\psi_1^{(1)} = \left(1 - \frac{1}{4(2-3\Delta)}\omega|Z_s|^2\right)\psi_1' \quad (n_s = 5-6\Delta,\ m_s = 5-6\Delta) \tag{4.5.110}$$

上面通过 $Y(SL(2))$ 的具体实现，讨论了一些升降算符的性质，其目的在于对 Yangian 这种新型代数在通常量子力学中的表现有所了解。在一些中心位势的简单模型中，类似(4.5.20)式的具体实现中，由于 I^2 与 $\boldsymbol{I}$ 对易，如将它作用在角动量本征态上 $\boldsymbol{I}^2$ 可以用它的本征值代替，这便回到通常的结果[18]。然而(4.5.47)式

等一般形式包含了 J 不用(4.5.56)式具体实现的各种可能性。为说明这方面的应用,考虑自旋-轨道耦合系统。

(6) 简单的自旋和轨道耦合系统的升降算符

系统的哈密顿量为:

$$H = H_0 + H_{\text{int}},\ H_{\text{int}} = \lambda \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{L} \tag{4.5.111}$$

其中 H_0 是与自旋无关的哈密顿量,要求 $[H, \boldsymbol{L}] = 0$ 即具有中心位势特点。$\boldsymbol{\sigma}$ 为泡利矩阵,$\boldsymbol{L}$ 为轨道角动量,λ 为耦合常数。实际上,(4.5.111)式是相对论振子的简化形式。着重讨论 H_{int} 部分的 $Y(SL(2))$ 实现及其升降算符。

定义总角动量:

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{L} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \tag{4.5.112}$$

则由

$$[L_i, L_j] = \mathrm{i}\epsilon_{ijk}L_k,\ [\sigma_i, \sigma_j] = 2\mathrm{i}\epsilon_{ijk}\sigma_k \tag{4.5.113}$$

可知

$$[I_i, I_j] = \mathrm{i}\epsilon_{ijk}I_k \tag{4.5.114}$$

定义

$$\begin{cases} J_\pm = \mp(\sigma_\pm L_3 - \frac{1}{2}\sigma_3 L_\pm) \\ J_3 = \frac{1}{2}(\sigma_+ L_- - \sigma_- L_+) \end{cases} \tag{4.5.115}$$

其中 $L_\pm = L_1 \pm \mathrm{i}L_2$, $\sigma_\pm = \frac{1}{2}(\sigma_1 \pm \mathrm{i}\sigma_2)$,则可证明 $\{\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}\}$ 是 $Y(SL(2))$ 的一种实现。

实际上,由(4.5.112)式定义的总角动量满足(4.5.114)式,且有

$$[I_\alpha, J_\alpha] = 0 \quad (\alpha = \pm, 3)$$

$$[I_3, J_\pm] = [J_3, I_\pm] = \pm J_\pm, \quad [I_\pm, J_\mp] = \pm 2J_3$$

通过直接计算得到

$$[J_3, J_\pm] = \mp \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sigma_\pm [L_+, L_-]_+ + \sigma_\mp L_\pm^2 + \frac{1}{2}\sigma_3[L_3, L_\pm]_+ + \frac{1}{2}L_\pm\right)$$

$$[J_+, J_-] = -\left(\frac{1}{2}\sigma_+ [L_3, L_-]_+ + \frac{1}{2}\sigma_- [L_3, L_+]_+ + \sigma_3 L_3^2 + \frac{1}{2}L_3\right)$$

其中$[A, B]_+ = AB + BA$,易知$J_\alpha(\alpha = \pm, 3)$之间的对易关系不封闭。进一步可证明:

$$[J_\pm, [J_3, J_\pm]] = \mp\left\{\sigma_\pm L_\pm\left(L_3^2 - \frac{1}{2}L_\mp L_\pm \pm L_3 - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}\sigma_\mp L_\pm - \frac{1}{2}\sigma_3 L_\pm L_3 L_\pm - \frac{3}{4}L_\pm^2\right\} \tag{4.5.116}$$

$$[J_3, [J_+, J_-]] = \frac{1}{2}\left\{\sigma_+\left([L_-, L_3^2]_+ - \frac{1}{2}L_-\right) + \sigma_-\left([L_+, L_3^2]_+ - \frac{1}{2}L\right) - \sigma_3 L_3([L_+, L_-]_+ - 1) - [L_+, L_-]_+ + 2L_3^2\right\} \tag{4.5.117}$$

另一方面可求出$(I_3J_\pm - J_3I_\pm)I_\pm$和$(I_+J_- - J_+I_-)I_3$,可推出它们分别等于(4.5.116)式与(4.5.117)式,从而证明了(4.5.112)式与(4.5.115)式满足$Y(SL(2))$的对易关系。为了定义升降算符,考虑守恒量集合:

由于 $$[H_0, \boldsymbol{I}] = [H_{\text{int}}, \boldsymbol{I}] = [H_0, H_{\text{int}}] = 0 \tag{4.5.118}$$

并注意到，虽然 $[H_{\text{int}}, \boldsymbol{L}] \neq 0$，但

$$[H_{\text{int}}, L^2] = 0 \tag{4.5.119}$$

所以 $\{H_0, H_{\text{int}}, L^2, I^2, I_3\}$ 组成对易集合，考虑到

$$H_{\text{int}} = \lambda(I^2 - L^2 - 3/4) \tag{4.5.120}$$

知 H_{int} 不是独立的，于是守恒量集合选为 $\{H_0, I^2, L^2, I_3\}$。分别用 l, j, m 标记 L^2, I^2 和 I_3 的量子数，在不考虑 H_0 时，H_{int} 的本征矢为 $|l, j, m\rangle$，即

$$\begin{cases} L^2|l, j, m\rangle = l(l+1)|l, j, m\rangle \\ I^2|l, j, m\rangle = j(j+1)|l, j, m\rangle \\ I_3|l, j, m\rangle = m|l; j, m\rangle \\ j = l + 1/2, l - 1/2\ (l \neq 0);\ l = 0, 1, \cdots \\ \quad m = -j, -j+1, \cdots, j \end{cases} \tag{4.5.121}$$

能量本征值为 E_{int}：

$$H_{\text{int}}|l, j, m\rangle = E_{\text{int}}|l, j, m\rangle$$

$$\begin{aligned} E_{\text{int}} &= \lambda\{j(j+1) - l(l+1) - 3/4\} \\ &= \lambda\begin{cases} l & (j = l + 1/2) \\ -l-1 & (j = l - 1/2, l \neq 0) \end{cases} \end{aligned} \tag{4.5.122}$$

现在将本节定义的 $\boldsymbol{I}$ 与 $\boldsymbol{J}$ 算符代入 $O_3^{\pm}(j)$ 及 $O_{\pm}^{\epsilon}(j)$ 中：

$$\begin{cases} O_3^{\pm}(j) = I_+J_- - I_-J_+ + f_{\pm}(j)J_3 - \dfrac{4}{f_{\pm}(j)+4}(\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{J})I_3 \\ O_{\pm}^{\epsilon}(j) = \mp 2\left\{(I_{\pm}J_3 - I_3J_{\pm}) + f_{\epsilon}(j)J_{\pm} - \dfrac{1}{f_{\epsilon}(j)+4}(\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{J})I_{\pm}\right\} \end{cases} \tag{4.5.123}$$

其中 $f_+(j) = 2(j-1)$，$f_-(j) = -2(j+2)$，且 $\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{J} = 0$（没有 monopole），进行简化后得：

$$O_3^{\pm}(j) = \sigma_+ L_-(L_3 \pm j - 1 \pm 1/2) + \sigma_- L_+(L_3 \mp j + 1 \mp 1/2) - \sigma_3(L^2 - L_3^2) + L_3 \tag{4.5.124}$$

$$\sigma_{\mp}^{\pm}(j) = -\sigma_+(2L^2 - L_- L_+ + 2(j - 3/2 \pm 1)L_3) + \sigma_- L_+^2 + \sigma_3(L_3 - j + 3/2 \mp 1)L_+ \tag{4.5.125}$$

$$O_-^{\pm}(j) = -\sigma_-(2L^2 - L_+ L_- + 2(j - 3/2 \pm 1)L_3) + \sigma_+ L_-^2 + \sigma_3(L_3 - j + 3/2 \mp 1)L_- \tag{4.5.126}$$

由于 $\boldsymbol{I}$ 与 $\boldsymbol{J}$ 与 L^2 对易，且 $O_\alpha^{\pm}(j)$ 作用在 $|l, j, m\rangle$ 上将 j 变为 $j\pm 1$，所以 $O_\alpha^+(j)$ 将 $j = l-1/2$ 变到 $j+1 = l+1/2$，而 $O_\alpha^-(j)$ 将 $j = 1/2+l$ 变到 $j-1 = l-1/2$。$j = l+1/2$ 和 $j = l-1/2$ 正是由 l 分裂出的两条谱线，故有

$$\begin{cases} O_3^+(j = l-1/2)|l, l-1/2, m\rangle \sim |l, l+1/2, m\rangle \\ O_3^-(j = l+1/2)|l, l+1/2, m\rangle \sim |l, l-1/2, m\rangle \end{cases} \tag{4.5.127}$$

$O_{\pm}^{\epsilon}(j)$ 的作用类似，差别是同时改变 m。而 $O_\alpha^+(j = l+1/2)$（$O_\alpha^-(j = l-1/2)$）作用到 $|l, l+1/2, m\rangle$（$|l, l-1/2, m\rangle$）上结果为零。对 $l = 1$ 最简单情况，$O_\alpha^{\pm}(j)$ 的升降作用可用图 4.7 表示。

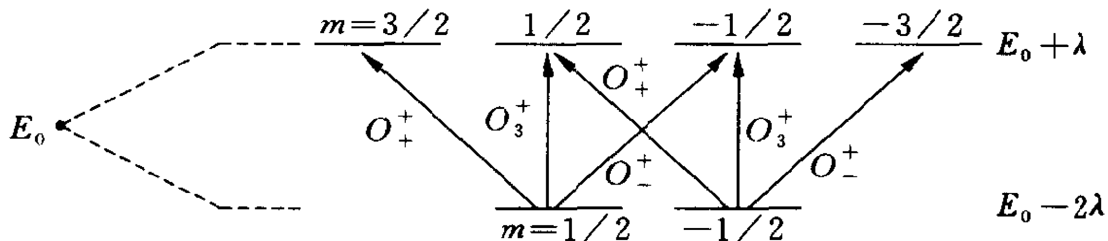


图 4.7

类似地，对任意 $l \neq 0$，$O_\alpha^{\pm}(j)$ 的作用是交换 $E_{\text{int}} = \lambda l$ 和 E_{int}

$= -\lambda(l+1)$。

本节结合量子力学中一些简单的模型介绍了 $Y(SL(2))$ 的一些实现，试图揭示 Yangian 的实际物理意义。由于 Yangian 在实际物理中的应用目前还处于早期，这里只介绍了南开大学研究组的工作，成果仍很有限。这方面的发展趋势是探讨 Yangian 与多体可积模型的直接联系，并希望有助求精确解问题的讨论。以上讨论中只涉及 $\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{J}=0$ 的情况，在物理上相当于未考虑磁单极。当 $\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{J}\neq 0$ 时的 $Q_a^{(\pm)}(l)$ 算符的行为已有一些结论，限于篇幅不再赘述了。

参 考 文 献

1. Drinfeld V G. Soviet Math Dokl,1985,32:254
2. Drinfeld V G. Quantum Group. In:Proceedings of ICM. Berkeley (California): Academic Press,1986. 269
3. Drinfeld V G. Soviet Math Dokl,1988,36:212
4. Faddeev L D, Reshetikhin N Yu, Takhtajan L A. Quantum Groups. In: Yang C N, Ge M L, eds. Braid Groups, Knot Theory and Statistical Mechanics. Singapore: World Scientific Publ Co Ltd,1989. 97
5. Bernard D. Commun Math Phys, 1991,137:191
   Bernard D, Felder G. Nucl Phys, 1991,B365:98
   Ge M L, Xue K, Wang Y W. Introduction to Yangian in Physics. In: Cho Y M, ed. Topics in Theoretical Physics. Singapore: World Scientific Publ co Ltd, 1997. 87
6. Haldane F D M. Phys Rev Lett,1992,69:2021
7. Haldane F D M. Solvable Quantum Many-Body Problems Tianjin Sixth Nankai International Workshop,1993
8. Haldane F D M. Phys Rev Lett,1988,60:635
9. Shastry B S. Phys Rev Lett,1988,60:639
10. Wang Z F, Ge M L, Xue K. J Phys, 1997,A30:5023
11. Uglov D B, Korepin V E. Phys Lett,1994,A190:238
12. Chari V, Pressley A. A Guide to Quantum Groups. London: Cambridge

University Press. 1994; L' Ensegnemnt Math'ematique, 1990, 36: 267; J Reine Angew Math, 1991, 417:87

13. Nagler S E, Tennant D A, Cowley R A, Perring T G, Satija S K. Phys Rev, 1991, B44:12361

    Tennant D A, Perring T G, Cowley R A, Nagler S E. Phys Rev Lett, 1993, 70: 4003

14. Anol'd V I, Novikov S P. Encyclopaedia of Mathmatical Sciences, Dynamics Systems (IV). Berlin: Springer-verlag, 1985
15. 钱伯初,曾谨言. 量子力学习题精选与剖析. 北京:科学出版社,1988. 4.7 和 7.15 题
16. Wu T T, Yang C N. Phys Rev, 1975, D12:3845
17. Wu T T, Yang C N. Nucl Phys, 1976, B107:365
18. 主要文献参见:De Lange O L, Raab R E. Operator Methods in Quantum Mechanics. London: Oxford Clarendon Press, 1991
19. Wu Y S. Phys Rev Lett, 1984, 53:111
20. Byers N, Yang C N. Phys Rev, 1966, 142:976

第 五 章

转移矩阵的整体解

正如在第三章中所指出的，给定 $\check{R}(u)$矩阵的有理形式求解RTT关系时，转移矩阵 $T(u)$常常具有无穷幂展开的形式：$T(u) = \sum_{n=0}^{\infty} u^{-n}T^{(n)}$。从量子反散射方法角度，$T(u)$常常可看做由一系列局域转移矩阵 $L_n(u)$的乘积而构成：$T(u) = \prod_{n=1}^{\hat{N}} L_n(u)$，其中 $L_n(u) = I + u^{-1}L_n$。当格点数 N 极大时便构成了无穷幂次展开式。这种构成 $T(u)$的方式的优点是简单易行，因为这种展开到 u^{-1}的定域解一定满足 RTT 关系（只要 L_n 适当），把它们乘起来仍是 RTT 的解。一个问题自然产生了：这种构成方式是否提供了 RTT 的所有解呢？答案是否定的。因为，如果解出 $T(u)$是 u^{-1}的 N 阶式，它可以分解为 N 个相同的 L 形式的乘积显然是个极特殊的情况。一般来说，必须直接求解 $T(u)$。第四章 Yangian 的构成也必须理解为直接求解 RTT 的结果。这种解有时不能表示为局域转移矩阵的连乘形式，称为整体解(global solutions)。有两类整体解的例子：一类是长程相互作用模型，另一类是 $T(u)$只展开到有限幂次，但不可分解为有限个格点处局域解的乘积。前者代表一个指定格点与链上任意其他格点发生作用，而且对不同格点有不同强度，而不再是近邻相互作用。后一类本质上是李代数的扩展，由于 $T(u)$展开式具有有限次幂，因而具有有限个守恒量。其典

型的例子是 Goryachev-Chaplygin 陀螺回转仪模型。当然，除此之外还有许多具体例子，以前介绍的 Haldane-Shastry 模型也属于 $T(u)$ 的整体解。本章只介绍这两类整体解的典型例子。

§5.1　卡洛杰惹-萨则兰德(Calogero-Sutherland)模型

近邻相互作用模型已经研究多年，典型的模型是海森伯链。我们知道一维无穷长近邻相互作用模型常常有局部的某种连续变换不变性，例如 $SL(2)$，在物理行为上其相变温度只能在 0K。人们关心的另一类模型是一维长程相互作用的量子可积系统。很早之前，就有 Calogero 模型[1]，它的哈密顿量为

$$H_{\mathrm{C}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} p_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^{N} \frac{\lambda(\lambda+1)}{(x_i - x_j)^2}$$

其中 λ 为任意参数，x_i 为一维坐标点，以及卡洛杰惹-萨则兰德模型[2]

$$H_{\mathrm{CS}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} p_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^{N} \frac{\lambda(\lambda+1)}{\sin^2(x_i - x_j)} \tag{5.1.1}$$

它们已被证明是可积的。在量子可积性方面，证明这一类模型的完全可积性最简单的办法是由文献[3]给出的。引入一种推广的“动量”算符，称为 Dunkl 算符[4]，以 D_i 表示，满足对易关系：

$$[D_i, D_j] = \lambda(D_i - D_j)K_{ij} \tag{5.1.2}$$

其中 K_{ij} 为坐标置换算符 $K_{ij}x_j = x_iK_{ij}$（相重不求和），且

$$D_i = p_i + \sum_{i\neq j} V_{ij}K_{ij},\ V_{ij} = V(x_i - x_j),\ \mathrm{i}p_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{5.1.3}$$

以下求出如(5.1.3)式定义的算符何时满足(5.1.2)式的条件。

$$
\begin{aligned}
[D_i, D_j] &= \Big[p_i, \sum_{k\neq j} V_{jk}K_{jk}\Big] + \sum_{k\neq i}[V_{ik}K_{ik}, p_j] \\
&\quad + \sum_{k\neq i}\sum_{l\neq j}[V_{ik}K_{ik}, V_{jl}K_{jl}] \\
&= \sum_{k\neq j}[p_i, V_{jk}K_{jk}] - (i\leftrightarrow j) \\
&\quad + \sum_{k\neq i}\sum_{l\neq j}[V_{ik}K_{ik}, V_{jl}K_{jl}] \qquad (5.1.4)
\end{aligned}
$$

注意 $V_{jk}\equiv V(x_j - x_k)$ 只依赖于 x_j 和 x_k，所以将 p_i 作用在 V_{jk} 及其以后的某个函数上的时候，由于 $i\neq j$，只有 $i=k$ 时才不为零。同时注意微商算符 $[p_i, M]$ 的意义是 $[p_i, M]f$，即作用在某个函数 f 上面，即

$$
\begin{aligned}
[p_i, M]f &= p_i(Mf) - M(p_i f) \\
&= (p_i M)f + M(p_i f) - M(p_i f) = (p_i M)f
\end{aligned}
$$

或

$$[p_i, M] = p_i M$$

但在形式上它等价于

$$[p_i, M] = p_i M - M p_i$$

其中 p_i 作用于它右边所有的量。于是

$$
\begin{aligned}
\sum_{k\neq j}[p_i, V_{jk}K_{jk}] &= [p_i, V_{ji}K_{ji}] \\
&= p_i V_{ji}K_{ji} - V_{ji}K_{ji}p_i \\
&= p_i V_{ji}K_{ij} - V_{ji}p_j K_{ij} \\
&\qquad (\text{因为 } K_{ij} = K_{ji},\ p_j K_{ij} = K_{ij}p_i) \\
&= \big\{(p_i V_{ji}) + (V_{ji}p_i - V_{ji}p_j)\big\}K_{ij}
\end{aligned}
$$

故得

$$\sum_{k\neq j}[p_i, V_{jk}K_{jk}] - (i\leftrightarrow j)$$

$$= \{(p_iV_{ji}) - (p_jV_{ij}) + (V_{ij} + V_{ji})(p_i - p_j)\}K_{ij}$$

$$= (V_{ij} + V_{ji})(p_i - p_j)K_{ij} \tag{5.1.5}$$

上式中由于 $(p_i - p_j)$ 将来作用在函数上,未必是反对称的,故形式上保留它,而

$$(p_iV_{ji}) - (p_jV_{ij}) = 0$$

因为

$$V_{ij} = V(x_i - x_j)。$$

再计算 $\sum_{k\neq i}\sum_{l\neq j}[V_{ik}K_{ik}, V_{jl}K_{jl}]$, 由于 $i\neq j$, 它不为零的项只有三种情况: $k = l$, $k = j$, 及 $l = i$。注意"矢量"移过 K_{ik}时,要换下标,即使 K_{jk}自己也是如此。于是得:

$$l = k\ 项:\ \sum_{k}[V_{ik}K_{ik}, V_{jk}K_{jk}]$$

$$= V_{ik}K_{ik}V_{jk}K_{jk} - V_{jk}K_{jk}V_{ik}K_{ik}$$

$$= V_{ik}V_{ji}K_{ik}K_{jk} - V_{jk}V_{ij}K_{jk}K_{ik}$$

$$= (V_{ik}V_{ji}K_{jk} - V_{jk}V_{ij}K_{ik})K_{ij}$$

上式用到了 $$K_{ik}K_{jk} = K_{jk}K_{ji} = K_{jk}K_{ij}$$

类似的计算给出:

$$k = j\ 项:\ \sum_{l\neq j}[V_{ij}K_{ij}, V_{jl}K_{jl}]$$

$$= \sum_{k\neq j}[V_{ij}K_{ij}, V_{jk}K_{jk}]$$

$$= \sum_{k\neq j}(V_{ij}V_{ik}K_{ik} - V_{jk}V_{ik}K_{jk})K_{ij}$$

$$l = i\ 项:\ \sum_{k\neq i}[V_{ik}K_{ik}, V_{ji}K_{ji}]$$

$$= \sum_{k \neq i} (V_{ik} V_{jk} K_{ik} - V_{ji} V_{jk} K_{jk}) K_{ij}$$

于是得到：

$$[D_i, D_j] = \{ (V_{ij} + V_{ji})(p_i - p_j) + \sum_{k \neq i, j} [(V_{ij} V_{ik} - V_{jk} V_{ij} + V_{ik} V_{jk}) K_{ik} - (V_{jk} V_{ik} - V_{ik} V_{ji} + V_{ji} V_{jk}) K_{jk}] \} K_{ij}$$

注意右端第二项正是互为 $(i \leftrightarrow j)$ 并相减。现在强加两组条件给 V_{ij}：

$$V_{ij} + V_{ji} = \lambda \tag{5.1.6}$$

$$V_{ij} V_{ik} - V_{jk} V_{ij} + V_{ik} V_{jk} = \lambda V_{ik} \text{（相重指标不求和）} \tag{5.1.7}$$

则将有

$$[D_i, D_j] = \lambda (D_i - D_j) K_{ij}$$

这两组限制条件限制了 $V_{ij} \equiv V(x_i - x_j)$ 的形式。满足这些条件的函数比较多。为了验证方便，引入

$$x_{ij} = x_i - x_j = x, \quad x_{ik} = x_i - x_k = y \tag{5.1.8}$$

则
$$x_{jk} = x_j - x_k = y - x$$

于是两个条件变为

$$V(x) + V(-x) = \lambda \tag{5.1.9}$$

$$V(x)V(y) + V(y)V(y-x) - V(y-x)V(x) = \lambda V(y) \tag{5.1.10}$$

满足这两个条件的最简单的例子是：

$$\lambda = 0: \quad V(x) = -V(-x)$$

$$V(y-x) = \frac{V(x)V(y)}{V(x) - V(y)} \text{ 或 } \frac{1}{V(y-x)} = \frac{1}{V(y)} - \frac{1}{V(x)}$$

它的解可选为

$$V(x)=\frac{1}{x}\quad \text{或}\quad V(x_i-x_j)=V_{ij}=\frac{1}{x_i-x_j}\tag{5.1.11}$$

此时
$$[D_i,D_j]=0$$

另外一个充分解是当 $\lambda\neq 0$ 时：

$$V_{ij}=V(x_i-x_j)\equiv V(x)=\frac{\lambda}{2}\frac{e^x}{\mathrm{sh}x}\tag{5.1.12}$$

其中

$$\mathrm{sh}x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$$

实际上，由于(5.1.10)可写为：

$$V(y-x)=\frac{V(y)(\lambda-V(x))}{V(y)-V(x)}\tag{5.1.13}$$

将(5.1.12)直接代入(5.1.7)式，立即得到(5.1.7)式的右端等于 $\frac{\lambda}{2}\frac{e^{(y-x)}}{\mathrm{sh}(y-x)}$，亦即满足(5.1.7)式要求。

(5.1.6)式与(5.1.7)式的形式不太对称，现在引入

$$\overline{V}_{ij}=\frac{1}{2}(V_{ij}-V_{ji})\tag{5.1.14}$$

由(5.1.6)式知

$$V_{ij}=\overline{V}_{ij}+\frac{1}{2}\lambda\tag{5.1.15}$$

将(5.1.15)式代入(5.1.6)式与(5.1.7)式，它们将用以下两个等价条件代替：

$$\overline{V}_{ij}=-\overline{V}_{ji}\tag{5.1.16}$$

$$\overline{V}_{ij}\overline{V}_{jk}+\overline{V}_{jk}\overline{V}_{ki}+\overline{V}_{ki}\overline{V}_{ij}=-\frac{1}{4}\lambda^2\tag{5.1.17}$$

此时(5.1.12)式导致

$$\overline{V}_{ij} = \frac{\lambda}{2}\text{cth}x = \lambda\text{cth}(x_i - x_j) \equiv \frac{\lambda}{2}\text{cth}x_{ij} \quad (5.1.18)$$

其中 $\text{cth}x = \text{ch}x/\text{sh}x$。

当 $\lambda \neq 0$，除了(5.1.12)式形式的解之外，还有其他形式的满足(5.1.6)式与(5.1.7)式的解。例如：

$$V(x) = \begin{cases} \lambda, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} = \lambda\theta(x) \quad (5.1.19)$$

其中阶跃函数的定义是 $\theta(x) = 1\ (x > 0)$，$\theta(x) = 0\ (x < 0)$。

相应地有：

$$\overline{V}(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2}, & x > 0 \\ -\frac{\lambda}{2}, & x < 0 \end{cases} = \lambda\varepsilon(x) \quad (5.1.20)$$

其中 $\varepsilon(x) = \frac{1}{2}(x > 0)$，$\varepsilon(x) = -\frac{1}{2}(x < 0)$。

由 $\overline{V}(x)$可以定义相应的算符

$$\overline{D}_i = p_i + \sum_{i \neq j} \overline{V}_{ij} K_{ij} \quad (\overline{V}_{ij} = -\overline{V}_{ji}) \quad (5.1.21)$$

它与 D_i 的关系是

$$D_i = \overline{D}_i + \frac{1}{2}\lambda \sum_{i \neq j} K_{ij} \quad (5.1.22)$$

可证 $\overline{D}_i$与 D_i 有相似的性质。

哈密顿量定义为

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \overline{D}_i^2 \quad (5.1.23)$$

将(5.1.21)式代入(5.1.23)式，得到：

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} p_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^{N}[\overline{V}_{ij}(p_i + p_j)K_{ij} + (p_i\overline{V}_{ij})K_{ij}]$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{\substack{i\neq j\\ i\neq k}}\overline{V}_{ij}K_{ij}\overline{V}_{ik}K_{ik} \tag{5.1.24}$$

现在分别处理各项。$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} p_i^2$ 为系统的动能项；由于 $\overline{V}_{ij}$为反对称，$(p_i + p_j)K_{ij}$ 对 i 与 j 对称，故该项为零。(5.1.24)式右端最后一项分两种情况：$j = k$ 与 $j \neq k$，后一种情况表示 i, j, k 互不相等。由于 $j = k$ 时将 K_{ij}移过 $\overline{V}_{ij}$时，变为 $\overline{V}_{ji} = -\overline{V}_{ij}$，而 $K_{ij}^2 = 1$，于是有

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} p_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^{N}[(p_i\overline{V}_{ij})K_{ij} - (\overline{V}_{ij})^2] + W \tag{5.1.25}$$

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j\neq k}\overline{V}_{ij}\overline{V}_{jk}K_{ij}K_{jk} \tag{5.1.26}$$

现在证明(5.1.26)式可以与(5.1.17)式相联系，因而可将 W 项视为常数项。事实上(5.1.26)式可以写为对称形式。步骤如下：将求和指标 $i\to j,\ j\to k,\ k\to i$，

$$\sum_{\substack{i\neq j\\ i\neq k\\ k\neq j}}\overline{V}_{ij}\overline{V}_{jk}K_{ij}K_{jk} \xrightarrow{i\to j,\ j\to k,\ k\to i} \sum\overline{V}_{jk}\overline{V}_{ki}K_{jk}K_{ki}$$

再将右端 $K_{ki} = K_{ik}$ 移过 K_{jk}，则 K_{ik}变为 K_{ij}，故有

$$\sum\overline{V}_{ij}\overline{V}_{jk}K_{ij}K_{jk} = \sum\overline{V}_{jk}\overline{V}_{ki}K_{ij}K_{jk}$$

再对上式作同样操作：将求和指标仍然换为 $i\to j,\ j\to k,\ k\to i$，然后将最右端的 K_{ki}移过次右端的 K_{jk}，则有

$$\sum \overline{V}_{jk}\overline{V}_{ki}K_{ij}K_{jk} = \sum \overline{V}_{ki}\overline{V}_{ij}K_{jk}K_{ki} = \sum \overline{V}_{ki}\overline{V}_{ij}K_{ij}K_{jk}$$

由于这三者相同，故有

$$W = \frac{1}{6}\sum_{\substack{i\neq j,\, i\neq k\\ j\neq k}}^{N}(\overline{V}_{ij}\overline{V}_{jk} + \overline{V}_{jk}\overline{V}_{ki} + \overline{V}_{ki}\overline{V}_{ij})P_{ij}P_{jk} \tag{5.1.27}$$

与(5.1.17)式一致，即当选(5.1.17)式时，得到

$$W = -\frac{\lambda^2}{24}\sum_{\substack{i\neq j,\, i\neq k\\ j\neq k}}^{N}P_{ij}P_{jk} = c(\text{常数}) \tag{5.1.28}$$

于是在(5.1.16)式、(5.1.17)式下得到哈密顿量：

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}p_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^{N}[(p_i\overline{V}_{ij})K_{ij} - (\overline{V}_{ij})^2] + c \tag{5.1.29}$$

为以后方便引入常数

$$\lambda = 2\mathrm{i}l \tag{5.1.30}$$

则对三种情况，得到哈密顿量为

1) $l = 0$， $\overline{V}_{ij} = V_{ij} = \dfrac{\mathrm{i}\alpha}{x_{ij}} = \dfrac{\mathrm{i}\alpha}{x_i - x_j}$ (5.1.31)

其中 α 为任意参数。此时(3.1.29)变为

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}p_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^{N}\frac{\alpha(\alpha - K_{ij})}{(x_i - x_j)^2} + \text{常数}. \tag{5.1.32}$$

常数项可以丢掉，将 K_{ij} 作用在对称(反对称)波函数上，则可换为 ± 1，即有哈密顿量：

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}p_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^{N}\frac{\alpha(\alpha \mp 1)}{(x_i - x_j)^2} \tag{5.1.33}$$

2) 由(5.1.20)式，$\overline{V}(x) = 2\mathrm{i}l\varepsilon(x)$ 时，由于 $\varepsilon'(x) = \delta(x)$，而

$(\overline{V}(x))^2 = \frac{\lambda^2}{4}$ (除 $x = 0$ 点外)故有(丢掉常数项):

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} p_i^2 + 2c\sum_{i\neq j}^{N}\delta(x_i - x_j) \qquad (5.1.34)$$

其中 $l = 4c$, c 为任意常数。当 $c > 0$ 时为排斥作用。(5.1.34)式表示具有 δ 函数相互作用势的一维多体问题的哈密顿量。这种相互作用在粒子碰撞时才产生,当 $c \to \infty$ 时,这个模型接近于费米子行为。杨振宁教授就是在讨论(5.1.34)式时提出了 YBE,特别是(5.1.34)式具有反对称性质的波函数的情况,它奠定了以后有关讨论的基础。

3) 由(5.1.18)式取 $\overline{V}(x) = \mathrm{i}l\mathrm{cth}x$ (或 $\mathrm{i}l\cot x$),由(5.1.25)式丢掉常数项,有

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} p_i^2 + \sum_{i\neq j}^{N}\frac{l(l\mp 1)}{\sin^2(x_i - x_j)} \qquad (5.1.35)$$

上面已将 K_{ij}换为±1(本征值)了。或用 $\mathrm{sh}^2 x$ 表出:

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} p_i^2 + \sum_{i\neq j}^{N}\frac{l(l\mp 1)}{\mathrm{sh}^2(x_i - x_j)} \qquad (5.1.36)$$

(5.1.35)式与(5.1.36)式正是卡洛杰惹-萨则兰德模型[2],它比(5.1.33)式具有明显的周期行为。

(5.1.33)、(5.1.35)与(5.1.36)式具有明显的长程相互作用性质,即不是近邻相互作用,相距很远的两点之间仍有相互作用,当然不同点作用的效果是不同的。将(5.1.33)式,(5.1.36)式形式的哈密顿量对角化是很重要的问题。但限于篇幅和本书的目的,不再赘述。这方面的书刊与文章很多,可参考有关文献。

§5.2 推广的 Polychronakos 解

在(5.1.3)式中令

$$V_{ij} = P_{ij}^{+} a_{ij} + P_{ij}^{-} b_{ij} \tag{5.2.1}$$

其中

$$P_{ij}^{\pm} = \frac{1 \pm \sigma_i \sigma_j}{2} \quad (\sigma_i^2 = 1) \tag{5.2.2}$$

注意，σ_i 仅仅代表作用在第 i 格点上的算符，平方为 1。a_{ij} 与 b_{ij} 为依赖于 $(x_i - x_j)$ 的标量函数。将(5.2.1)式代入(5.1.23)式中，重复以前计算过程得到：

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} p_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^{N}\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}V_{ij}K_{ij} + V_{ij}^2\right\} - \frac{1}{6}\sum_{i\neq j\neq k\neq i} V_{ijk}K_{ijk} \tag{5.2.3}$$

其中

$$V_{ijk} = P_{ijk}^{+} A_{ijk} + P_{ijk}^{-} A_{ijk} + P_{kij}^{-} A_{kij} + P_{jki}^{-} A_{jki} \tag{5.2.4}$$

而

$$\begin{cases} P_{ijk}^{\pm} = P_{ij}^{\pm} P_{jk}^{\pm} \\ A_{ijk} = a_{ij}a_{jk} + a_{jk}a_{ki} + a_{ki}a_{ij} \\ B_{ijk} = a_{ij}b_{jk} + b_{jk}a_{ki} + b_{ki}a_{ij} \end{cases} \tag{5.2.5}$$

注意 $P_{ijk}^{+} = P_{ikj}^{+} = \cdots = P_{kji}^{+}$；但 $P_{ijk}^{-} = P_{jik}^{-}$，即仅仅有一个类型关系。(5.2.1)式给出哈密顿量的条件是

$$V_{ijk} = 常数(或\ 0) \tag{5.2.6}$$

现在列出(5.2.4)式的各种解[5]：

1) 当 $A_{ijk} \neq 0$，$B_{ijk} \neq 0$，存在充分解

$$\begin{cases} a(x) = l\operatorname{cth}(ax) \\ b(x) = l\tanh(ax) \end{cases} \tag{5.2.7}$$

或

$$\begin{cases} a(x) = l\cot(ax) \\ b(x) = l\tan(ax) \end{cases} \tag{5.2.8}$$

其中 $x = x_{ij} = x_i - x_j$，a 与 l 为常数，此时

$$V_{ijk} = -l^2(P_{ijk}^+ + P_{ijk}^- + P_{kij}^- + P_{jki}^-) = -l^2 \quad (5.2.9)$$

且哈密顿量为

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\pi_i^2 - \frac{1}{6}l^2 \sum_{i\neq j\neq k\neq i} K_{ijk} \quad (5.2.10)$$

上式右端第二项为常数。将(5.2.7)式代入，遂得

$$H_{SR} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} p_i^2 + \sum_{i<j}^{N} l(l - aK_{ij})\left\{\frac{P_{ij}^+}{\mathrm{sh}^2(ax_{ij})} - \frac{P_{ij}^-}{\mathrm{ch}^2(ax_{ij})}\right\} \quad (5.2.11)$$

$$x_{ij} \equiv x_i - x_j$$

注意 K_{ij}的本征值为± 1，H_{SR}正是 Sutherland-Römer 给出的可积模型的哈密顿量[6]。

定义

$$\bar{\pi}_i = \pi_i + \mathrm{i}l\sum_{i\neq j} K_{ij} \quad (5.2.12)$$

则有

$$[\bar{\pi}_i, \bar{\pi}_j] = 2\mathrm{i}l(\bar{\pi}_i - \bar{\pi}_j)K_{ij} \quad (5.2.13)$$

$$[H, \pi_i] = [H, \bar{\pi}_j] = 0 \quad (5.2.14)$$

守恒量为

$$I_n = \sum_{i=1}^{N} \bar{\pi}_i^n \quad (5.2.15)$$

满足

$$[I_n, I_m] = 0, [H, I_n] = 0 \quad (5.2.16)$$

2) 当 $B_{ijk} = 0$，分两种情况

a) $A_{ijk} = 0$

$$a(x) = \frac{l}{x}, V_{ijk} = 0 \quad (5.2.17)$$

$$H_C = \frac{1}{2}\sum_i p_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\frac{l(l - K_{ij})}{(x_i - x_j)^2}P_{ij}^+ \quad (5.2.18)$$

由于K_{ij}本征值为±1，它是带有 P_{ij}^{+}的 Calogero 模型。

b) $A_{ijk}=\beta^2\neq 0$

$$[\pi_i,\pi_j]=\beta\sum_{k\neq i,j}P_{ijk}^{+}(K_{ijk}-K_{jik}) \tag{5.2.19}$$

定义

$$\overline{\pi}'_i=\pi_i+\beta\sum_{i\neq j}P_{ij}^{+}K_{ij} \tag{5.2.20}$$

易证

$$[\overline{\pi}'_i,P_{jk}^{+}]=0\quad(j\neq k) \tag{5.2.21}$$

$$[\overline{\pi}'_i,\overline{\pi}'_j]=2\beta P_{ij}^{+}(\overline{\pi}'_i-\overline{\pi}'_j)K_{ij} \tag{5.2.22}$$

$$[\overline{\pi}'^{n}_i,\overline{\pi}'_j]=2\beta P_{ij}^{+}(\overline{\pi}'^{n}_i-\overline{\pi}'^{n}_j)K_{ij} \tag{5.2.23}$$

哈密顿量为

$$H_S=\frac{1}{2}\sum_i\pi_i^2+\frac{\beta^2}{6}\sum_{i\neq j\neq k\neq i}P_{ijk}^{+}K_{ijk} \tag{5.2.24}$$

借助(5.2.20)式可得

$$[H,\pi_i]=[H,\overline{\pi}'_i]=\left[H,\left(\sum_i\overline{\pi}'^{n}_i\right)\right]=0$$

这时V_{ijk}有两种充分解

i) $$a(x)=\mathrm{i}l\cot(ax)\text{ 或 }a(x)=l\coth(ax) \tag{5.2.25}$$

$$V_{ijk}=-l^2P_{ijk}^{+} \tag{5.2.26}$$

$$H=\frac{1}{2}\sum_i p_i^2+\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\frac{l(l-aK_{ij})}{\sin^2[a(x_i-x_j)]}P_{ij}^{+} \tag{5.2.27}$$

取 $K_{ij}=\pm 1$ 时，它是文献[2]形式的推广，并与文献[7]一致。

ii) $$a(x)=l\,\mathrm{sgn}(x) \tag{5.2.28}$$

$$H_Y=\frac{1}{2}\sum_i p_i^2+\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}l(l-K_{ij})\delta(x_i-x_j)P_{ij}^{+} \tag{5.2.29}$$

注意可取 $K_{ij}=\pm 1$，(5.2.29)式正是闫沐霖等首先发现的模型[8]，他们是用 Bethe-Ansatz 直接解出来的，并定义了Y_{ij}^{ab}算符，满足(2.2.58)式～(2.2.60)式：

$$Y_{ij}^{ab}=\frac{1}{\mathrm{i}K_{ij}(\mathrm{i}K_{ij}-2c)}[\mathrm{i}K_{ij}-c(1-\sigma_i\sigma_j)]$$

$$\cdot[-\mathrm{i}K_{ij}P^{ab}+c(1+\sigma_i\sigma_j)] \tag{5.2.30}$$

$c=l(l\pm 1)/2$。注意在闫模型中只有 P_{ij}^{+}，不允许存在 P_{ij}^{-}。

§5.3　RTT 关系与长程模型

上述模型的量子可积性过去是按模型单独讨论的。文献[10]尝试从 RTT 关系讨论，从而自动保证其完全量子可积性。文献[5]发展这一观念，从 Yangian 角度进一步证明可积性，这种办法可处理更广泛的模型。现在介绍这方面内容。选择 YBE 的解，它是 $SL(p)$ $(p>2)$的有理解

$$R(u)=u+\lambda P_{00'} \tag{5.3.1}$$

其中 λ 为任意参数，$P_{00'}$表示辅助空间中相邻标号为 0 与 0′的两空间的置换算符，它可用基矢表为

$$P_{00'}=\sum_{a,b=1}^{p}X_{ba}^{0}X_{ab}^{0'} \tag{5.3.2}$$

即为 $p^2\times p^2$ 维表示，$p>2$，且

$$X_{ba}^{0}=|b\rangle_{00}\langle a| \tag{5.3.3}$$

RTT 关系为

$$R_{00'}(u-v)\overset{0}{T}(u)\overset{0'}{T}(v)=\overset{0'}{T}(v)\overset{0}{T}(u)R_{00'}(u-v) \tag{5.3.4}$$

其中

$$\overset{0}{T}(u) = T(u) \otimes 1, \overset{0'}{T}(u) = 1 \otimes T(u) \qquad (5.3.5)$$

现在将 $\overset{0}{T}(u)$用谱参数 u 的幂次展开：

$$\overset{0}{T}(u) = I + \lambda \sum_{a,b=1}^{p} X_{ba}^{0} \sum_{n=0}^{\infty} T_{n}^{ab} u^{-(n+1)} \qquad (5.3.6)$$

并将 $\overset{0}{T}(u)$及 $\overset{0'}{T}(v)$代入 RTT 关系，得到

$$\sum_{a,b} \sum_{c,d} X_{ba}^{0} X_{dc}^{0'} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ u^{-n-1} f_{1}^{(n)} - v^{-n-1} f_{2}^{(n)} + \sum_{m=0}^{\infty} u^{-n-1} v^{-m-1} f_{3}^{(n,m)} = 0 \right\} \qquad (5.3.7)$$

其中

$$f_{1}^{(n)} = \delta_{bc} T_{n}^{ad} - \delta_{ad} T_{n}^{cb} - [T_{n}^{ab}, T_{0}^{cd}] \qquad (5.3.8)$$

$$f_{2}^{(n)} = \delta_{bc} T_{n}^{ad} - \delta_{ad} T_{n}^{cb} - [T_{0}^{ab}, T_{n}^{cd}] \qquad (5.3.9)$$

$$f_{3}^{(n,m)} = \lambda(T_{n}^{ad} T_{m}^{cb} - T_{m}^{ad} T_{n}^{cb}) + [T_{n+1}^{ab}, T_{m}^{cd}] - [T_{n}^{ab}, T_{m+1}^{cd}] \qquad (5.3.10)$$

满足 RTT 关系，要求

$$f_{1}^{(n)} = f_{2}^{(n)} = f_{3}^{(n,m)} = 0 \qquad (5.3.11)$$

首先，从(5.3.7)式推出

$$\delta_{bc} T_{n+1}^{ad} - \delta_{ad} T_{n+1}^{cd} = \lambda(T_{0}^{ad} T_{n}^{cb} - T_{n}^{ad} T_{0}^{cb}) + [T_{n}^{ab}, T_{1}^{cd}] \qquad (5.3.12)$$

为满足(5.3.12)式可写为

$$\begin{cases} T_{n+1}^{ad} = \lambda(T_{0}^{ad} T_{n}^{cc} - T_{n}^{ad} T_{0}^{cc}) + [T_{n}^{ac}, T_{1}^{cd}] \quad (a \neq d) \\ T_{n+1}^{aa} - T_{n+1}^{cc} = \lambda(T_{0}^{aa} T_{n}^{cc} - T_{n}^{aa} T_{0}^{cc}) + [T_{n}^{ac}, T_{1}^{ca}] \end{cases} \qquad (5.3.13)$$

上式指标重复不表示求和。(5.3.13)式表明，T_{n}^{ab} 可以由 T_{0}^{ab} 与 T_{1}^{ab}

决定，这与 Drinfeld 定理相符。现在引入 $Y(SL(n))$ $(n>2)$ 的新的实现：

$$T_0^{ab}=\sum_{i=1}^{M}I_i^{ab}\quad(a,b=1,2,\cdots,p)\tag{5.3.14}$$

$$T_1^{ab}=\sum_{i=1}^{M}I_i^{ab}D_i\tag{5.3.15}$$

由于展开式形式(5.3.6)式，这里 T_0 就是第四章中的 $T^{(1)}$ 的地位，而 T_1 为那里的 $T^{(2)}$，亦即 T_0 就是 Yangian 中的 $\{I\}$，而 T_1 即为相应的 $\{J\}$。现在假定 $\{J\}$ 仍用 $\{I\}$ 的生成元展开，但要付出一个代价：这种展开不局限于一个格点，而是遍及任意格点，从而包含长程相互作用。现在关键问题是 RTT 关系应当能决定未知算符 D_i 的对易关系，如果的确如此，那么(5.3.15)式就是正确的选择。在(5.3.14)式中 I_i^{ab} 满足通常 $SL(p)$ 的对易关系：

$$[I_i^{ab},I_j^{cd}]=\delta_{ij}(\delta_{bc}I_i^{ad}-\delta_{ad}I_i^{cb})\tag{5.3.16}$$

而 D_i 将由 RTT 关系决定。将(5.3.14)式与(5.3.15)式代入 $f_1^{(1)}$，得到

$$\sum_i\sum_j I_i^{ab}[D_i,I_j^{cd}]=0\tag{5.3.17}$$

进一步要求对任意 j

$$\sum_i I_i^{ab}[D_i,I_j^{cd}]=0\tag{5.3.18}$$

则 T_2^{ab} 满足：

$$\delta_{bc}T_2^{ad}-\delta_{ad}T_2^{cb}=\sum_{i\neq j}I_i^{ab}I_j^{cd}\Big\{\lambda\sum_{k,l}I_i^{kl}I_j^{lk}(D_j-D_i)+[D_i,D_j]\Big\}+\sum_i(\delta_{bc}I_i^{ad}D_i^2-\delta_{ad}I_i^{cb}D_i^2)\tag{5.3.19}$$

(5.3.19)式的充分解为

$$T_2^{ab}=\sum_i I_i^{ab}D_i^2 \tag{5.3.20}$$

其中 D_i 满足：

$$[D_i, D_j]=\lambda\sum_{a,b}I_j^{ab}I_i^{ba}(D_i-D_j) \tag{5.3.21}$$

亦即，当 D_i 满足(5.3.21)式时，T_2^{ab} 以 D_i^2 为"系数"用 I_i 展开。另外，要指出的是 $f_1^{(n)}$ 与 $f_2^{(n)}$ 只有一个式子是独立的。但是到现在为止，还没有 D_i 与 I_j^{ab} 之间的关系，它们遵从(5.3.18)式，这是很复杂的关系。然而由文献[10]的讨论，可引入投影算符的概念，令 Σ_1，Σ_2 与 Σ_3 分别表示由 K_{ij}，P_{ij}与 $P_{ij}K_{ij}$生成的置换群，K_{ij}交换粒子的坐标，P_{ij}交换自旋，投影算符定义为：

$$\rho(AB)=A,\quad 当\ A\in\Sigma_2,\ B\in\Sigma_1 \tag{5.3.22}$$

这相当于将 $P_{ij}K_{ij}$投影成 1，即作用在对称波函数上，由于

$$P_{ij}=\sum_{a,b}^{p}I_i^{ab}I_j^{ba} \tag{5.3.23}$$

并令[10]

$$D_i=\rho(\hat{D}_i),\ D_i\in\Sigma_2,\ \hat{D}_i\in\Sigma_1 \tag{5.3.24}$$

其中 $\hat{D}_i$ 为算符：

$$K_{ij}\hat{D}_i=\hat{D}_jK_{ij},\ K_{ij}\hat{D}_l=\hat{D}_lK_{ij}\quad(i,\ j\neq l) \tag{5.3.25}$$

引入投影：

$$T_m^{ab}=\sum_{i=1}^{M}I_i^{ab}\rho(\hat{D}_i^m)\quad(m\geqslant 0) \tag{5.3.26}$$

则立即推出

$$[\hat{D}_i, \hat{D}_j]=\lambda\rho^{-1}(P_{ij}(\hat{D}_j-\hat{D}_i))=\lambda(\hat{D}_j-\hat{D}_i)K_{ij} \tag{5.3.27}$$

(下指标相重不求和)。利用投影运算 ρ，从(5.3.26)式可以看出，

T_m 有非常简单的表达式，它用 I_i 展开，系数即为 $(\hat{D}_i)^m$ 的投影。可以证明，(5.3.26)式给出的 T_m^{ab} 满足 RTT 关系，即(5.3.4)式，事实上，$f_1^{(n)}=0$ 很容易被证明。利用

$$[\hat{D}_i^n, \hat{D}_j^m] = \sum_{k=0}^{n-1} D_i^k [\hat{D}_i, \hat{D}_j^m] \hat{D}_j^{n-k-1}$$

$$= \lambda \sum_{k=0}^{n-1} D_i^k (\hat{D}_i^m - \hat{D}_j^m) \hat{D}_j^{n-k-1} K_{ij} \qquad (5.3.28)$$

可证 $f_3^{(n,m)}=0$，因此用投影方案，比较方便地证明(5.3.26)式满足 RTT 关系。

现在讨论哈密顿量。由于变形的行列式为

$$\widetilde{\det} T(u) = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) T_{1\sigma_1}(u-(p-1)\lambda)$$

$$\cdot T_{2\sigma_2}(u-(p-2)\lambda) \cdots T_{p\sigma_p}(u) \qquad (5.3.29)$$

它是(4.1.16)式的推广，$\varepsilon(\sigma)$ 为由置换长度决定的正、负号。由一般理论

$$[\widetilde{\det} T(u), T_m^{ab}] = 0 \qquad (5.3.30)$$

亦即 $\widetilde{\det} T(u)$ 与任意矩阵元 T_m^{ab} 算符对易。利用 T_m^{ab} 用 $\hat{D}_i$ 的投影表达式(ρ 表示投影)，经过相当的计算，得到：

$$\widetilde{\det} T(u) = 1 + \frac{\lambda}{u} M + \frac{\lambda}{u^2} \rho \left\{ \sum_{i=1}^{M} \hat{D}_i - \frac{\lambda}{2} \sum_{i \neq j}^{M} K_{ij} + \frac{\lambda}{2} M(M-1) \right\}$$

$$+ \frac{\lambda}{u^3} \rho \left\{ \left[\sum_{i}^{M} \hat{D}_i - \frac{\lambda}{2} \sum_{i \neq j}^{M} K_{ij} \right]^2 + \frac{\lambda^2}{12} \sum_{i \neq j \neq k \neq i} K_{ij} K_{jk} \right.$$

$$\left. + \lambda (M-1) \left(\sum_{i=1}^{M} \hat{D}_i - \frac{\lambda}{2} \sum_{j \neq i}^{M} K_{ij} \right) \right.$$

$$+\frac{\lambda^2}{6}M(M-1)(M-2)+\frac{\lambda^2}{4}M(M-1)\Big\}+\cdots$$

(5.3.31)

由于 u 的不同幂次前的算符都是守恒量，哈密顿量出现在 u^{-3} 系数中，取为

$$\hat{H}=\frac{1}{2}\rho\left\{\left(\sum_{i=1}^{M}\hat{D}_i-\frac{\lambda}{2}\sum_{i\neq j}^{M}K_{ij}\right)^2+\frac{\lambda^2}{12}\sum_{i\neq j\neq k\neq i}K_{ij}K_{jk}\right\}$$

(5.3.32)

由于哈密顿量 $\hat{H}$ 来自 $\widetilde{\det}T(u)$，所以 $\hat{H}$ 必与 Yangian 对易：

$$[\hat{H},Y(SL(p))]=0 \qquad (5.3.33)$$

对比(5.3.27)式与(5.1.2)式，算符方程的解很容易通过 §5.1 的讨论得到，我们列出一些结果，例如

a) $$\hat{D}_i=p_i+\frac{\lambda}{2}\sum_{i\neq j}^{M}\{\mathrm{sgn}(x_i-x_j)+1\}K_{ij},\ \lambda=2\mathrm{i}l$$

(5.3.34)

相应的哈密顿量为

$$H=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M}p_i^2+\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^{M}l(l-P_{ij})\delta(x_i-x_j)$$

b) $$\hat{D}_i=p_i+\sum_{i\neq j}^{M}l\{\mathrm{i}\cot[a(x_i-x_j)]+1\}K_{ij},\ \lambda=2l$$

(5.3.35)

$$H=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M}p_i^2+\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^{M}\frac{l(l-aP_{ij})}{\sin^2[a(x_i-x_j)]}$$

c) $$\hat{D}_i=p_i+\mathrm{i}l\sum_{i\neq j}^{M}\{\mathrm{cth}[a(x_i-x_j)]P_{ij}^{+}$$

$$+\tanh[a(x_i - x_j)]P_{ij}^- + 1]K_{ij},\ \lambda = 2il \tag{5.3.36}$$

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M} p_i^2$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^{M} l(l - aP_{ij})\left\{\frac{P_{ij}^+}{\mathrm{sh}^2[a(x_i - x_j)]} - \frac{P_{ij}^-}{\mathrm{ch}^2[a(x_i - x_j)]}\right\}$$

仿照§5.1定义

$$\overline{D}_i = \hat{D}_i - \lambda\sum_{i<j}^{M} K_{ij} \tag{5.3.37}$$

则得到

$$\begin{cases}[\overline{D}_i,\ \overline{D}_j] = 0 \\ [K_{ij},\ \overline{D}_k] = 0 \qquad (k \neq i,\ j) \\ K_{ij}\overline{D}_i - \overline{D}_j K_{ij} = \lambda\end{cases} \tag{5.3.38}$$

此时 T 矩阵可表为诸格点处 T 矩阵的连乘积:

$$\overline{T}_i(u) = 1 + \lambda\frac{P_0 i}{u - \overline{D}_i} \tag{5.3.39}$$

$$\overline{T}(u) = \prod_{i=1}^{\curvearrowleft M}\overline{T}_i(u) \tag{5.3.40}$$

可证明它满足RTT关系。

此外,当 $\overline{D}_i$ 与§5.1中的 $\overline{\pi}_i$ 以下式来联系:

$$\overline{D}_i = \overline{\pi}_i' - \beta\sum_{j<i}^{M} P_{ij}^+ K_{ij} \tag{5.3.41}$$

与(5.2.29)相比较,可知闫模型可以从RTT关系得到。

结束本节之前,强调以下观点:现在已知的一维长程相互作用模型(除椭圆形式外),可能都可以用RTT关系加以讨论并与Yangian有关。本章仅对 $SL(n)$ 进行了讨论,但讨论却具有一般性。所使用的 K_{ij} 表示一维格点上交换第 i 个与第 j 个格点处的坐

标操作,它同构于 A_n 群的 Weyl 群,也即 $SU(n+1)$ 根图上基本反射群。如果设想像基本粒子那样按一定对称性排列粒子,比如在根图正交直角坐标作排列,那么 K_{ij}即同构这种排列的全同置换。此时可将这种 Weyl 反射的概念推广到更广泛的模型,最直接的推广是 $B_n(SO(2n+1))$,它将引起带反射的 YBE[11]以及推广的长程相互作用可积模型。

§5.4 推广的长程模型

正如所指出的,一维格点交换 i, j 坐标同构于 A_n 群的 Weyl 群。而对 B_n 群,其 Weyl 群只是包含了在根图直角坐标系中坐标反符号[12],因此除了 K_{ij}之外,还有一个独立运算 K_i,它作用在根图某矢量

$$\boldsymbol{A} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$$

上使 x_i 反符号[12],上式中 $\boldsymbol{e}_i$ 为根图欧氏空间中的基矢,而诸 x_i 为算符。于是(对 B_n 群)有三种类型交换算符[13]:

$$K_{ij},\ K_i,\ \overline{K}_{ij} = K_iK_jK_{ij} \tag{5.4.1}$$

相应地,Dunkl 算符可推广为[1]

$$\pi_i = p_i + \mathrm{i}V_i^{(1)}K_i + \mathrm{i}\sum_{i\neq j}^{M}\left(V_{ij}^{(2)}K_{ij} + V_{ij}^{(3)}\overline{K}_{ij}\right) \tag{5.4.2}$$

其中 $V_i^{(1)}$, $V_{ij}^{(2)}$与 $V_{ij}^{(3)}$有待用物理来考虑限制(上式相重指标不代表求和)。像§5.1 中所作的那样,采用哈密顿量

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M}\pi_i^2 \tag{5.4.3}$$

将(5.4.2)式代入(5.4.3)式,经过计算得

$$
\begin{aligned}
\mathscr{H} = & \frac{1}{2}\sum_{i}(p_i^2 + V_i^{(1)'}K_i - V_i^{(1)}V_{-i}^{(1)}) \\
& + \frac{1}{2}\sum_{j\neq i}(V_{ij}^{(2)'}K_{ij} + V_{ij}^{(3)'}\overline{K}_{ij} - V_{ij}^{(2)}V_{ji}^{(2)} - V_{ij}^{(3)}V_{-j-i}^{(3)}) \\
& + \frac{i}{2}\sum_{j\neq i}\{(V_{ij}^{(2)} + V_{ji}^{(2)})K_{ij}p_i + (V_{ij}^{(3)} - V_{ji}^{(3)})\overline{K}_{ij}p_i\} \\
& - \frac{1}{2}\sum_{j\neq i}\{V_i^{(1)}V_{-ij}^{(2)} + V_i^{(1)}V_{ji}^{(2)} + V_j^{(1)}V_{-ji}^{(3)} + V_{-j}^{(1)}V_{ij}^{(3)}\}K_iK_{ij} \\
& - \frac{1}{6}\sum_{i\neq j\neq k\neq i} V_{ijk}K_{ijk} \\
& - \frac{1}{2}\sum_{i\neq j\neq k\neq i}\{V_{-jk}^{(2)}V_{ij}^{(3)} + V_{ki}^{(2)}V_{ij}^{(3)} + V_{jk}^{(3)}V_{-ki}^{(3)}\}\overline{K}_{ij}K_{ik}
\end{aligned}
\tag{5.4.4}
$$

其中

$$
\begin{cases}
V_i' = \partial_i V_i \\
V_{ijk} = V_{ij}^{(2)}V_{jk}^{(2)} + V_{jk}^{(2)}V_{ki}^{(2)} + V_{ki}^{(2)}V_{ij}^{(2)} \\
K_{ijk} = K_{jki} = K_{kij} = K_{ij}K_{jk}
\end{cases}
\tag{5.4.5}
$$

首先要求 $\mathscr{H}$ 中没有 p_i 的线性项，这导致

$$
V_{ij}^{(2)} = -V_{ji}^{(2)},\ V_{ij}^{(3)} = V_{ji}^{(3)} \tag{5.4.6}
$$

它表示可以取

$$
\begin{cases}
V_i^{(1)} = V^{(1)}(x_i) \\
V_{ij}^{(2)} = V^{(2)}(x_i - x_j),\ -V^{(2)}(-x) = V^{(2)}(x) \\
V_{ij}^{(3)} = V^{(3)}(x_i + x_j)
\end{cases}
\tag{5.4.7}
$$

此时得到

$$
\begin{aligned}
\mathscr{H} = & \frac{1}{2}\sum_{i}(p_i^2 + V_i^{(1)'}K_i - V_i^{(1)}V_{-i}^{(1)}) \\
& + \frac{1}{2}\sum_{j\neq i}(V_{ij}^{(2)'}K_{ij} + V_{ij}^{(3)'}\overline{K}_{ij} + (V_{ij}^{(2)})^2 - V_{ij}^{(3)}V_{-i-j}^{(3)})
\end{aligned}
$$

$$
-\frac{1}{2}\sum_{j\neq i}W_{ij}K_iK_{ij}-\frac{1}{6}\sum_{i\neq j\neq k\neq i}(V_{ijk}K_{ijk}-3\overline{V}_{ijk}\overline{K}_{ijk})
\tag{5.4.8}
$$

经过计算有：

$$
\begin{aligned}
[\pi_i, \pi_j] = & (W_{ij}K_i - W_{ji}K_j)K_{ij} + \sum_{k\neq i,\, j}V_{ijk}(K_{ijk}-K_{jik}) \\
& + \sum_{k\neq i,\, j}\{-\overline{V}_{ijk}\overline{K}_{ijk}+\overline{V}_{ikj}\overline{K}_{ikj}-\overline{V}_{jki}\overline{K}_{jki}+\overline{V}_{jik}\overline{K}_{jik} \\
& -\overline{V}_{kji}\overline{K}_{kji}+\overline{V}_{kij}\overline{K}_{kij}\}
\end{aligned}
\tag{5.4.9}
$$

其中

$$
\begin{cases}
W_{ij} = V_i^{(1)}V_{-ij}^{(2)} + V_i^{(1)}V_{ji}^{(2)} + V_j^{(1)}V_{i-j}^{(3)} + V_{-j}^{(1)}V_{ij}^{(3)} \\
\overline{V}_{ijk} = V_{ij}^{(3)}V_{kj}^{(2)} + V_{jk}^{(3)}V_{ki}^{(3)} + V_{-ik}^{(2)}V_{ij}^{(3)} \\
\overline{K}_{ijk} = \overline{K}_{ij}K_{jk} = \overline{K}_{ik}\overline{K}_{ij} = K_{jk}\overline{K}_{ik} \\
V_{ijk} = V_{ij}^{(2)}V_{jk}^{(2)} + V_{ki}^{(2)}V_{ij}^{(2)} + V_{jk}^{(2)}V_{ki}^{(2)} \\
K_{ijk} = K_{ij}K_{jk} = K_{jki} = K_{kij}
\end{cases}
\tag{5.4.10}
$$

对某些模型，可以取简化关系

$$
V_{ij}^{(3)} = V_{i-j}^{(2)},\quad V^{(1)}(-x) = -V^{(1)}(x)
\tag{5.4.11}
$$

则有

$$
\overline{V}_{ijk} = V_{-ijk}
\tag{5.4.12}
$$

$$
W_{ij} = V_j^{(1)}(V_{ij}^{(2)} - V_{ij}^{(3)}) - V_i^{(1)}(V_{ij}^{(2)} + V_{ij}^{(3)}) = W_{ji}
\tag{5.4.13}
$$

现在可以沿用§5.1的作法建立模型：

1)
$$
V_{ijk} = 0,\quad W_{ij} = \text{const.}
\tag{5.4.14}
$$

这时

$$
V(x) = \frac{\lambda}{x}
\tag{5.4.15}
$$

$$
W_{ij} = -2\lambda\left(V_i^{(1)}\frac{x_i}{x_i^2 - x_j^2} - V_j^{(1)}\frac{x_j}{x_i^2 - x_j^2}\right)
\tag{5.4.16}
$$

记　$W_{ij}/2\lambda = -\lambda_2$，遂有

$$\begin{cases} V_i^{(1)}x_i - V_j^{(1)}x_j - \lambda_2(x_i^2 - x_j^2) = 0 \\ V_i^{(1)}x_i - \lambda_2 x_i^2 = V_j^{(1)}x_j - \lambda_2 x_j^2 = \lambda_1 \end{cases} \tag{5.4.17}$$

得到

$$\begin{cases} V^{(1)}(x) = \lambda_2 x + \lambda_1 x^{-1} \\ [\pi_i, \pi_j] = 2\lambda_1\lambda_2(K_i - K_j)K_{ij} \end{cases} \tag{5.4.18}$$

若 $\lambda_2 = 0$，显然可积。

2)　$V_{ijk} = l^2$，$V(x) = l\cot x$（或 $V(x) = l\operatorname{cth} x$）

a)　$V(x) = l\cot x$，$W_{ij} = 0$

得到

$$V^{(1)}(x) = \frac{\lambda}{\sin 2x}$$

$$W_{ij} \neq 0 \text{ 时}, V^{(1)}(x) = \lambda \tan x \tag{5.4.19}$$

b)　$V(x) = l\operatorname{cth} x$，$V^{(1)}(x) = \dfrac{\lambda}{\operatorname{sh} 2x}$

$$W_{ij} \neq 0 \text{ 时}, V^{(1)}(x) = \lambda \tanh x \tag{5.4.20}$$

c)　$V(x) = l\operatorname{sgn} x$，$W_{ij} = -2l^2$　(5.4.21)

这时相应于各种情况，哈密顿量分别为

$$\mathscr{H}_1 = \frac{1}{2}\sum_i p_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{j\neq i}\left\{\frac{\lambda(\lambda - K_{ij})}{(x_i - x_j)^2} - \frac{\lambda(\lambda - \overline{K}_{ij})}{(x_i + x_j)^2}\right\} + \sum_i \frac{\lambda_1(\lambda_1 - K_i)}{x_i^2} \tag{5.4.22}$$

$$\mathscr{H}_2 = \frac{1}{2}\sum_i p_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{j\neq i}\left\{\frac{\lambda(\lambda - K_{ij})}{\sin^2(x_i - x_j)} + \frac{\lambda(\lambda - \overline{K}_{ij})}{\sin^2(x_i + x_j)}\right\} + \frac{1}{2}\sum_i \{\lambda_1(\lambda_1 - K_i)/\sin^2 x_i + \lambda_1'(\lambda_1' - K_i)/\cos^2 x_i\} \tag{5.4.23}$$

$$\mathscr{H}_3 = \frac{1}{2}\sum_i p_i^2 + c_1 \sum_{j\neq i} (\delta(x_i - x_j)K_{ij} + \delta(x_i + x_j)\overline{K}_{ij}) + c_1 \sum_i \delta(x_i) K_i \tag{5.4.24}$$

有关类似模型的详细计算可参阅文献[13，14]。

限于本书目的，不拟对长程相互作用模型新的相变行为作讨论。值得提到的是另一方面问题。由蒲富恪、赵保恒教授等的对角化两维空间中量子 Davey-Stewartson I (DS-I)型系统，可以分解为两组(一维空间的)Calogero-Sutherland 模型[15]。而已经知道 C-S 模型可与 YBE 联系起来，那么 DS-I 模型能否从推广的 YBE 系统去理解呢？这是个有意义的课题。不过现在可以肯定的是，由于 C-S 模型具有 Yangian 对称性(见(5.3.33)式)，而 DS-I 模型可以分解为两个独立的一维的 C-S 模型，因而 DS-I 必定具有 $Y(SL(2))\otimes Y(SL(2))$对称性。

§5.5 RTT 有限幂次解:Goryachev-Chaplygin 回转陀螺

第四章介绍了 $Y(SL(2))$，特别强调了一些直接计算的结论：$\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{J}$ 形式与 T 矩阵元的等价性、$\boldsymbol{I}$ 与 $\boldsymbol{J}$ 物理实现的多样性、对 Drinfeld 定理的理解等等。一般说，$T(u)$对 u^{-1}的展开式包含无穷项，仅仅 $T^{(0)} + u^{-1}T^{(1)}$ 对 $R = u + P$ 而言是RTT 关系的严格解，即构成 Yangian 的子代数——李代数 $SL(2)$，如再取高阶，将不构成封闭的代数。相应地，$\mathrm{tr}T(u)$展开式变为无穷项，从而有无穷多个守恒量。另一方面由 Drinfeld 定理知，RTT 的解与 Yangian 是同构的。现在提出一个问题：可否得到 RTT 关系的严格解。但 $T(u)$的展开式只有有限项，从而只存在有限个守恒量(与系统自由度相应)又不失去可积系统的基本特性。答案是肯定的。可以将 $T(u)$展开成：

$$T_{ab}(u) = T_{ab}^{(0)} + u^{-1}T_{ab}^{(1)} + u^{-2}T_{ab}^{(2)} + u^{-3}T_{ab}^{(3)} \quad (a, b = 1, 2) \tag{5.5.1}$$

将它代入(4.2.3)式，$\check{R}(u) = uP + 1$，求得充分解，$\mathrm{tr}T(u)$给出守恒量，其哈密顿量正是以前熟知的 G-C 陀螺的推广[16]，称为G-C回转陀螺(gyrostat)[17]。

首先，此时 $T(u)$矩阵应满足

$$T^{(0)} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad (\mu\text{ 在以下为零}) \tag{5.5.2}$$

$$\begin{cases} [T_{11}^{(n)}, T_{12}^{(1)}] = -\lambda T_{12}^{(n)},\ [T_{11}^{(n)}, T_{21}^{(1)}] = \lambda T_{21}^{(n)} \\ [T_{22}^{(n)}, T_{12}^{(1)}] = \mu T_{12}^{(n)},\ [T_{22}^{(n)}, T_{21}^{(1)}] = -\mu T_{21}^{(n)} \\ [T_{11}^{(n)}, T_{22}^{(1)}] = 0,\ [T_{21}^{(n)}, T_{12}^{(1)}] = \mu T_{11}^{(n)} - \lambda T_{22}^{(n)} \\ \qquad (n = 1, 2, 3) \end{cases} \tag{5.5.3}$$

$$\begin{cases} \lambda T_{12}^{(3)} = [T_{12}^{(2)}, T_{11}^{(2)}] + T_{11}^{(2)}T_{12}^{(1)} - T_{11}^{(2)}T_{12}^{(2)} \\ \lambda T_{21}^{(3)} = [T_{11}^{(2)}, T_{21}^{(2)}] + T_{21}^{(1)}T_{11}^{(2)} - T_{21}^{(2)}T_{11}^{(1)} \\ \mu T_{12}^{(3)} = [T_{22}^{(2)}, T_{12}^{(2)}] + T_{12}^{(1)}T_{22}^{(2)} - T_{12}^{(2)}T_{22}^{(1)} \\ \mu T_{21}^{(3)} = [T_{21}^{(2)}, T_{22}^{(2)}] + T_{22}^{(2)}T_{21}^{(1)} - T_{22}^{(1)}T_{21}^{(2)} \\ \mu T_{11}^{(3)} - \lambda T_{22}^{(3)} = [T_{21}^{(2)}, T_{12}^{(2)}] + T_{11}^{(1)}T_{22}^{(2)} - T_{11}^{(2)}T_{22}^{(1)} \end{cases} \tag{5.5.4}$$

$$[T_{11}^{(2)}, T_{22}^{(2)}] = T_{21}^{(2)}T_{12}^{(1)} - T_{21}^{(1)}T_{12}^{(2)}$$

与

$$\begin{cases} [T_{11}^{(3)}, T_{12}^{(3)}] = T_{11}^{(3)}T_{12}^{(2)} - T_{11}^{(2)}T_{12}^{(3)} \\ [T_{21}^{(2)}, T_{12}^{(3)}] = T_{11}^{(3)}T_{22}^{(2)} - T_{11}^{(2)}T_{22}^{(3)} \\ [T_{11}^{(3)}, T_{21}^{(3)}] = T_{21}^{(3)}T_{11}^{(2)} - T_{21}^{(2)}T_{11}^{(3)} \\ [T_{11}^{(3)}, T_{22}^{(3)}] = T_{21}^{(3)}T_{12}^{(2)} - T_{21}^{(2)}T_{12}^{(3)} \\ [T_{22}^{(3)}, T_{12}^{(3)}] = T_{12}^{(3)}T_{22}^{(2)} - T_{12}^{(2)}T_{22}^{(3)} \\ [T_{22}^{(3)}, T_{21}^{(3)}] = T_{22}^{(3)}T_{21}^{(2)} - T_{22}^{(2)}T_{21}^{(3)} \end{cases} \tag{5.5.5}$$

和

$$[T_{ab}^{(n)}, T_{bc}^{(m)}] = [T_{ab}^{(m)}, T_{bc}^{(n)}] \quad (m, n \leqslant 3, a, b = 1, 2) \tag{5.5.6}$$

$$T_{ab}^{(m)} = 0 \quad (m \geqslant 4) \tag{5.5.7}$$

现在要找 RTT 的解,其中 $T_{ab}^{(m)}(m \leqslant 3)$ 满足(5.5.3)式~(5.5.5)式。由于方程比较复杂,先对解作一个形式上的假定,然后代入以上诸式求出待定的系数和其他未知项。采用的基本算符仍是角动量与坐标[17]满足:

$$\begin{cases} [L_\pm, L_3] = \pm L_3, & [L_+, L_-] = -2L_3 \\ [X_\pm, L_3] = \pm X_\pm, & [L_\pm, X_3] = \pm X_\pm \\ [L_+, X_-] = -2X_3, & [L_-, X_+] = 2X_3 \end{cases} \tag{5.5.8}$$

以及质心的动量 P 与坐标 Q 的关系为

$$[P, Q] = -\mathrm{i}$$

且 P, Q 与 $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{x}$ 对易。先设[18]

$$T_{11}^{(1)} = \alpha P, T_{22}^{(1)} = 0, T_{12}^{(1)} = \beta \mathrm{e}^{\tau Q} X_+, T_{21}^{(1)} = \gamma \mathrm{e}^{-\tau Q} \tag{5.5.9}$$

$$\begin{cases} T_{11}^{(2)} = f_1 L^2 + f_2 L_3^2 + f_3 P L_3 + f_4 x_- + f_5 \\ T_{11}^{(3)} = (P + g_3 L_3)(g_1 L^2 + g_2 L_3^2 + g_5) + g_4 [L_-, X_3]_+ \end{cases} \tag{5.5.10}$$

其中$[A, B]_+ = AB + BA$, $L^2 = (\boldsymbol{L})^2$,诸参数 α, β, τ, f_1, …待定。将(5.5.9)式代入(5.5.3)式得到 $(n = 1)$

$$\lambda = \mathrm{i}\alpha\tau, \ \mu = 0 \tag{5.5.11}$$

对 $n = 2$ 得到

$$\begin{aligned} T_{12}^{(2)} &= -\lambda^{-1} \beta \mathrm{e}^{\tau Q} \{[f_1 L^2 + f_2 L_3^2, X_+] - f_3 (P X_+ + \mathrm{i}\tau L_3 X_3)\} \\ &= -\lambda^{-1} \beta \mathrm{e}^{\tau Q} \{f_1 [L_+, X_3]_+ - (f_1 + f_2)[L_3, X_+]_+ \end{aligned}$$

$$- f_3(P + i\tau L_3)X_+\}$$

$$T_{21}^{(2)} = i\lambda^{-1}\gamma f_3\tau L_3 e^{-\tau Q}$$

$$T_{22}^{(2)} = i\lambda^{-2}\gamma f_3\tau\beta X_+,\ \lambda = if_3\tau,\ f_1 + f_2 + \lambda = 0$$

进而有

$$T_{11}^{(2)} = f_1 L^2 + f_2 L_3^2 + \alpha P L_3 + f_4 X_- + f_5$$

$$T_{22}^{(2)} = \lambda^{-1}\gamma\beta X_+,\ T_{21}^{(2)} = \gamma e^{-\tau Q} L_3$$

$$T_{12}^{(2)} = -\lambda^{-1}\beta e^{\tau Q}\{f_1[L_+,\ x_3]_+ + x_+(\lambda L_3 - \alpha P)\}$$

再进一步代入决定$T_{ab}^{(3)}$的式子中，由于计算很烦，只举出一些项的例子：

$$[T_{12}^{(2)},\ T_{21}^{(2)}] - T_{11}^{(1)}T_{22}^{(2)} = -\lambda^{-1}\beta\gamma f_1[L_+,\ X_3]_+ \Rightarrow$$

$$T_{22}^{(3)} = -\lambda^{-2}\beta\gamma f_1[L_+,\ X_3]_+$$

$$[T_{11}^{(2)},\ T_{21}^{(2)}] + T_{21}^{(1)}T_{11}^{(2)} - T_{21}^{(2)}T_{11}^{(1)}$$

$$= \gamma e^{-\tau Q}(\lambda L_3^2 - f_4 X_- + f_1 L^2 + f_2 L_3^2 + f_4 X_- + f_5) \Rightarrow$$

$$T_{21}^{(3)} = \lambda^{-1}\gamma e^{-\tau Q}\{f_1(L^2 - L_3^2) + f_5\}$$

$$[T_{11}^{(3)},\ T_{21}^{(1)}] = \lambda T_{21}^{(3)} \Rightarrow$$

$$T_{21}^{(3)} = \alpha^{-1}\gamma e^{-\tau Q}(g_1 L^2 + g_2 L_-^2 + g_5)$$

$$g_1 = -g_2 = \lambda^{-1}\alpha f_1,\ g_5 = \lambda^{-1}\alpha f_5$$

类似地得到

$$T_{11}^{(3)} = \lambda^{-1}\alpha(P + g_3 L_3)\{f_1(L^2 - L_3^2) + f_5) + g_4[L_-,\ X_3]_+\}$$

$$g_3 = -\alpha^{-1}$$

$$T_{12}^{(3)} = -\lambda^{-1}\beta e^{\tau Q}\{\lambda^{-1}\alpha f_1[L_+,\ X_3]_+ (P - \lambda\alpha^{-1}L_3) + 4g_4 X_3^2\}$$

在以上解的过程中用到了

$$\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{L}=0 \tag{5.5.12}$$

亦即没有磁单极($g=0$)。再经过计算,可得最后结果,由于中间过程比较复杂,不再列出。最后结果为:

$$\begin{cases}\gamma=-\mathrm{i}\alpha^{-1}\lambda,\ f_1=-\dfrac{1}{4}\lambda,\ f_2=-\dfrac{3}{4}\lambda,\ f_3=\alpha,\ f_5=-\dfrac{1}{16}\lambda\\ g_1=-g_2=-\dfrac{1}{4}\alpha,\ g_3=-\lambda\alpha^{-1},\ g_4=\dfrac{1}{4}f_4,\ g_5=-\dfrac{1}{16}\alpha\end{cases} \tag{5.5.13}$$

令 $f_4\equiv f$,则 T 矩阵解为[18]

$$\begin{cases}T_{11}^{(2)}=-\dfrac{1}{4}\lambda\left(L^2+3L_3^2+\dfrac{1}{4}\right)+\alpha PL_3+fx_-\\ T_{22}^{(2)}=\lambda^{-1}\gamma\beta x_+\\ T_{12}^{(2)}=-\lambda^{-1}\beta\mathrm{e}^{\gamma Q}\left\{-\dfrac{\lambda}{4}[L_+,x_3]_++x_-(\lambda L_3-\alpha P)\right\}\\ T_{21}^{(2)}=\gamma\mathrm{e}^{-\gamma Q}L_3\\ T_{11}^{(3)}=-\dfrac{1}{4}\alpha(P-\lambda\alpha^{-1}L_3)\left(L^2-L_3^2+\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{1}{4}f[L_-,x_3]_+\\ T_{22}^{(3)}=\dfrac{1}{4}\lambda^{-1}\beta\gamma[L_+,x_3]_+\\ T_{12}^{(3)}=-\lambda^2\beta\mathrm{e}^{\gamma Q}\left\{fx_3^2-\dfrac{1}{4}\alpha[L_+,x_3]_+(P-\lambda\alpha^{-1}L_3)\right\}\\ T_{21}^{(3)}=-\dfrac{1}{4}\gamma\mathrm{e}^{-\gamma Q}\left(L^2-L_3^2+\dfrac{1}{4}\right)\end{cases} \tag{5.5.14}$$

将(5.5.14)式代入(4.1.16)式,经过相当的计算,得到

$$\widetilde{\det}T(u)=u^{-3}(u-1)^{-3}\lambda^{-1}f\left(u^2-u+\frac{3}{16}\right)\left(\sum_{\alpha=1}^{3}x_\alpha^2\right) \tag{5.5.15}$$

这与$\sum_{\alpha=1}^{3} x_\alpha^2$是Casimir的事实相符，因为$\widetilde{\det} T(u)$的展开式就是Casimir算符，另一个已经选为(5.5.12)式。为了求守恒量，对T_{ab}取迹：

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}T(u) = &\lambda + u^{-1}\alpha P + u^{-2}\left\{-\frac{1}{4}\lambda\left(L^2 + 3L_3^2 + \frac{1}{4}\right)\right.\\ &\left. + \alpha P L_3 + f x_- + \lambda^{-1}\beta\gamma x_+\right\}\\ &+ \frac{1}{4}u^{-3}\left\{-(\alpha P - \lambda L_3)\left(L^2 - L_3^2 + \frac{1}{4}\right)\right.\\ &\left. + f[L_-, X_3]_+ + \lambda^{-1}\beta\gamma[L_\pm, x_3]_+\right\}\end{aligned} \tag{5.5.16}$$

其中λ可取为1，f，α，β与γ为独立参数。

由于$\gamma\beta$以组合形式出现，故只有α，$\beta\gamma$，f为独立参数。将上式中的$\boldsymbol{L}$与$\boldsymbol{x}$作转动变换，令$4\lambda^{-1}\beta\gamma f = b^2$，最后将(5.5.16)式给出的守恒量

$$H_P = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{4}(L^2 + 3L_3^2) - f x_- - \beta\gamma x_+ - \alpha P L_3\right\} + \frac{1}{16} \tag{5.5.17}$$

$$\begin{aligned}G_P = &\frac{1}{4}\left\{(\alpha P - \lambda L_3)\left(L^2 - L_3^2 + \frac{1}{4}\right)\right.\\ &\left. + f[L_-, x_3]_+ + \beta\gamma[L_+, x_3]_+\right\}\end{aligned} \tag{5.5.18}$$

变换为

$$H_P' = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{4}(L'^2 + 3L'^2_3) - b x_1' - \alpha P \varepsilon L_3'\right\} + \frac{1}{16} \tag{5.5.19}$$

$$G_P' = -\frac{1}{4}\left\{(\alpha P - \varepsilon\lambda)L'_3\left(L'^2 - L'^2_3 + \frac{1}{4}\right) + b[x_3, L_1']_+\right. \tag{5.5.20}$$

其中 $\varepsilon = \pm 1$，为 $L'_a = \sum_b A_{ab} L_b$，$x'_a = \sum_b A_{ab} x_b$ 转动变换时矩阵 A 的行列式：

$$\varepsilon = \pm 1 = \det A$$

(5.5.19)式与(5.5.20)式正是文献[16，17]给出的G-C回旋陀螺的守恒量。它表示一个椭球陀螺置于外场并有质心运动时的哈密顿量 H_P 与另一个守恒量 G_P。当然，这里角动量与坐标仅仅是记号，它可以代表更广泛的含义，只要满足(5.5.8)式即可。例如取

$$x_\alpha = n^\alpha(t)$$

$$J_\alpha = -\mathrm{i}\epsilon_{\alpha\beta\gamma} n_\beta(t) \dot{n}_\gamma(t)$$

$$[n_\alpha(t), \dot{n}_\beta(t)] = \delta_{\alpha\beta}$$

即约化的手征变量模型，代入(5.5.17)式后可以用变量 $\boldsymbol{n}(t)$ 表示出来。

从这个例子，可以看到由 RTT 关系解出的完全可积量子模型不一定非得有无穷个守恒量不可，事实上有限个守恒量更接近通常的量子力学，同时，这个模型不是一维的，而是真实三维的模型。这种思想可以扩展到其他模型。作为第一步，在这个计算中强烈地依赖于 $T_{ab}^{(n)}$ 的具体解形式，应当引入整个代数的关系，它满足 RTT 关系，从而将哈密顿量表示为这些代数算符的组合，剩下的事就是求解这个代数关系方程组的解。这方面讨论的初步结果参见文献[18，19]。另外，有关 H_P 的能谱的讨论可参阅文献[16，17]。最后，强调指出，解 RTT 的充分解的办法很多，其开始所设形式亦不同，从而可获得系统的各种解。

最后，要指出本节只讨论了有理解形式。还存在三角形式的 G-C 陀螺解，由于计算过于复杂，将另节叙述，详细计算参见文献[20]。

§ 5.6　q 变形的 G-C 回转陀螺

在 § 5.5 中从有限转移矩阵(5.5.1)式满足 RTT 关系，解出了 G-C 形式的守恒量(5.5.17)式与(5.5.18)式，这些守恒量的个数正像任意有限维系统一样是受到系统自由度的限制的。如(5.5.19)式所示的哈密顿量具有很明显的物理意义。H_P^i中包含椭球陀螺，其 z 方向与横方向半轴比为 4∶1，而这个刚性电磁椭球陀螺的质心动量为 P，并处于沿 x'_1 轴的恒电场中。设想 P 为 y' 方向，它是守恒量，质心在上述电场中运动产生了自身的磁场，因而有 $(\boldsymbol{P} \times \boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{L} \sim 2PL_3$ 项。

这种 G-C 陀螺是由最简单的 $\check{R}(u) = uP + I$ 这种 R 矩阵相联系的，其中 $\check{R}(u)$满足 YBE。一个自然的问题是可否推广这个概念，即考虑 $\check{R}(u)$是最简单的 YBE 的三角解时，可否求出相应转移矩阵 $T(u)$的有限整体解？答案是肯定的，但需要进行相当复杂的计算。首先将 YBE 与 RTT 关系用新的运动变量写出，即将(3.1.25)式与 RTT 关系不用变量 u 表示，而是用新的谱参数 $x = e^u$ 写出：

$$\check{R}_{12}(x)\check{R}_{23}(xy)\check{R}_{12}(y) = \check{R}_{23}(y)\check{R}_{12}(xy)\check{R}_{23}(x) \tag{5.6.1}$$

或

$$\check{R}_{12}(xy^{-1})\check{R}_{23}(x)\check{R}_{12}(y) = \check{R}_{23}(y)\check{R}_{12}(x)\check{R}_{12}(xy^{-1}) \tag{5.6.2}$$

只要保证两端的 $\check{R}$ 所含谱参数之乘积等于当中的 $\check{R}$ 所含谱参数即可。RTT 关系用谱参数 $x = e^u$ 写出则为：

$$\check{R}(xy^{-1})(T(x) \otimes T(y)) = (T(y) \otimes T(x))\check{R}(xy^{-1}) \tag{5.6.3}$$

可以验证，下面六个元素不为零的矩阵满足YBE(5.6.1)式：

$$\check{R}(x)=\begin{bmatrix} a(x) & & & \\ & w & b(x) & \\ & b(x) & w & \\ & & & a(x) \end{bmatrix} \tag{5.6.4}$$

其中 $a(x)=qx-q^{-1}x^{-1}$, $b(x)=x-x^{-1}$, $w=q-q^{-1}$, $x=\mathrm{e}^{u}$, $q=\mathrm{e}^{\gamma}$。一般说满足RTT关系的转移矩阵 $T(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x^{n}T^{(n)}$。现在要寻求如下有限幂次的解：

$$T(x)=\sum_{n=-3}^{3}x^{n}T^{(n)},\ T^{(n)}=\|T_{ab}^{(n)}\|\ (a,b=1,2) \tag{5.6.5}$$

这种三角形式的整体解称为q-G-C陀螺。将(5.6.5)、(5.6.4)式代入RTT关系(5.6.1)式。在原则上可以求解 $T(x)$。但是一般形式极为复杂，作为有理形式的推广，作以下形式的假定：

$$\begin{aligned} T_{11}^{(\pm 2)} &= T_{11}^{(0)} = T_{22}^{(\pm 3)} = T_{22}^{(\pm 2)} = T_{22}^{(0)} \\ &= T_{12}^{(\pm 3)} = T_{12}^{(\pm 1)} \\ &= T_{21}^{(\pm 3)} = T_{21}^{(\pm 1)} = 0 \end{aligned} \tag{5.6.6}$$

在(5.6.6)式选择下，(5.6.3)式变为：

$$\begin{cases} [T_{ab}^{(k)},T_{ab}^{(j)}]=0,\ q^{\pm 1}T_{11}^{(\pm 3)}T_{12}^{(j)}=T_{12}^{(j)}T_{11}^{(\pm 3)} \\ q^{\mp 1}T_{11}^{(\pm 3)}T_{21}^{(j)}=T_{21}^{(j)}T_{11}^{(\pm 3)} \\ q^{\pm 1}T_{21}^{(\pm 2)}T_{22}^{(j)}=T_{22}^{(j)}T_{21}^{(\pm 2)}(j=\pm 1,\mp 1) \\ q^{\pm 1}T_{22}^{(j)}T_{12}^{(\pm 2)}=T_{12}^{(\pm 2)}T_{22}^{(j)}(j=\pm 1,\mp 1) \\ q^{\pm 1}T_{22}^{(\pm 1)}T_{21}^{(0)}=T_{21}^{(0)}T_{22}^{(\pm 1)}\pm wT_{22}^{(\mp 1)}T_{21}^{\pm 2} \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
q^{\pm 1}T_{12}^{(0)}T_{22}^{(\pm 1)} = T_{22}^{(\pm 1)}T_{12}^{(0)} \pm wT_{12}^{(\pm 2)}T_{22}^{(\mp 1)} \\
q^{\pm 1}T_{11}^{(j\pm 1)}T_{21}^{(\pm 2)} = T_{21}^{(\pm 2)}T_{11}^{(j\pm 1)} \pm wT_{11}^{(\pm 3)}T_{21}^{(j)}(j = 0, \mp 2) \\
q^{\pm 1}T_{12}^{(\pm 2)}T_{11}^{(j\pm 1)} = T_{11}^{(j\pm 1)}T_{12}^{(\pm 2)} \pm wT_{12}^{(j)}T_{11}^{(\pm 3)}(j = 0, \mp 2) \\
q^{\pm 1}T_{21}^{(0)}T_{11}^{(j=1)} \pm wT_{21}^{(\mp 2)}T_{11}^{(\pm 3)} = T_{11}^{(\pm 1)}T_{21}^{(0)} \pm wT_{21}^{(\pm 2)}T_{11}^{(\pm 1)} \\
q^{\pm 1}T_{11}^{(j\pm 1)}T_{12}^{(0)} \pm wT_{11}^{(\pm 3)}T_{12}^{(\mp 2)} = T_{12}^{(0)}T_{11}^{(\pm 1)} \pm wT_{11}^{(\mp 1)}T_{12}^{(\pm 2)} \\
[T_{21}^{(\pm 2)}, T_{12}^{(\mp 2)}] = 0, [T_{21}^{(\pm 2)}, T_{12}^{(\pm 2)}] = \mp wT_{11}^{(\pm 3)}T_{22}^{(\pm 1)} \\
[T_{21}^{(0)}, T_{12}^{(0)}] = \pm w(T_{11}^{(\mp 1)}T_{22}^{(\pm 1)} - T_{11}^{(\pm 1)}T_{22}^{(\mp 1)}) \\
[T_{11}^{(\pm 3)}, T_{22}^{(j)}] = 0\ (j = \pm 1, \mp 1) \\
[T_{22}^{(\pm 1)}, T_{11}^{(\pm 1)}] = \pm w(T_{12}^{(0)}T_{21}^{(\pm 2)} - T_{12}^{(\pm 2)}T_{21}^{(0)}) \\
[T_{22}^{(\pm 1)}, T_{11}^{(\pm 1)}] = \pm w(T_{12}^{(\mp 2)}T_{21}^{(\pm 2)} - T_{12}^{(\pm 2)}T_{21}^{(\mp 2)}) \\
[T_{12}^{(\pm 2)}, T_{21}^{(0)}] = [T_{12}^{(0)}, T_{21}^{(\pm 2)}] = \pm wT_{11}^{(\pm 3)}T_{22}^{(\mp 1)}
\end{cases}
\tag{5.6.7}
$$

其中 λ_3，η 与 ξ 为任意常数。

为了将满足(5.6.7)式的诸未知矩阵元 $T_{11}^{(\pm 1)}$，$T_{11}^{(\pm 3)}$，$T_{22}^{(\pm 1)}$，$T_{12}^{(\pm 2)}$，$T_{12}^{(0)}$，$T_{21}^{(\pm 2)}$ 与 $T_{21}^{(0)}$ 用更基本的代数关系表示出来，引入以下未知算符：$S_{\pm}^{(1)}$，$S_{\pm}^{(2)}$，$E^{(\pm)}$，$E_{\pm 2}$，$A_{\pm}^{(0)}$，$A^{(\pm)}$ 与 P，Q，其中

$$
[P, Q] = -\mathrm{i},\ q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\eta},\ K = \mathrm{e}^{\hat{J}_3}
\tag{5.6.8}
$$

并设将上述矩阵元用这些算符表示出来，而这些"基本"算符的对易关系则由(5.6.7)式决定：

$$
\begin{cases}
T_{11}^{(\pm 1)} = \mathrm{e}^{\mp \mathrm{i}\eta P}S_{\pm}^{(1)} + \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\eta P}S_{\mp}^{(2)} \\
T_{11}^{(\pm 3)} = \pm \lambda_3 \mathrm{e}^{\mp \mathrm{i}\eta P},\ T_{22}^{(\pm 1)} = \pm K^{\mp 1}\mathrm{e}^{\mp \mathrm{i}\eta P}E_0 \\
T_{12}^{(\pm 2)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi Q}\mathrm{e}^{\mp \mathrm{i}\eta P}E_{\pm 2},\ T_{12}^{(0)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi Q}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\eta P}E^{(-)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta P}E^{(+)}) \\
T_{21}^{(\pm 2)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi Q}\mathrm{e}^{\mp \mathrm{i}\eta P}A_{\pm}^{(0)},\ T_{21}^{(0)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi Q}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\eta P}A^{(-)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta P}A^{(+)})
\end{cases}
\tag{5.6.9}
$$

进一步，为了以后方便，也为了满足(5.6.9)式，引入

$$
\begin{cases}
A^{(\pm)} = - A_{\pm}^{(0)} K^{\pm 2}, \quad E^{(\pm)} = - E_{\pm 2} K^{\pm 2} \\
S_{\pm}^{(1)} = \pm \lambda_3 \alpha_2^{-1} K^{\mp 1} S, \quad S_{\pm}^{(2)} = \mp \lambda_3 K^{\pm 2}
\end{cases}
\tag{5.6.10}
$$

其中 α_2 为任意常数。

将(5.6.6)、(5.6.8)~(5.6.10)式代入(5.6.7)式，发现 $K^{\pm}$，$A_{\pm}^{(0)}$，$E_{\pm 2}$，S 与 E_0 必须满足以下代数关系：

$$
\begin{cases}
q^{\pm} A_{\pm}^{(0)} E_0 = E_0 A_{\pm}^{(0)}, \; q^{\pm} E_0 E_{\pm 2} = E_{\pm 2} E_0, \; [A_{\pm}^{(0)}, E_{\mp 2}] = 0 \\
S A_{\pm}^{(0)} - q^{\mp 1} A_{\pm}^{(0)} S = \mp \alpha_2 w A_{\mp}^{(0)} K^{\mp 1} \\
S E_{\pm 2} - q^{\pm 1} E_{\pm 2} S = \pm \alpha_2 w E_{\mp 2} K^{\mp 1} \\
q^{\mp 1} A_{\pm}^{(0)} E_{\pm 2} - q^{\pm} E_{\pm 2} A_{\pm}^{(0)} = \mp w \lambda_3 K^{\mp 1} E_0 \\
S E_0 - E_0 S = - \alpha_2 \lambda_3^{-1} w (q E_2 A_{-}^{(0)} - q^{-1} E_{-2} A_{+}^{(0)})
\end{cases}
\tag{5.6.11}
$$

其中 $w = q - q^{-1}$，α_2 与 α_3 为任意参数。进一步，可以证明(5.6.11)式可以用以下集合 $A_q(\hat{J}_{\pm}, \hat{K}, \hat{x}_{\pm}, \hat{x}_3)$ 实现：

$$
\begin{cases}
[\hat{J}_3, \hat{J}_{\pm}] = \pm \hat{J}_{\pm}, \quad [\hat{J}_+, \hat{J}_-] = g[\hat{J}_3]_q, \quad [\hat{J}_3]_q = \dfrac{q^{\hat{J}_3} - q^{-\hat{J}_3}}{q - q^{-1}} \\
[\hat{J}_3, \hat{x}_{\pm}] = \pm \hat{x}_{\pm}, \quad [\hat{J}_{\pm}, \hat{x}_{\pm}] = [\hat{J}_3, \hat{x}_3] = 0 \\
[\hat{x}_{\pm}, \hat{x}_{\pm}] = 0, \quad \hat{x}_3 \hat{x}_{\pm} = q^{\delta \pm} \hat{x}_{\pm} \hat{x}_3, \quad \hat{x}_{\pm} \hat{x}_3 = q^{\delta \pm} \hat{x}_3 \hat{x}_{\pm} \\
q^{\delta \pm} \hat{J}_{\pm} \hat{x}_3 = \hat{x}_3 \hat{J}_{\pm} \pm \tau_{\mp} K^{\pm \delta_{\mp}} \hat{x}_{\pm} \\
q^{-1} \hat{J}_{\mp} \hat{x}_{\pm} = \hat{x}_{\pm} \hat{J}_{\mp} \mp \tau_{\mp}^{-1} g K^{\mp \delta_{\pm}} \hat{x}_3
\end{cases}
\tag{5.6.12}
$$

这里

$$\delta_+ + \delta_- = 1, \; g = 2 \text{ 或 } q^{1/2} + q^{-1/2}$$

其中诸“基本”算符 $\hat{J}_{\pm}$，$\hat{J}_3$，$\hat{x}_{\pm}$，$\hat{x}_3$，K 与 $A_{\pm}^{(0)}$，$E_{\pm 2}$，S 间的关系为：

$$\begin{cases} A_{\pm}^{(0)} = \lambda_{\pm}^{(1)} \hat{J}_{-} \hat{x}_{3} + \lambda_{\pm}^{(2)} \hat{x}_{-} \\ E_{\pm 2} = \beta_{\pm}^{(1)} \hat{J}_{+} \hat{x}_{3} + \beta_{\pm}^{(2)} \hat{x}_{+} \\ S = \lambda_1 \hat{J}_{+} \hat{J}_{-} + \lambda_2 \\ K = \exp(\mathrm{i}\xi\eta \hat{J}_3) \end{cases} \tag{5.6.13}$$

而依赖于 K 的量 $\lambda_{\pm}^{(i)}$，$\beta_{\pm}^{(i)}$ 与 $\lambda_i (i=1, 2)$满足以下关系：对 $\delta_{+} + \delta_{-} = 1$ 有

$$\begin{cases} \lambda_{-}^{(1)} = 0,\ \lambda_{+}^{(1)} = \lambda^{(+)} K^{2(1-\delta_{+})-\beta} \\ \lambda_{+}^{(2)} = (1-q^{-1})^{-1} q^{-\delta_{+}} \tau_{-} K^{-1+\delta_{+}} \lambda_{+}^{(1)} \\ \lambda_{-}^{(2)} = (1-q^{-1})^{-1} q^{-1-\delta_{+}} \alpha^{-1} \alpha_2 \tau_{-} K^{-1+\delta_{+}} \lambda_{+}^{(1)},\ \beta_{+}^{(1)} = 0 \\ \beta_{-}^{(2)} = -(1-q^{-1})^{-1} q^{-1+\delta_{+}} \tau_{+} K^{\delta_{+}} \beta_{-}^{(1)},\ \beta_{-}^{(1)} = \beta^{(-)} K^{\beta} \\ \beta_{+}^{(2)} = (1-q^{-1})^{-1} q^{-4+\delta_{+}} \alpha^{-1} \alpha_2 \tau_{+} K^{\delta_{+}-2} \beta_{-}^{(1)} \\ E^{(0)} = -\lambda_3^{-1} w^{-1} (1-q^{-1})^{-1} q^{-3+\delta_{+}} g \alpha^{-1} \alpha_2 K^{-1} \beta_{-}^{(1)} \lambda_{+}^{(1)} (qK) (\hat{x}_3)^2 \end{cases}$$

对 $\delta_{+} + \delta_{-} = -1$ 有

$$\begin{cases} \lambda_{+}^{(1)} = 0,\ \lambda_{(-)}^{(1)} = \lambda^{-} K^{2(1+\delta_{+})-\beta},\ \lambda_{-}^{(2)} = (1-q^{-1})^{-1} q^{-\delta_{+}} \tau_{-} K^{1+\delta_{+}} \lambda_{-}^{(1)} \\ \lambda_{+}^{(2)} = (1-q^{-1})^{-1} q^{-\delta_{+}} \alpha^{-1} \alpha_2 \tau_{-} K^{1+\delta_{+}} \lambda_{-}^{(1)},\ \beta_{-}^{(1)} = 0 \\ \beta_{+}^{(2)} = -(1-q^{-1})^{-1} q^{1+\delta_{+}} \tau_{+} K^{\delta_{+}} \beta_{+}^{(1)},\ \beta_{+}^{(1)} = \beta^{(+)} K^{\beta} \\ \beta_{-}^{(2)} = (1-q^{-1})^{-1} q^{4+\delta_{+}} \alpha \alpha_2^{-1} \tau_{+} K^{\delta_{+}+2} \beta_{+}^{(1)} \\ E^{(0)} = -\lambda_3^{-1} w^{-1} (1-q^{-1})^{-1} q^{3+\delta_{+}} g \alpha \alpha_2^{-1} K \beta_{+}^{(1)} \lambda_{-}^{(1)} (qK) (\hat{x}_3)^2 \end{cases}$$

且均有

$$\alpha_2^2 = g\alpha^2, \quad \lambda_1 = (g-1) w g^{-1} \alpha, \quad \lambda_2 = \alpha(q - K + K^{-1})$$

并且 $\tau_{\pm}$是依赖于 q 的参数，满足：

$$\lim_{q \to 1} \tau_{\pm} = 1$$

与(5.6.12)式同时，也出现了对集合 A_q 的限制条件：

$$g[\hat{J}_3]_q \hat{x}_3 + \tau_{-} K^{-\delta_{-}} \hat{J}_{-} \hat{x}_{+} + \tau_{+} K^{\delta_{+}} \hat{J}_{+} \hat{x}_{-} = 0 \tag{5.6.14}$$

很容易验证，当 $q \to 1$ 时，$A_q \to A(J_\pm, J_3, x_\pm, x_3)$，亦即通常的 E_3 代数（见（5.5.8）式）：

$$\begin{cases} [J_3, J_\pm] = \pm J_\pm, & [J_+, J_-] = 2J_3 \\ [J_3, x_\pm] = \pm x_\pm, & [J_\pm, x_\mp] = \pm 2x_3 \end{cases} \tag{5.6.15}$$

而 $q \to 1$，（5.6.14）式则蜕化为刚性条件：

$$J_+ x_- + J_- x_+ + 2J_3 x_3 = 0 \Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{3} J_j x_j = 0 \tag{5.6.16}$$

由此知道 A_q 正是（5.5.8）、（5.5.12）式的 q 变形推广。直接计算，得到满足（5.6.11）式的诸算符可以通过“更基本”的（由（5.6.12）式给出）算符明显表示出来：

$$\begin{cases} E_0 = cK^{\delta_- - \delta_+}(\hat{x}_3)^2 \\ A_+^{(0)} = a_1\{K^\lambda \hat{J}_+ \hat{x}_3 + K^{\lambda-\delta_-}(q-1)^{-1} q^{\delta_-} \tau_- \hat{x}_+\} \\ A_-^{(0)} = a_1 K^{\lambda+\delta_+ +1}(q-1)^{-1} \tau_- q^{\delta_-} q^{-5/2} \hat{x}_+ \\ E_{+2} = -a_2(q-1)^{-1} \tau_+ q^{\delta_+} K^{-\lambda\ \delta_+ -1} q^{-5/2} \hat{x}_- \\ E_{-2} = a_2\{K^{\delta_- - \delta_+ - \lambda} \hat{J}_- \hat{x}_3 - (q-1)^{-1} \tau_+ q^{\delta_+} K^{\delta_- - \lambda} \hat{x}_-\} \\ S = c_2\{g^{-1} w(q-1) \hat{J}_- \hat{J}_+ + K^{-1} + qK\} \end{cases} \tag{5.6.17}$$

这里

$$a_1 a_2 = c g^{-1} w(q-1) \lambda_3 q^{\delta_- + 1/2 - \lambda}$$

$$a_2 = -q^{1/2} c_1 g (q-1)^{-1}, \quad c_1 = w(q-1) c_2 g^{-1}$$

其中 λ_3，λ，c 与 $\delta_\pm$ 为常数，且 $\delta_+ + \delta_- = 1$。注意以后计算中在 $T_{11}^{(\pm 1)}$ 中只出现 a_2/c_2 这个比值。将（5.6.17）式代入（5.6.9）式，遂得诸不为零的 $T_{ab}^{(n)}(a, b = 1, 2, |n| \leqslant 3)$，用 $\hat{J}_\pm$，$\hat{J}_3$，$\hat{x}_\pm$ 与 $\hat{x}_3$ 的表达式，这些“基本”算符满足（5.6.12）式。

要得到哈密顿量 H，需要计算 $T(x)$ 的迹：

$$\mathrm{tr}T(x) = T_{11}^{(3)}x^3 + T_{11}^{(-3)}x^{-3} + \left(T_{11}^{(1)} + T_{22}^{(1)}\right)x + \left(T_{11}^{(-1)} + T_{22}^{(-1)}\right)x^{-1} \tag{5.6.18}$$

但上式不易直接与物理的理解对应，引入 $x = \mathrm{e}^{\mathrm{i}u}$ 可将转移矩阵 $T(x)$ 用 u 表为：

$$T(x) = T^{(0,0)} + \sin u T^{(1,0)} + \cos u T^{(0,1)} + \sin^2 u T^{(2,0)} + \sin u \cos u T^{(1,1)} + \sin^2 u \cos u T^{(2,1)} + \sin^3 u T^{(3,0)} \tag{5.6.19}$$

其中 $$T^{(m,n)} = \| T_{ab}^{(m,n)} \|$$

相应地得到：

$$q = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\eta}$$

$$\begin{cases}
T_{11}^{(3,0)} = -8\mathrm{i}\lambda_3\cos(\eta P),\ T_{11}^{(2,1)} = 8\mathrm{i}\lambda_3\sin(\eta P) \\
T_{12}^{(2,0)} = -2a_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi Q}\{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\eta P}K^{\lambda}\hat{J}_+\hat{J}_3 + 2\hat{x}_+K^{\lambda+\delta_1} \\
\qquad \cdot (q-1)^{-1}\tau_-q^{\lambda-1/4}\cos(\eta P + \hat{J}_3\xi\eta - 1/4\xi\eta)\} \\
T_{12}^{(1,1)} = 2\mathrm{i}a_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi Q}\{-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\eta P}K^{\delta_- - \delta_+ - \lambda}\hat{J}_-\hat{x}_3 \\
\qquad + \hat{x}_-(q-1)^{-1}\tau_+K^{-\lambda-\delta_+}q^{\delta_+ - \delta_- + \lambda - 1/4} \\
\qquad \cdot \sin(\eta P + \xi\eta\hat{J}_3 + 1/4\xi\eta)\} \\
T_{21}^{(1,1)} = 2\mathrm{i}a_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi Q}\{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\eta P}K^{\lambda}\hat{J}_+\hat{x}_3 - \hat{x}_+K^{\lambda+\delta_+} \\
\qquad \cdot (q-1)^{-1}q^{\lambda-1/4}\tau_-\sin(\eta P + \xi\eta\hat{J}_3 + 1/4\xi\eta)\} \\
T_{11}^{(0,1)} = (2\mathrm{i})^3\lambda_3\sin(\eta P + \xi\eta\hat{J}_3) \\
\qquad \cdot \left\{\sin\xi\eta\sin\dfrac{\xi\eta}{2}g^{-1}\hat{J}_-\hat{J}_+ + \sin(\xi\eta\hat{J}_3 + 1/4\xi\eta)\sin\dfrac{\xi\eta}{2}\right\} \\
T_{22}^{(0,1)} = -2\mathrm{i}cK^{\delta_- - \delta_+}\sin(\eta P + \xi\eta\hat{J}_3)(\hat{x}_3)^2 \\
T_{12}^{(0,0)} = 2\mathrm{i}a_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi Q}\{K^{\delta_- - \delta_+ - \lambda - 1}q^{-1}\hat{J}_-\hat{x}_3 - q^{\delta_+ - 2}(1 + q^{-1/2})^{-1}\tau_+ \\
\qquad \cdot K^{\delta_- - \delta_+ - \lambda - \delta_-}\hat{x}_-\}\sin(\eta P + \xi\eta\hat{J}_3)
\end{cases}$$

$$
\begin{cases}
T_{21}^{(0,0)} = 2\mathrm{i}a_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi Q}\Big\{-K^{\lambda}\hat{J}_{+}\ \hat{x}_3 - (q-1)^{-1}\tau_{-}q^{-\delta_{+}} \\
\qquad \cdot K^{\lambda+\delta_{+}}q^{-1/4}2\mathrm{i}\sin\dfrac{\xi\eta}{4}\Big\}\sin(\eta P + \xi\eta\hat{J}_3) \\
T_{22}^{(1,0)} = 2\mathrm{i}cK^{\delta_{-}-\delta_{+}}\cos(\eta P + \xi\eta\hat{J}_3)\hat{x}_3^2 \\
T_{11}^{(1,0)} = \mathrm{i}\lambda_3\Big\{8g^{-1}\sin\xi\eta\cdot\sin\Big(\dfrac{1}{2}\xi\eta\Big)\cdot\cos(\eta P + \xi\eta\hat{J}_3) \\
\qquad \cdot\hat{J}_{-}\hat{J}_{+} + 4\sin\Big(\eta P + \xi\eta\hat{J}_3 + \dfrac{1}{4}\xi\eta\Big) \\
\qquad \cdot\sin\Big(\xi\eta\hat{J}_3 + \dfrac{1}{4}\xi\eta\Big) - 4\sin\Big(\eta P - \dfrac{1}{4}\xi\eta\Big)\sin\Big(\dfrac{1}{4}\xi\eta\Big) \\
\qquad + 4\sin(\eta P + \xi\eta\hat{J}_3)\cdot\sin(\xi\eta\hat{J}_3)\Big\}
\end{cases}
\tag{5.6.20}
$$

它的形式较为复杂，现在作简化。考虑一个极限情形：当 $\xi\eta =$ 常数，但 $\eta\to 0$，这时有：

$$
\begin{aligned}
H = T_{11}^{(1,0)} + T_{22}^{(1,0)} = \mathrm{i}(K + K^{-1})\Big\{&cq^{(\delta_{-}-\delta_{+})\hat{J}_3}(\hat{x}_3)^2 \\
&-\frac{\lambda_3}{2}\big[(q^{1/2} - q^{-1/2})^2(\hat{J}_{+}\hat{J}_{-} + \hat{J}_{-}\hat{J}_{+}) \\
&+ (q^{1/4} + q^{-1/4})^2(K + K^{-1})\big]\Big\} + 8\mathrm{i}\lambda_3
\end{aligned}
\tag{5.6.21}
$$

其中
$$
K = q^{\hat{J}_3} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\eta\hat{J}_3} \tag{5.6.22}
$$

且 λ_3，c 均为任意常数，且 $\delta_{+} + \delta_{-} = 1$。为了理解(5.6.21)式的物理意义，取极限 $q\to 1$，即 $\xi\to 1$，$\eta\to 0$，则有

$$
\begin{aligned}
H \longrightarrow (-2\mathrm{i}\lambda_3)\eta^2\{&1/2(J_{+}J_{-} + J_{-}J_{+}) + 4J_3^2 \\
&+ 4PJ_3 + c'(\hat{x}_3)^2 + 1/4\}
\end{aligned}
\tag{5.6.23}
$$

它正是过去解出的 G-C 陀螺(5.5.17)式，仅需将过去的哈密顿量

中 $x_1 \rightarrow (\hat{x}_3)^2$。重复所有的有理形式 RTT 关系的计算，发现(5.6.23)式与 $\check{R}(u) = uP + 1$ 的 RTT 要求一致，亦即也是它的解。三角形式下的另一个守恒量为 $G(= T_{11}^{(0,1)} + T_{22}^{(0,1)})$：

$$G = \{[\hat{J}_3]_q(q - q^{-1})\}\Big\{\frac{\lambda_3}{2}[(q^{1/2} - q^{-1/2})^2(\hat{J}_+\hat{J}_- + \hat{J}_-\hat{J}_+)$$

$$+ (q^{1/4} - q^{-1/4})^2(K + K^{-1})] - cq^{(\delta_- - \delta_+)\hat{J}_3}(\hat{x}_3)^2\Big\} \tag{5.6.24}$$

在取有理极限时，有

$$G \longrightarrow -2\mathrm{i}\lambda_3\eta^3\Big\{(J_3 + P)\Big(\frac{1}{2}[J_+, J_-]_+ + 1/4\Big) - c'(\hat{x}_3)^2\Big\} \tag{5.6.25}$$

它正是有理解对称的 G-C 陀螺的另一守恒量。

为探讨三角形式 G-C 陀螺的物理含义，简单令 $P = 0$，$c = 0$，它表示陀螺质心动量为零，并且没有坐标形式的势，即变为一个"纯粹"q 陀螺。这时相应哈密顿量简化为：

$$H_{\mathrm{q\,top}} = \frac{-\mathrm{i}\lambda_3}{2}(K + K^{-1})\{(q^{1/2} - q^{-1/2})^2(\hat{J}_+\hat{J}_- + \hat{J}_-\hat{J}_+)$$

$$+ (q^{1/4} + q^{-1/4})^2(K + K^{-1})\} \tag{5.6.26}$$

它的有理极限是 $\sim J_1^2 + J_2^2 + \frac{1}{4}J_3^2$，即正是 G-C 陀螺情况，它相应于 $\check{R}(u) = uP + I$ 的 RTT 关系解的简化情况。在(5.6.26)式中，略去公共因子，得

$$H'_{\mathrm{q\,top}} = \frac{(K + K^{-1})}{2}\Big\{\frac{1}{2}(\hat{J}_+\hat{J}_- + \hat{J}_-\hat{J}_+)$$

$$+ (q^{1/4} + q^{-1/4})^{-2}\frac{(K + K^{-1})}{2}\Big\} \tag{5.6.27}$$

这个结果表明，满足 RTT 关系的陀螺，并不是简单地把原来

的角动量算符形式增加 q 相关的系数并把 $\boldsymbol{J}\to\hat{\boldsymbol{J}}$ 。(5.6.27)式前面的 $(K+K^{-1})$ 因子是非常重要的。(5.6.27)式也表明,q-G-C陀螺完全可以写为对角形式。利用 $U_q(SL(2))$的平移算符表示:

$$\begin{cases} T_xT_y = qT_yT_x, \quad (T_x)^{-1} = T_{-x} \\ T_xT_{-x} = T_yT_{-y} = 1 \\ (T_y)^{-1} = T_{-y} \end{cases} \tag{5.6.28}$$

在本节采用的记号下,可定义:

$$\begin{cases} \hat{J}_- = -(q^{1/2} - q^{-1/2})^{-1}(T_{-x} + T_{-y}), \quad K = q^{-1/2}T_{-y}T_x \\ \hat{J}_+ = -(q^{1/2} - q^{-1/2})^{-1}(T_x + T_y), \quad K^{-1} = q^{1/2}T_{-x}T_y \end{cases} \tag{5.6.29}$$

可验证它们满足:

$$\begin{cases} K\hat{J}_\pm K^{-1} = q^\pm \hat{J}_\pm \\ [\hat{J}_+, \hat{J}_-] = \dfrac{q^{1/2} + q^{-1/2}}{q - q^{-1}}(K - K^{-1}) = g[\hat{J}_3]_q \\ g = q^{1/2} + q^{-1/2}, \quad K = q^{\hat{J}_3} \end{cases} \tag{5.6.30}$$

容易证明:

$$\begin{aligned} &\hat{J}_+\hat{J}_- + \hat{J}_-\hat{J}_+ \\ &\quad = (q^{1/2} - q^{-1/2})^{-2}\{4 + (q^{1/2} + q^{-1/2})(K + K^{-1})\} \end{aligned} \tag{5.6.31}$$

于是(5.6.27)式可改写为:

$$\begin{aligned} H'_{\text{q top}} &= (q^{1/2}-q^{-1/2})^{-2}\frac{(K+K^{-1})}{2}\left\{2+\frac{1}{2}g(g+1)(K+K^{-1})\right\} \\ &= (q^{1/2}-q^{-1/2})^{-2}\{(q^{1/2}T_{-x}T_y+q^{-1/2}T_{-y}T_x) \\ &\quad + \frac{1}{4}g(g+1)(q^{1/2}T_{-x}T_y+q^{-1/2}T_{-y}T_x)^2\} \end{aligned} \tag{5.6.32}$$

其中

$$g = q^{1/2} + q^{-1/2}$$

上面从 RTT 关系得到(5.6.26)式的过程是相当复杂的,但结果很明确:无外场时它正是满足 RTT 的 q 变形陀螺。(5.6.12)式有许多可能实现的方式,也即对应许多可能物理图象。以后将证明,(5.6.12)式的多个费米子实现后,对(5.6.26)式作平均场近似后,将导致 Hubbard 模型的哈密顿量,这是个相当有物理兴趣的结果。有关这方面的讨论可参阅文献[18~21]。

参考文献

1. Calogero F. J Math Phys, 1969, 10:2191
2. Sutherland B. J Math Phys, 1971, 12:246; 251
3. Polychronakos A. Phys Rev Lett, 1992, 69:703
4. Dunkl C F. Trans Amer Math Soc, 1989, 311:167
5. Ge M L, Wang Y W. Phys Rev, 1995, E51:2919
6. Sutherland B, Römer R A. Utah University Preprint, 1993
7. Hikami K, Wadati M. Phys Rev Lett, 1994, 73:1191
8. Yan M L, Chen Z. Rational Solution of Yang-Baxter Equation and 1D Many-Body Problem with Generalized Delta-Function. Hefei: University of Science and Technology of China Preprint, 1992
9. 闫沐霖. 带有投射算符的 δ 函数作用势与杨-巴克斯特方程. 在南开大学理论物理研究室的报告,1992
10. Bernard D, Gaudin M, Haldane F D M, Pasquier V. J Phys, 1993, A26:5219
11. Ge M L, Zhang Y Z. Extended Long-Range-Interaction Models. Tianjin: Nankai University Preprint, 1995
12. 万哲先. 李代数. 北京:科学出版社,1964
13. Yamamoto T. Multicomponent Calogero Model of B_N Type Confined in Harmonic Potential. Kyoto: Kyoto University Preprint, 1995
14. Chen G Z, Ge M L. Phys Lett, 1995, A208:62
15. Yan M L, Zhao B H. Phys Lett, 1992, A168:25

Pang G D, Pu F C, Zhao B H. Phys Rev Lett, 1990, 65:3227

16. Komarov I V. Theor Math Fiz, 1982, 50:402
    Komarov I V, Zalipaev V V. J Phys, 1984, A17:31
17. Sklyanin E K. Quantum Groups and Quantum Integrable Systems. In:Ge M L, ed. Nankai Lectures on Mathmatical Physics. Singapore:World Scientific Publ Co Ltd, 1991. 63
18. Ge M L, Xue K, Wang Y W. Phys Lett, 1995, A200:139
19. Chen G Z, Ge M L. Phys Lett, 1995, A208:62
20. Ge M L, Xue K. J Phys, 1996, A29:6881
21. 陈景灵,王宙斐,葛墨林,薛康. 中国科学,1998, A28:157

第六章

YBE 的三角解

前几章介绍了 YBE 最简单的解 $R(u)=u+P$ 引起的一系列量子可积模型，现在回到 YBE 自身。它有多少种解呢？既然一个解就可以产生出许许多多物理模型（通过 RTT 关系），讨论 YBE 的解将会大大扩展量子可积领域。现在已经知道 YBE 存在四种类型的解：有理解、三角解、椭圆解与手征 Potts 模型解。本章实际只研究三角解，有时也涉及有理解。现通过一些例子说明这些解的特点，然后集中研究 YBE 的三角解。

§ 6.1　YBE 解的类型举例

(1) 最简单的有理解的例子

$$R(u)=u+P$$

其中 P 为置换算符，可取任意有限维表示。相应地，转移矩阵 $T(u)$ 的展开式为

$$T(u)=\sum_{n=0}^{\infty}u^{-n}T^{(n)}$$

其中 u 为谱参数，注意对有理解，现在 $T(u)$ 展开式为半轴形式，向全部 n（包括 $n<0$）的推广将不在本书讨论。

(2) 最简单的三角解

$$R(u)=\begin{pmatrix}\mathrm{sh}(u+r) & & & \\ & \mathrm{sh}u & \mathrm{sh}r & \\ & \mathrm{sh}r & \mathrm{sh}u & \\ & & & \mathrm{sh}(u+r)\end{pmatrix}$$

其中 $q=\mathrm{e}^r$ 为 YBE 解允许的参数,未标出的元素为零。它有 6 个非零元素,称为 6 顶角模型。给定这种类型的 $R(u)$后,转移矩阵 $T(u)$要对 u 的全部幂次展开

$$T(u)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}u^{-n}T^{(n)}$$

这种 $R(u)$当令 $u\to ru$ 且 $r\to 0$ 时,存在极限

$$R(u)\to r(u+P)$$

由于公因子对 YBE 解不起作用,它正是(1)中有理解。

(3) 简单的椭圆解

三角解可表为 $x=\mathrm{e}^u$(或 $x=\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}$)的多项式,从 u 的角度,它为单周期。存在双周期的解,例如,下述的 8 顶角解。8 顶角解首先是由巴克斯特给出的[1],以下形式见文献[2]:

$$R(u)=\begin{pmatrix}a(u) & & & d(u)\\ & b(u) & c(u) & \\ & c(u) & b(u) & \\ d(u) & & & a(u)\end{pmatrix}$$

其中

$$a(u)=\theta_0(\eta)\theta_0(u)\theta_1(u+\eta)$$

$$b(u)=\theta_0(\eta)\theta_1(u)\theta_0(u+\eta)$$

$$c(u)=\theta_1(\eta)\theta_0(u)\theta_0(u+\eta)$$

$$d(u) = \theta_1(\eta)\theta_1(u)\theta_1(u+\eta)$$

$$\theta_0(u) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - 2p^{(n-1)/2}\cos 2\pi u + p^{2n-1})(1 - p^n)$$

$$\theta_1(u) = 2p^{\frac{1}{8}}\sin\pi u \prod_{n=1}^{\infty}(1 - 2p^n\cos 2\pi u + p^{2n})(1 - p^n)$$

其中η与p为两个独立参数，所以这种解是双周期的。当$p\to 0$，易知$\theta_0(u)\approx 2\sin^2\pi u$，$\theta_1(u)\approx 2p^{\frac{1}{8}}\sin\pi u$，则有$a(u)\approx f(p)\sin\pi(u+\eta)$，$b(u)\approx f(p)\sin\pi u$，$c(u)=f(p)\sin\pi\eta$，$d(u)\approx 0$，于是此时(3)回到(2)的三角解形式。

这里要强调，尽管这三个例子表现了逐级极限性质，但这并不表明所有有理解都可以从三角解极限得到，或三角解都可以由椭圆解求极限得到。一般说，有理解有自己的体系，三角解也有自己体系，有的三角解没有有理极限。

(4) 手征 Potts 模型

(1)～(3)类型的解都对应顶角模型，并且在三个相邻空间中的R矩阵的宗量中谱参数具有相加性质。一般说，YBE 可以写为：

$$\check{R}_{12}(\lambda,\mu)\check{R}_{23}(\lambda,\nu)\check{R}_{12}(\mu,\nu) = \check{R}_{23}(\mu,\nu)\check{R}_{12}(\lambda,\nu)\check{R}_{23}(\lambda,\mu)$$

这里谱参数不再像以前那样的一定可以表为$u_{12}=\lambda-\mu$等，但同样可以用这些谱参数将$\check{R}(\lambda,\mu)$参数化，不过参数化曲线十分复杂。这时不再是顶角模型，但所述的$\check{R}$矩阵可以由以下的函数$W_{pq}(a-b)$构成，其中$W_{pq}(a-b)$满足：

$$\sum_d W_{pr}(a-d)\overline{W}_{qr}(b-d)\overline{W}_{pq}(d-c) = R_{pqr}\overline{W}_{pr}(b-c)W_{qr}(a-c)W_{pq}(a-b)$$

W_{pq}与$\overline{W}_{pq}$可以用图 6.1 表示。

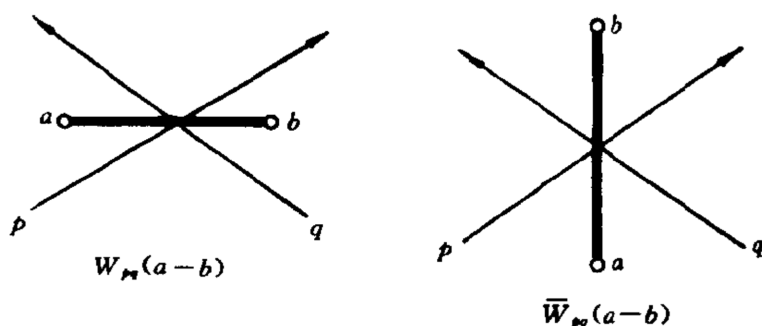


图 6.1

这个关系可以参数化[3~5]：

$$g_{pq}(n)=\frac{W_{pq}(n)}{W_{pq}(0)}=\prod_{j=1}^{n}\frac{d_pb_q-a_pc_q\omega^j}{b_pd_q-c_pa_q\omega^j}$$

$$\overline{g}_{pq}(n)=\frac{\overline{W}_{pq}(n)}{\overline{W}_{pq}(0)}=\prod_{j=1}^{n}\frac{\omega a_pd_q-d_pa_q\omega^j}{c_pb_q-b_pc_q\omega^j}$$

$$\omega=\exp\left(\frac{2\pi\mathrm{i}}{N}\right)$$

其中

$$R_{pqr}=f_{pq}f_{qr}/f_{pr}$$

$$f_{pq}=\left\{\frac{\prod_{m=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{N}\omega^{mk}\,\overline{W}_{pq}(k)\right)}{\prod_{m=1}^{N}W_{pq}(m)}\right\}^{1/2}$$

一种特殊情况是自对偶解：

$$c_p=d_p=1,\ a_p^N+b_p^N=0$$

这时简化为：

$$g_{pq}(n)=\prod_{j=1}^{n}\frac{b_q-a_p\omega^j}{b_p-a_q\omega^j}$$

$$\overline{g}_{pq}(n)=\prod_{j=1}^{n}\frac{\omega a_p-a_q\omega^j}{b_q-b_p\omega^j}$$

其中 a_p，b_p 与 ω^j 为参数。这时 a_p 与 b_p 所起的作用有些类似于顶

角模型中的谱参数 u。上面所示的手征 Potts 模型解是由欧阳-Perk-巴克斯特给出的[2]。在最早发现手征 Potts 模型解的过程中我国学者闫沐霖教授和贝里·马珂依作出了重要贡献[4]。

本章将集中介绍三角解,因为它与以后要讨论的量子代数对称性有密切的关系。由于求解 YBE 往往需要许多运算,人们常常集中于运算的技巧而忽略物理的考虑,因此在以后的介绍中将不着重于具体运算,而着重介绍主要思路和物理对应。

§6.2 辫子群矩阵表示(BGR)的例子

第三章强调了 YBE 的物理意义,$\check{R}$(或 S)代表了二体的无反射、满足因式化条件的碰撞 S 矩阵。由给定 $\check{R}$(或 R)解 RTT 关系,即可决定诸矩阵元 $T_{ab}^{(n)}$ 所满足的对易关系,当 $\check{R}$ 是有理解时,这些关系引进了 Yangian 对称性,它是霍普夫代数的一种实现。从数学的观点,这种代数是基本的,用它的生成元原则上可以找到 R 算符本身,它的矩阵元就是 R 矩阵。对于 Yangian,Drinfeld 以及第四章文献[1,3]已经建立了这个理论。当 R 矩阵是三角解,$T(u)_{ab}$ 所建立的霍普夫代数是量子代数,用它的生成元构造霍普夫代数的基,再构造它的中心,就可以构造 R 矩阵,这方面数学上已有很成熟的理论。换言之,从数学角度,所有知识应当从代数结构得到,包括 R 矩阵自己,这是 Drinfeld-Jimbo-Reshetikhin 构造的基本出发点[2]。

然而从量子逆散射方法出发去讨论对称性,基本出发点不是代数结构本身,而是先给定 R 矩阵,求解转移矩阵 $T(u)_{ab}$,再建立物理模型和产生的新型代数的结构。这种处理模式为 Faddeev-Reshetikhin-Takhtajan 方案[6]。换言之,从数学角度,霍普夫代数是出发点,R 矩阵是产生物。而从物理角度 R 矩阵是出发点,霍普夫代数是衍生物。下一章将介绍量子代数基本特点,本章主要介绍如何直接解 R 矩阵。由于在数学上,已经对某些不同李代数结构给出了由相

应量子代数生成元组成 R 算符的明显公式(虽然有些情况不太实用),因此,只要代入具体表示就可以得到 R 的矩阵表示,R 的矩阵元即 R 矩阵。但是,将会看到,直接解法仍有很大的好处,因为有许多解是不容易从典型的数学的公式中得到的。以下为方便,将 Jimo, Reshetikhin, Rosso 等等给出的由量子代数标准方法得到的解称为标准解,而将另外存在的新的解系称为非标准解。

(1) 求解方案简述

为了直接求解 YBE,首先解它的渐近行为。为了方便,引入新的谱参数 x:

$$x = \mathrm{e}^{u} \tag{6.2.1}$$

此时 YBE 可写为

$$\check{R}(x)_{i_1 j_1}^{i' j'} \check{R}(xy)_{j' k_1}^{k' k_2} \check{R}(y)_{i' k'}^{i_2 j_2} = \check{R}(y)_{j_1 k_1}^{j' k'} \check{R}(xy)_{i_1 j'}^{i_2 i'} \check{R}(x)_{i' k'}^{j_2 k_2} \tag{6.2.2}$$

或

$$\check{R}_{12}(x) \check{R}_{23}(xy) \check{R}_{12}(y) = \check{R}_{23}(y) \check{R}_{12}(xy) \check{R}_{23}(x) \tag{6.2.3}$$

并且有幺正条件

$$(\check{R}(x))^{-1} = \check{R}(x^{-1}) \tag{6.2.4}$$

及初始条件

$$\check{R}(x=1) = \check{R}(u=0) = I \tag{6.2.5}$$

渐近条件

$$b \equiv S = \lim_{u \to \infty} \check{R}(u) = \lim_{x \to \infty} \check{R}(x) \tag{6.2.6}$$

相应地 $b \equiv S$ 遵从辫子群关系:

$$S_{12} S_{23} S_{12} = S_{23} S_{12} S_{23} \tag{6.2.7}$$

(6.2.7)式的解称为辫子群表示,简记为 BGR,以后没有谱参数依赖关系的 S 就表示 BGR。直接求解的步骤如下:

a）对给定的某种对称性，例如李代数结构，首先求解 BGR (6.2.7)式，当中加上某些物理条件。

b）然后设法引进谱参数的依赖关系，即由 BGR S 导出 $\check{R}(x)$，即 YBE 的解。

与李代数相联系的 BGR S 是很大的一类。由于 S 不依于谱参数，其矩阵元 S_{ab}^{cd} 只依于初态的分立指标 a, b 与末态指标 c, d。这些指标的最简单的例子是代表自旋分量，例如 $+\left(+\frac{1}{2}\right)$，$-\left(-\frac{1}{2}\right)$。相当大的一类反应中初、末态自旋守恒，即有

$$S_{ab}^{cd} = 0, \text{当 } a + b \neq c + d \qquad (6.2.8)$$

推广这个概念，自旋分量是李代数中的权分量，所以 a, b, …一般说是一组数字，它们代表了权的各个分量，这样，如果反应前后权分量守恒，那么必有(6.2.8)成立。这样做的条件是 $\check{R}(x)$ 矩阵当 $x \to \infty$ 渐近行为中，动力变量(动量) x 与内部李代数结构(例如自旋)可完全分离变量时，a)、b)步骤才得以进行。由于两个粒子碰撞，每个全同粒子各自是某单李代数的表示 Λ，碰撞意味着 $\Lambda \otimes \Lambda$，之后的态应当是该直积空间再作分解，设为 M 个子空间 E_α ($\alpha = 1, 2, \cdots M$)：

$$\Lambda \otimes \Lambda = \sum_{\alpha=1}^{M} \oplus E_\alpha \qquad (6.2.9)$$

与每个子空间相联系必定存在投影算符 P_α：

$$\begin{cases} P_\alpha P_\beta = \delta_{\alpha\beta} \\ \sum_{\alpha=1}^{M} P_\alpha = I \end{cases} \qquad (6.2.10)$$

因此对李代数必定有

$$\Lambda \otimes \Lambda = \sum_{\alpha=1}^{M} \varepsilon_\alpha P_\alpha \qquad (6.2.11)$$

其中 $\varepsilon_\alpha = \pm 1$，视 P_α 所对应空间是对称还是反对称而定。(6.2.9)～(6.2.11)式是李代数表示论的基本关系式，对任何经典单李代数都成立。现在 S 占据两个李代数空间，与经典李代数不同之处在于 S 满足 BGR，在求解(6.2.7)式时，允许 S 依赖于一个任意参数 q。可以想象，此时如果用经典李代数的语言描述 S，必须对(6.2.11)式作修改，使 P_α 依赖于 q，同时相应的本征值 ε_α 也要换成依赖于 q 的量。

定理(N. Yu. Reshetikhin[7])：

$$S = \sum_{\alpha=1}^{M} \lambda_\alpha(q) P_\alpha(q) \tag{6.2.12}$$

$$\lambda_\alpha(q) = \pm q^{c_{E_\alpha} - 2c_\Lambda} \tag{6.2.13}$$

其中 c_Λ 为表示 Λ 的 Casimir，c_{E_α} 为子空间表示 E_α 的 Casimir，它们都由经典李代数决定。正号仍然对应着(6.2.11)中对称子空间，负号则对应于反对称子空间。而 $P_\alpha(q)$ 仍然满足

$$\begin{aligned} & P_\alpha(q) P_\beta(q) = \delta_{\alpha\beta} \\ & \sum_{\alpha=1}^{M} P_\alpha(q) = I \end{aligned} \tag{6.2.14}$$

当 $q=1$ 时，即回到经典李代数情况。显然这种将经典李代数结果作 q 变形得到 BGR S 的作法，隐含着保留了经典李代数的基本结构：不变子空间个数得以保持，对称或反对称结构得以存在等等，仅仅在本征值与投影算符方面作了一个 q 变形，并且在 $q=1$ 时回到经典李代数结果。这是"不彻底"的变形，但它在量子群发展中起了很大作用。(6.2.12)式意味着 S 一定可以写为许多块子方阵之和，亦即为对角块结构。以自旋 1/2 的 6 顶角模为例，这时 $a, b, \cdots = +, -$，S 的矩阵形式在满足(6.2.7)式时可表为：

$$S = \begin{array}{c} \\ (++) \\ (+-) \\ (-+) \\ (--) \end{array} \begin{pmatrix} (++) & (+-) & (-+) & (--) \\ S^{++}_{++} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S^{+-}_{+-} & S^{-+}_{+-} & 0 \\ 0 & S^{+-}_{-+} & S^{-+}_{-+} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S^{--}_{--} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \boxed{A_2} & \\ & & A_1 \end{pmatrix} \tag{6.2.15}$$

记为

$$S = \text{block diag}\,(A_1,\ A_2,\ A_1) \tag{6.2.16}$$

凡 $a+b \neq c+d$ 的元素皆为零，其中 A_n 为 $n \times n$ 矩阵。最简单的办法是将(6.2.15)式代入(6.2.7)式直接求解代数方程，发现必须 $S^{+-}_{+-}=0$ 或者 $S^{-+}_{-+}=0$ (6.2.7)式才会满足，后者对应 S^{-1}，故可只取 $S^{+-}_{+-}=0$。由于 $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 1 \oplus 0$ 的分解中有一个三重态(对称)和一个单态(反对称)，因而在 4 个本征值中，3 个相同本征值对应三重态，而第四个本征值对应单态，它们很容易从(6.2.13)式计算出来：

$$\lambda_1 = +\, q^{2-\frac{3}{4}\cdot 2} = q^{+\frac{1}{2}} \quad (\text{三重态})$$

$$\lambda_0 = -\, q^{0-\frac{3}{2}\cdot 2} = -\, q^{-\frac{3}{2}} \quad (\text{单态})$$

从而立即可以断定 $A_1 = A_3 = q^{1/2}$。而中心块 A_2 有两个本征值 λ_1 与 λ_0，由于 $S^{+-}_{+-}=0$，即有

$$A_2 - \lambda I = \begin{vmatrix} -\lambda & x \\ y & z-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

已知 λ 的两个根 λ_1 与 λ_0，可决定出 $x = \eta q^{-1/2}$ 与 $y = \eta^{-1} q^{-1/2}$，$z =$

$q^{-1/2}(q-q^{-1})$，即

$$S^{(1/2,1/2)}=q^{-1/2}\begin{pmatrix} q & & & \\ & 0 & \eta & \\ & \eta^{-1} & (q-q^{-1}) & \\ & & & q \end{pmatrix}$$

为简单可取 $\eta=1$，公共因子不起作用，故可取

$$S^{(1/2,1/2)}=\begin{pmatrix} q & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & q-q^{-1} & \\ & & & q \end{pmatrix}$$

$$[S^{(1/2,1/2)}]^{-1}=\begin{pmatrix} q^{-1} & & & \\ & -(q-q^{-1}) & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & q^{-1} \end{pmatrix} \tag{6.2.17}$$

显然，作为矩阵，有

$$(S^{(1/2,1/2)}-\lambda_1)^3(S^{(1/2,1/2)}-\lambda_0)=0 \tag{6.2.18}$$

可以证明，还存在另一种解[8~10]

$$\tilde{S}^{(1/2,1/2)}=\begin{pmatrix} q & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & q-q^{-1} & \\ & & & -q^{-1} \end{pmatrix} \tag{6.2.19}$$

它对应的直积分解为：

$$\frac{1}{2}\otimes\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\oplus\frac{1}{2} \tag{6.2.20}$$

相应地

$$(\tilde{S}^{(1/2,\ 1/2)}-\lambda_1)^2(\tilde{S}^{(1/2,\ 1/2)}-\lambda_0)^2=0 \qquad (6.2.21)$$

以后所有 BGR 都是(6.2.17)式与(6.2.19)式这两种类型 S 解的推广。事实上(6.2.17)式属于标准解，它与 q 不等于单位根相联系，(6.2.19)式属于非标准解。在(6.2.19)式中出现了 $-q^{-1}$，它可视为超对称的推广，也可视为 $\omega^2=1$ 中 ω 取 -1。从非标准解角度可以有发展并进而建立量子代数结构[11]，从超对称角度亦可进一步讨论[12]。当然，更复杂的情况并不是超对称，甚至也不仅限于 q 为单位根，以后会作一些讨论。在结束这个演示性例子之前，要强调：(6.2.15)式中指标规则是由李代数的权分量守恒规定的，这种守恒限制事先减少了 BGR S 的元素的个数，大大简化了求解的过程，详细讨论参阅文献[13，14]。(6.2.15)式也可以用矩阵 E 表示

$$(E_{\alpha\beta})_{ab}=\delta_{\alpha a}\delta_{\beta b} \qquad (6.2.22)$$

$$S^{(1/2,\ 1/2)}=q\sum_{\alpha}E_{\alpha\alpha}\otimes E_{\alpha\alpha}+\sum_{\alpha\neq\beta}E_{\alpha\beta}\otimes E_{\beta\alpha}+w\sum_{\alpha<\beta}E_{\alpha\alpha}\otimes E_{\beta\beta}$$

$$(w=q-q^{-1}) \qquad (6.2.23)$$

由矩阵矢量积公式 $(A\otimes B)_{ik,\ jl}=A_{ij}B_{kl}$ 可知

$$S^{(1/2,\ 1/2)ab}_{\quad cd}=q\Big|_{a=b=c=d}+\delta_{ad}\delta_{bc}\Big|_{a\neq b}+w\delta_{ac}\delta_{bd}\Big|_{a<b} \qquad (6.2.24)$$

其中 $a,\ b,\ \cdots=+,\ -$，上式可用图 6.2 表示出来。

图　6.2

图 6.2 表明，在关心散射 S 矩阵的渐近行为时，自旋守恒关系用同一矢号表示，其分量必须相同。用这种图示方法计算一些 BGR 还

是比较方便的，它最早由 Kauffman 引进[15]。

上述例子可以推广到更一般的情况。观察图 6.2，它是不全面的，因为它只包含散射图形，而没有湮没项，在保证碰撞前后总的权分量守恒条件下，还应当有一种图形(图 6.3)[16]，它表示两个具有入射内部指标 a 与 $-a$ 可以湮没成出射指标 c 与 $-c$。事实上图 6.2 代表 A_n 代数基本表示相应的 BGR，而加上图 6.3 则包括了 B_n，C_n 与 D_n 基本表示相应的 BGR S 的解。最直接的办法就是图 6.2 加图 6.3，代入辫子关系(6.2.7)式中，求解即是把图相联结并确定相应图形前面的系数，它们都以 q 表达。由于计算比较繁琐，因此，只简要给出一系列结果，对它们以(6.2.24)式的形式进行计算，效果与图形是等价的。具体图形对应可参阅文献[13，16]。

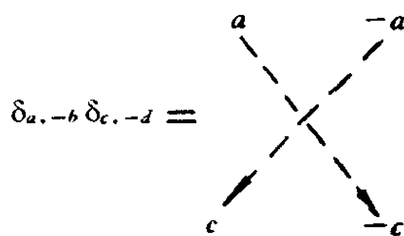


图　6.3

(2) 与 A_n 基本表示相联系的 BGR

此时 S 的矩阵元可表示为

$$S_{cd}^{ab}=U_a\delta_{abcd}+W_{a+b}^{(b)}\delta_{ac}\delta_{bd}\Big|_{a<b}+P_{a+b}^{(a,b)}\delta_{ad}\delta_{bc}\Big|_{a\neq b}\tag{6.2.25}$$

其中

$$\begin{aligned}a,b,\cdots=-\left(\frac{N-1}{2}\right),-\left(\frac{N-1}{2}\right)+1,\cdots,\\ \frac{N-1}{2}-1,\frac{N-1}{2}\end{aligned}\tag{6.2.26}$$

$$N=n+1$$

而待定参数 U_a，$W_{a+b}^{(b)}$ 与 $P_{a+b}^{(a,b)}$ 则由辫子关系确定，$\delta_{abcd}=1$，当 $a=b=c=d$；$\delta_{abcd}=0$，当任意两个指标不同。由于基本表示的权向量特别简单，所以指标可以用简单的数字序列(6.2.26)式表示。将(6.2.25)式代入(6.2.7)式得到下面的充分解[17,25]：

$$\begin{cases} W^{(b)}_{a+b} = w \quad (P^{(a,b)}_{a+b})^2 = p^2 \\ U^2_a = q_a w + p^2 \quad (a, b = 1, 2, \cdots, N; w = q - q^{-1}) \end{cases} \tag{6.2.27}$$

其中 q_a 的选择有两种可能性，导致两种类型解：

a)　$q_a = q \quad w = q - q^{-1}p^2$　　(6.2.28)

b)　$q_{-\left(\frac{N-1}{2}\right)} = q$，其余的 $q_a = q$ 或 $-q^{-1}p^2$，$w = q - q^{-1}p^2$　　(6.2.29)

其中 q，p 为任意参数。a)形式解其形式非常简单，是 $SL(2)$ 情况的推广，即标准解。

1) 标准解（取 $p = 1$）：

$$S(A_n) = \text{block diag}\ (A_1, A_2, \cdots, A_{n+1}) \tag{6.2.30}$$

其中 A_k 为 $k \times k$ 矩阵，且

$$\begin{cases} A_1 = q,\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & w \end{pmatrix},\ A_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & q & 0 \\ 1 & 0 & w \end{pmatrix} \cdots \\ A_{2m} = \begin{pmatrix} & & & & & 1 \\ & & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & & & 1 & & \\ & & 0\ 1 & & & \\ & & 1\ w & & & \\ & & & & \ddots & \\ 1^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}} & & & & & w \end{pmatrix}, A_{2m+1} = \begin{pmatrix} & & & & & 1 \\ & & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & & & 1 & & \\ & & q\ 0 & & & \\ & 1 & 0\ w & & & \\ & & & & \ddots & \\ 1^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}} & & & & & w \end{pmatrix}, \cdots, A_{n+1} = t \end{cases} \tag{6.2.31}$$

上面未列出的元素为零，$t = q$，$A_1 = A_N$，$\cdots$，$w = q - q^{-1}$。

2) 非标准解：

(6.2.31)式中的 t 可取 q 或 $-q^{-1}$，因此 $A_N = A_{n+1}$ 与 A_1 可以不对称。

无论是 1)或 2)，矩阵 S 的分立本征值均为：

$$\lambda_1 = q,\ \lambda_2 = -q^{-1} \tag{6.2.32}$$

即
$$(S-q)(S+q^{-1})=0 \tag{6.2.33}$$

(3) B_n, C_n 与 D_n 基本表示决定的 BGR

此时 S 的分量形式为[17]

$$S_{cd}^{ab}=u_a\delta_{abcd}+W_{a+b}^{(b)}\delta_{ac}\delta_{bd}\big|_{a<b}+p_{a+b}^{(a,b)}\delta_{ad}\delta_{bc}\big|_{a\neq b}$$
$$+q^{(a,c)}\delta_{a,-b}\delta_{c,-d}\big|_{a\neq\pm c} \tag{6.2.34}$$

其中对 B_n: $N=2n+1$;对 C_n 与 D_n: $N=2n$, 且

$$a,b,c,d=\left[-\left(\frac{N-1}{2}\right),-\left(\frac{N-1}{2}\right)+1,\cdots,\frac{N-1}{2}-1,\frac{N-1}{2}\right] \tag{6.2.35}$$

求满足以下对称性的解:

T 不变:
$$S_{cd}^{ab}=S_{ab}^{cd} \tag{6.2.36}$$

权守恒:
$$a+b=c+d \tag{6.2.37}$$

(6.2.37)式导致

$$p_{a+b}^{(a,b)}=p_{a+b}^{(b,a)}\quad q^{(a,c)}=q^{(c,a)}$$

$$q^{(a,c)}\Big|_{\substack{a<0\\|a|<|c|}}=q^{(a,0)}\Big|_{a>0}=q^{(a,\pm a)}=0$$

将以上的 S_{cd}^{ab} 形式代入(6.2.7)式,经过相当的计算,得到以下形式的解:

1) B_n 标准解: $N=2n+1$

$$a,b,c,d=[-n,-n+1,\cdots-1,0,1,\cdots,n-1,n]$$

$$S(B_n)_{\text{标准}}=\text{block diag}\,[\sigma_{-n},\sigma_{-n+1},\cdots,\sigma_{-1},\sigma_0,\sigma_1,\cdots,\sigma_{n-1},\sigma_n] \tag{6.2.38}$$

$\sigma_{-n}=\sigma_n$, $\sigma_{-n+1}=\sigma_{n-1}$, $\cdots$ 与 A_n 的(6.2.31)式中标准解形式相同,σ_0(中心块)由下式给出:

$$
\delta_0(B_n)=\begin{pmatrix}
 & & & & & & & & q^{-1} \\
 & & & & & & & q^{-1} & -wq^{-1} \\
 & & & & & q^{-1} & -wq^{-1} & \cdots & -wq^{-n+1} \\
 & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & -wq^{-1/2} & -wq^{-3/2} & \cdots & -wq^{\frac{-2n+1}{2}} \\
 & & & q^{-1} & -wq^{-1/2} & w(1-q^{-1}) & -wq^{-2} & \cdots & -wq^{-n} \\
 & & q^{-1} & -wq^{-1} & -wq^{-3/2} & -wq^{-2} & w(1-q^{-3}) & \cdots & -wq^{-n-1} \\
q^{-1} & -wq^{-1} & \cdots & -wq^{-n+1} & -wq^{\frac{-2n+1}{2}} & -wq^{-n} & -wq^{-n+1} & & w(1-q^{-2n+1})
\end{pmatrix}
\tag{6.2.39}
$$

易知由 $\sigma_j(j \neq 0)$ 决定的本值与 A_n 情况相同,即仍为 $\lambda_1 = q$,$\lambda_2 = -q^{-1}$,另外独立的本征值由 σ_0 决定,可用以下方法计算:

由于 σ_0 是 $n \times n$ 矩阵,写为

$$\sigma_0 = \sigma_0^{(n)},\ \sigma_0^{(n)}(\lambda) = \sigma_0^{(n)} - \lambda I = \lambda A + B$$

其中

$$B = -q^{-2}[\sigma_0^{(n-1)}(\lambda)]$$

A 可表为

$$A = \begin{bmatrix} [\sigma_0^{(n-1)}(\lambda)] & & -wq^{-1} \\ & & \vdots \\ -wq^{-1} & \cdots & \lambda - w(1-q^{-2n+1}) \end{bmatrix}$$

由于求本征值只需要行列式,故可以对矩阵作变换,经过计算,得到

$$[\sigma_0^{(n)}(\lambda)] = (\lambda\rho - q^{-2})[\sigma_0^{(n-1)}(\lambda)] - \lambda^2\tau^2[\sigma_0^{(n-2)}(\lambda)]$$

其中

$$\tau = -\lambda^{-1}q^{-1}(q_1 - q^{-2}) - q_{2n-1} - q^{-1}(\lambda - w_{n-1})$$

$$\rho = \lambda - w_n + 2q^{-1}q_{2n-1} + q^{-2}(\lambda - w_{n-1}) - (q_1 - q^{-2})^2\lambda^{-1}$$

$$w_n = w(1 - q^{-2n+1}),\ q_n = -wq^{\frac{-2n+1}{2}},\ w = q - q^{-1}$$

易知

$$\tau^2 = q^{-2}(\lambda + q^{-1})^2(\lambda - q)^2\lambda^{-2},$$

$$\lambda\rho - q^{-2} = (1 + q^{-2})(\lambda - q)(\lambda + q^{-1})$$

代入 $[\sigma_0^{(n)}(\lambda)]$ 后,得到:

$$[\sigma_0^{(n)}(\lambda)] = (\lambda - q)^n(\lambda + q^{-1})^n(\lambda - q^{-2n}) \quad (6.2.40)$$

故有标准解的本征方程

$$S(B_n)_{标准} \equiv S^B_{标}$$

$$(S^B_{标} - q)(S^B_{标} + q)(S^B_{标} - q^{-2n}) = 0 \qquad (6.2.41)$$

B_n，C_n 与 D_n 基本表示相应的 BGR 及 YBE 的解首先是由 Jimbo 所开创的[18]。它们有三个本征值是必然的，因为由(6.2.41)式，$M = 3$，其本征值与(6.2.13)式决定的相对关系相符(需将 BGR 再标度)。

2) 解的一般形式：

上面讨论 B_n 情况，用具体矩阵形式，只是为了使形式更明显。实际上无论标准解或非标准解都可以用很紧缩的形式表出[18, 19]：

A_n：

$$S = \sum_i v_i(E_{ii} \otimes E_{ii}) + \sum_{i\neq j}(E_{ij} \otimes E_{ji})$$

$$+ w \sum_{i>j}(E_{ii} \otimes E_{jj}) \qquad (6.2.42)$$

B_n，C_n 和 D_n：(用 G 表示)

$$G = \sum_i u_i(E_{ii} \otimes E_{ii}) + \sum_{i\neq j,\, -j}(E_{ij} \otimes E_{ji})$$

$$+ \sum_i u_i^{-1}(E_{i,\,-i} \otimes E_{-i,\,i}) + w \sum_{i<j}(E_{ii} \otimes E_{jj})$$

$$- w \sum_{i<j} r(i)r(-j)(E_{-ji} \otimes E_{j-i}) \qquad (6.2.43)$$

其中

$$u_i - u_i^{-1} = v_i - v_i^{-1} = w = q - q^{-1} \quad (\text{即 } v_i = u_i \text{ 或 } -u_i^{-1}) \qquad (6.2.44)$$

$$u_{-i} = u_i \quad (\text{对 } B_n,\ u_0 = 1)$$

$$r(k)=\begin{cases}(-1)^k u_k^{1/2}\prod\limits_{j=0}^{k}u_j, & k\geqslant 0 \quad \text{对}\ B_n\\ \mathrm{i}u_{1/2}^{-1/2}u_k^{1/2}\prod\limits_{j=1/2}^{k}u_j, & k>0 \quad \text{对}\ C_n\\ u_{1/2}^{-1/2}u_k^{-1/2}\prod\limits_{j=1/2}^{k}u_j, & k>0 \quad \text{对}\ D_n\end{cases} \tag{6.2.45}$$

且 $r(k)=(r(-k))^{-1}$, $k<0$, 对 B_n, C_n 与 D_n。

由(6.2.44)式知,v_i 可自由选择为 q 或 $-q^{-1}$。当所有 v_i 与 u_i 均选择为 q 时即为标准解,而其中有一个为 $-q^{-1}$时则为非标准解,这个 $-q^{-1}$将出现在中心。对 B_n, C_n 与 D_n 情况,其本征值方程为[20]

$$(G-q)(G+q^{-1})(G-\lambda_3)=0 \tag{6.2.46}$$

其中

$$\lambda_3=\begin{cases}\prod\limits_{k\geqslant 0}u_k^{-2}, & B_n\\ -u_{1/2}^{-1}\prod\limits_{k>0}u_k^{-2}, & C_n\\ u_{1/2}\prod\limits_{k>0}u_k^{-2}, & D_n\end{cases} \tag{6.2.47}$$

由于现在对非标准解 u_k 可任意选取为 q 或 $-q^{-1}$,对 C_n, D_n, u_k 个数为偶数。当本征值一半为 q,而另一半为 $-q^{-1}$时,则 λ_3 可以蜕化为 q 或 $-q^{-1}$,亦即(6.2.46)式蜕化为两个分立本征值,这种情况在标准解中绝不可能发生的,而且与超对称也没有什么关系。这时本征值规则(6.2.12)式与(6.2.13)式中一个子空间出现重数,但这个重数并不是李代数中的重数(从李代数角度看独立本征值个数仍为 3),它反映了非标准解对应的权空间的复杂性。有关一些非标准解的具体形式可参阅文献[20]。

(4) 非基本表示的权守恒,自旋模型非标准解

上述基本表示的权守恒用一组数表示(例如对 B_n 用(6.2.38)式

时相当简单)。为了说明权分量守恒在确定其矩阵指标编号中的作用，现在举几个不是基本表示的例子，目的是了解权守恒如何具体实现。

1) $SU(5)$的 10 维表示的标准解。[21,22]此时有 10 个权$\overline{W}_k$，它们可用 5 维欧氏空间坐标给出：

$$\begin{cases} \overline{W}_1 = \frac{1}{5}(3,3,-2,-2,-2) \\ \overline{W}_2 = \frac{1}{5}(3,-2,3,-2,-2) \\ \overline{W}_3 = \frac{1}{5}(3,-2,-2,3,-2) \\ \overline{W}_4 = \frac{1}{5}(-2,3,3,-2,-2) \\ \overline{W}_5 = \frac{1}{5}(3,-2,-2,-2,3) \\ \overline{W}_6 = \frac{1}{5}(-2,3,-2,3,-2) \\ \overline{W}_7 = \frac{1}{5}(-2,-2,3,3,-2) \\ \overline{W}_8 = \frac{1}{5}(-2,3,-2,-2,3) \\ \overline{W}_9 = \frac{1}{5}(-2,-2,3,-2,3) \\ \overline{W}_{10} = \frac{1}{5}(-2,-2,-2,3,3) \end{cases} \tag{6.2.48}$$

它们有以下关系：

$$\begin{cases} W_1 + W_7 = W_2 + W_6 = W_3 + W_4 \\ W_1 + W_9 = W_4 + W_5 = W_2 + W_8 \\ W_1 + W_{10} = W_3 + W_8 = W_5 + W_6 \\ W_4 + W_{10} = W_6 + W_9 = W_7 + W_8 \\ W_3 + W_9 = W_2 + W_{10} = W_5 + W_7 \end{cases} \tag{6.2.49}$$

这时 BGR S 作为一个矩阵为 $10^2 \times 10^2$ 维。这个矩阵的标号应当用满足权守恒来标号。现在必须引入一组标号$(a, b, \cdots)$来标记 S_{ab}^{cd},使得 $a+b=c+d$。用一串数来反映(6.2.48)式所示的权守恒关系如下:

态(以权标志)	$\overline{W}_1$	$\overline{W}_2$	$\overline{W}_3$	$\overline{W}_4$	$\overline{W}_5$	$\overline{W}_6$	$\overline{W}_7$
标号(以赝旋值标志)	$\frac{11}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$

态(以权标志)	$\overline{W}_8$	$\overline{W}_9$	$\overline{W}_{10}$
标号(以赝旋值标志)	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{11}{2}$

(6.2.50)

注意,与以上讨论的基本表示不同,现在不允许有$\frac{7}{2}$与$-\frac{9}{2}$存在,它们反映了这个具体表示的权的特点。BGR 此时可分解为

$$S=\bigoplus_k A_k$$

其中 k 为(6.2.49)允许值。A_k 代表总赝旋为 k 的子空间,例如 A_{-7} 作用于$\left(-\frac{3}{2}, -\frac{11}{2}\right)$, $\left(-\frac{7}{2}, -\frac{7}{2}\right)$, $\left(-\frac{11}{2}, -\frac{3}{2}\right)$等等。在李代数中这些子矩阵以$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$表达(这里 λ_1 不是本征值,而是群论书上常用以标志维数的量,见文献[54])。现在有(按 λ_1, λ_2, λ_3 次序排列)

$$\begin{cases} A_{\pm 11},\ A_9:(1,0,0), & A_{-2}:(3,3,0) \\ A_{10},\ A_{-9},\ A_{-8}:(1,1,0), & A_{\pm 3},\ A_1:(4,3,0) \\ A_7:(2,1,0), & A_{\pm 4}:(2,3,1) \\ A,\ A_{\pm 6}:(2,2,0), & A_2,\ A_0:(3,4,1) \\ A_{\pm 5}:(3,2,0), & A_{-1}:(4,4,1) \end{cases} \tag{6.2.51a}$$

由于

$$10 \otimes 5 = 50_S + 45_A + 5_S$$

存在三个子空间。要强调的是，(6.2.48)式比(6.2.49)式更严一些。例如在指标中$\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$与$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$是允许的，但$W_4 + W_7 \neq W_5 + W_6$等等。因此考虑到(6.2.48)式后，更多一些矩阵元为零。凡是不满足权守恒的元素取为零，可以得到以下形式，注意未标出的元素为零；而 * 记号代表该元素存在，并不表示相等。

$$A_5 = \begin{array}{c} \left(\frac{11}{2}, -\frac{1}{2}\right) \\ \left(\frac{9}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right) \\ \left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right) \\ \left(-\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right) \end{array} \overset{\begin{array}{ccccc} \left(\frac{11}{2}, -\frac{1}{2}\right) & \left(\frac{9}{2}, \frac{1}{2}\right) & \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right) & \left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right) & \left(-\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right) \end{array}}{\begin{bmatrix} & & & & * \\ & & & * & \cdots \\ & & * & \cdots & \\ & * & \cdots & * & \\ * & \cdots & & & * \end{bmatrix}}$$

$$A_{-1} = \begin{bmatrix} & & & & & & & & * \\ & & & & & & & * & * \\ & & & & & & \diamond & & \\ & & & & & * & & * & * \\ & & & & \bullet & & & & \\ & & & * & & * & & * & * \\ & & \diamond & & & & \diamond & & \\ & * & & * & & * & & * & * \\ * & * & & * & & * & & * & * \end{bmatrix}$$

另外的 8 维矩阵 A_2 与 A_0 可以由 A_{-1} 去掉其中心的行与列得到。直接计算便给出：

$$S = \text{block diag}\,(A_{-11},\ A_{-10},\ \cdots,\ A_1,\ A_0,\ A_{-1},\ A_{-2},\ \cdots,\ A_{11})$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} & & & & t \\ & & & t & \\ & & 1 & 0 & \\ & t & 0 & w & \\ t & & & & w \end{pmatrix} \tag{6.2.51b}$$

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} & & & & & & & & t^2 \\ & & & & & & & t^2 & tw \\ & & & & & & t & & \\ & & & & & t^2 & & tw & -t^2w \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & t^2 & & 0 & & tw & -t^2w \\ & & t & & & & w & & \\ & t^2 & & & tw & tw & & w^2 & t^3w \\ t^2 & tw & & & -t^2w & -t^2w & & t^3w & zw^2 \end{pmatrix} \tag{6.2.52}$$

$A_0 = A_2$，$A_{\pm4}$ 为(6.2.52)中划去第 3、5、7 行与列元素，其他矩阵皆为(6.2.51)式类型。由(6.2.52)式直接计算，可得本征值，它们与(6.2.13)式相符：

$$\lambda_1 = q^{-6/5},\ \lambda_2 = -q^{4/5},\ \lambda_3 = q^{24/5}$$

在上述解中

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -t^2,\ \lambda_3 = t^6 \tag{6.2.53}$$

去掉不重要公共因子后，有 $t = q$。

从这个例子看到 BGR 的一系列对角块形式中事先可以按权守恒要求去掉若干元素，剩下的事就是代入辫子群关系进行代数运算。对标准解，从量子代数出发，可以直接计算 S，而且有不少一般表达式可以使用，它们对任意表示都是对的[22]。但对非标准解，则没有一般的表达式，有的是中心扩展，有的是 q 为单根并含有中心扩张参数，有时仍需作直接计算。从逻辑上说，应当先有 R 矩阵，再从 T 矩阵决定代数与相应物理实现，因为物理包含在 T 矩阵中。也就是说，量子代数的目的并不在于计算 R 矩阵，这就是强调直接解 R 的原因之一。

2）自旋 1 的非标准解[9, 13]。此时，S_{ab}^{cd} 中 $a, b, c, d = [-1, 0, 1]$ 相应图形为

$c \leqslant d$

$S =$ (c, d / a, b) $= u$ (a, a / a, a) $+ \tilde{w}$ (a, b / a < b) $+ p$ (b, a / $a \neq b$) $+ v'$ (c, d / $a \leqslant b$)

(6.2.54)

上面标出了 S_{ab}^{cd} 中不为零元素。对自旋为 1 的特殊情况如图 6.4 所示。

= (0, 0 / −1, 1) + (−1, 1 / 0, 0)

图 6.4

其中 u, $\tilde{w}$, p 与 v' 为待定参数。经过代入辫子关系，计算给出标准解[22, 23]（$t = q^2$）：

$$
S_{\text{标准}} = \begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & \\
 & 0 & t & & & & & & \\
 & t & 1-t^2 & & & & & & \\
 & & & 0 & 0 & t^2 & & & \\
 & & & 0 & t & t^{1/2}(1-t^2) & & & \\
 & & & t^2 & t^{1/2}(1-t^2) & (1-t)(1-t^2) & & & \\
 & & & & & & 0 & t & \\
 & & & & & & t & 1-t^2 & \\
 & & & & & & & & 1
\end{pmatrix} \tag{6.2.55}
$$

它正是 Drinfeld 给出的一般公式中自旋为 1 时的解[22]，曾由 Wadati 等加以讨论[23]。另外还有非标准解[9, 24]：

$$
S_{\text{非标准}} = \begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & \\
 & 0 & t & & & & & & \\
 & t & 1-t^2 & & & & & & \\
 & & & 0 & 0 & t^2 & & & \\
 & & & 0 & \omega t^2 & \mathrm{i}\omega t Z & & & \\
 & & & t^2 & \mathrm{i}\omega t Z & Z^2 & & & \\
 & & & & & & 0 & \omega^2 t^3 & \\
 & & & & & & \omega^2 t^2 & -t^2(1-\omega t^2) & \\
 & & & & & & & & \omega t^4
\end{pmatrix} \tag{6.2.56}
$$

其中

$$
\omega = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}
$$

$$
Z^2 = (1-t^2)(1-\omega t^2)
$$

$$
(S_{\text{非标准}} - 1)(S_{\text{非标准}} + t^2)(S_{\text{非标准}} - \omega t^4) = 0
$$

与标准解相比较，以后会看到 ω 处于单位根为 q 的地位，而 t 是允许的任意连续参数。此外，与(6.2.19)式相比，那里 $\omega^2 = 1$，现在是 $\omega^3 = 1$，这也表明，在自旋模型中，这种非标准解本质是 q 为单位

根(ω)的量子代数表示论结果[10, 11]，并不是超对称的形式(除(6.2.19)式外)，以后还会回到这个问题。在(6.2.56)式中，令 $t=1$，$S_{非标准}=\text{block diag }(S_1, S_2, S_3, S_2, S_1)$，其中 $S_1=1$，$S_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$，$S_3=\begin{bmatrix} & & 1\\ & \omega & \\1 & & \end{bmatrix}$，由于 $(S_3)^3=I$，故有 $S_{非标准}=\tilde{P}$，$(\tilde{P})^3=I$，它表明自旋为 1 的全同粒子的置换为 $\tilde{P}$，这种 YB 系统允许的奇异统计行为也是引起对非标准解讨论的物理原因之一。

本节中虽然只举出例子说明，但是从这里可以看出解 BGR 的直接方法。许多例子的计算可参见文献[25～27]。

§6.3 带颜色的解

除了谱参数 x 之外，$\check{R}(x)$ 矩阵尚可依赖于其他参数，并且这些参数不一定可加。当 $x=e^u\to\infty$ 时，相应的 BGR 关系可推广为[7, 28]：

$$S_{12}(\lambda, \mu)S_{23}(\lambda, \nu)S_{12}(\mu, \nu)=S_{23}(\mu, \nu)S_{12}(\lambda, \nu)S_{23}(\lambda, \mu) \tag{6.3.1}$$

其中 λ, μ, ν 可以代表颜色，不同空间的自旋等等，不要同谱参数相混淆。满足(6.3.1)式最简单的解是[29]

$$S_{标}(\lambda, \mu)=\begin{bmatrix}q & & & \\ & 0 & \eta X(\lambda) & \\ & \eta^{-1}X(\mu) & wg(\lambda)g(\mu)^{-1} & \\ & & & qX(\lambda)X(\mu)^{-1}\end{bmatrix} \tag{6.3.2}$$

与

$$S_{非}(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} q & & & \\ & 0 & \eta X(\lambda) & \\ & \eta^{-1}Y(\mu) & \tilde{w}(\lambda, \mu) & \\ & & & -q^{-1}X(\lambda)Y(\mu) \end{pmatrix} \tag{6.3.3}$$

其中 $X(\lambda)$，$Y(\lambda)$与 $g(\lambda)$为依赖于颜色的参数。有兴趣的是非标准解。$\tilde{w}(\lambda)$满足关系

$$\tilde{w}(\lambda, \mu)\tilde{w}(\mu, \nu) = \{q - q^{-1}X(\mu)Y(\mu)\}\overline{w}(\lambda, \nu) \tag{6.3.4}$$

引入

$$\tilde{w}(\lambda, \mu) = Y(\mu)w(\lambda, \mu)$$

$$qY(\mu)^{-1} = t_\mu, \quad q^{-1}X(\mu) = S_\mu$$

则(6.3.4)变为

$$w(\lambda, \mu)w(\mu, \nu) = (t_\mu - S_\mu)w(\lambda, \nu) \tag{6.3.5}$$

将 $S_{非}(\lambda, \mu)$乘以 Y^{-1}因子，则改变为

$$S_{非}(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} t_\mu & & & \\ & 0 & \eta S_\mu t_\mu & \\ & \eta^{-1} & w(\lambda, \mu) & \\ & & & -S_\mu \end{pmatrix} \tag{6.3.6}$$

这就是带颜色的自旋 1/2 的 BGR 非标准解，其中 $w(\lambda, \mu)$满足(6.3.5)式。与§6.2类似，这种解可以推广为 A_n，B_n，C_n 与 D_n 基本表示相应的带颜色的非标准解，参见文献[29]。

(6.3.5)式允许一个特殊解：

$$w(\lambda, \mu) = t_\lambda^{-1}t_\mu(t_\mu - S_\mu) \tag{6.3.7}$$

此时如果$\lambda=$颜色1，$\mu=$颜色2，则(6.3.6)式的特殊解当$\eta=1$时为：

$$S(c_1, c_2)=\begin{pmatrix} t_1 & & & \\ & 0 & t_1 S_2 & \\ & 1 & t_1 t_2^{-1}(t_1-S_1) & \\ & & & -S_2 \end{pmatrix} \qquad (6.3.8)$$

它曾由文献[28]给出。值得一提的是，这种类型的解引起一种新类型的拓扑不变多项式，由于涉及篇幅太长，本书不拟讨论，可参阅文献[30, 31]。当$t_1=t_2=q$，$S_1=S_2=q^{-1}$，即没有颜色区别时($c_1=c_2$)，(6.3.8)式回到(6.2.19)式。这种"染色"方案可以推广，例如将B_n，D_n，C_n的基本表示相应的BGR染色，则有

$$\begin{aligned} S(\lambda, \mu)_{cd}^{ab} &= u_a(\lambda, \mu)\big|_{a=b=c=d}+p^{(a+b)}(\lambda, \mu)\delta_{ad}\delta_{bc}\big|_{a\neq b} \\ &\quad +w^{(a, b)}(\lambda, \mu)\delta_{ac}\delta_{bd}\big|_{a<b} \\ &\quad +q^{(a, c)}(\lambda, \mu)\delta_{a, -b}\delta_{c, -d}\Big|_{\substack{a\neq\pm c \\ |a|<|c|,\ c<0 \\ |c|<|a|,\ c>0}} \end{aligned} \qquad (6.3.9)$$

其中a，b，c，d编号仍为

$$\left[-\left(\frac{N-1}{2}\right), -\left(\frac{N-1}{2}\right)+1, \cdots, \frac{N-1}{2}\right]$$

对B_n：$N=2n+1$，对C_n与D_n：$N=2n$。将上式代入(6.3.1)式，经过计算可以得到诸参数$u_a(\lambda, \mu)$，$p^{(a, b)}(\lambda, \mu)$，$w^{(a, b)}(\lambda, \mu)$与$q^{(a, c)}(\lambda, \mu)$所满足的各种代数关系。由于关系甚多，不再赘述，可参见文献[30]。为了便于具体了解这些解的特点，可举一个与D_2(即$SO(4)$)基本表示相联系的染色BGR的例子。在经典李代数中$SO(4)\sim SU(2)\otimes SU(2)$。在$q$变形后，是否存在使相应的BGR不再能分解为两个低维的BGR的直积这种非平凡解呢？答案是肯定的。现沿用文献[31]的方法讨论这一问题。由文献[26]相应

的无色 BGR 为

$$S_{D_2} = \text{block diag}\,(A_1, A_2, A_3, A_4, A_3, A_2, A_1)$$
$$(w = q - q^{-1})$$

其中

$$A_1 = q,\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & w \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -q^{-1} & 0 \\ 1 & 0 & w \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} & & & q^{-1} \\ & & -q & -\mathrm{i}w \\ & -q & 0 & -\mathrm{i}w \\ q^{-1} & -\mathrm{i}w & -\mathrm{i}w & zw \end{pmatrix} \qquad (6.3.10)$$

相应地，可计算它的染色解[31]

$$S_{D_2}(\lambda, \mu) = \text{block diag}\,(A_1^c, A_2^c, A_3^c, A_4^c, A_3^{c'}, A_2^{c'}, A_1^{c'}) \qquad (6.3.11)$$

其中 $A_1^c = q,\ A_1^{c'} = qX_+(\lambda)X_-(\lambda)Y_+(\mu)Y_-(\mu)$

$$A_2^c = \begin{pmatrix} 0 & X_+(\lambda) \\ Y_-(\mu) & A_+(\lambda)B_+(\mu) \end{pmatrix}$$

$$A_2^{c'} = \begin{pmatrix} 0 & X_+(\lambda)Y_-(\lambda)Y_-(\mu) \\ X_-(\lambda)Y_+(\mu)Y_-(\mu) & A'_-(\lambda)B'_-(\mu) \end{pmatrix}$$

$$A_3^c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & X_-(\mu) \\ 0 & -q^{-1}X_+(\lambda)Y_+(\mu) & 0 \\ Y_-(\mu) & 0 & A_-(\lambda)B_-(\mu) \end{pmatrix}$$

$$A_3^{c'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & X_+(\lambda)X_-(\lambda)Y_+(\mu) \\ 0 & -qX_-(\lambda)Y_-(\mu) & 0 \\ X_-(\lambda)Y_+(\mu)Y_-(\mu) & 0 & A'_+(\lambda)B'_+(\mu) \end{pmatrix}$$

$$A_4^c = \begin{pmatrix} & & & q^{-1}X_-(\lambda)X_-(\mu) \\ & & -qX_-(\lambda)Y_+(\mu) & \mathrm{i}X_-(\lambda)Y_-^{-1}(\mu)A_+(\lambda)B'_-(\mu) \\ & -qX_+(\lambda)Y_-(\mu) & 0 & \mathrm{i}X_-(\lambda)Y_+^{-1}(\mu)A_-(\lambda)B'_-(\mu) \\ q^{-1}Y_+(\mu)Y_-(\mu) & L & M & w^{(-3/2,\,3/2)}(\lambda,\,\mu) \end{pmatrix}$$

其中

$$L = \mathrm{i}Y_+(\mu)X_+(\lambda)^{-1}A'_-(\lambda)B_+(\mu)$$

$$M = \mathrm{i}X_+(\lambda)^{-1}Y_+(\mu)A'_+(\lambda)B_-(\mu)$$

$$\begin{aligned} w^{(-3/2,\,3/2)}(\lambda,\,\mu) = {} & X_-(\mu)A'_-(\mu)^{-1}B_-(\mu) \\ & \cdot \{X_+(\lambda)^{-1}X_+(\mu)Y_+(\mu)A'_+(\lambda)A_+(\lambda) \\ & + X_-(\lambda)^{-1}A'_-(\lambda)A_-(\lambda)\} \end{aligned}$$

并在以下条件之一，上述 $S_{D_2}(\lambda,\,\mu)$ 满足染色的(6.3.1)式：

a) $X_a = Y_a^{-1}$，$A_a(\lambda)B_a(\lambda) = A'_a(\lambda)B'_a(\lambda) = w = q - q^{-1}$，$a = \pm$。

b) $q^4 = 1$，$a = \pm$

$$X_+(\lambda)Y_+(\lambda) = X_-(\lambda)Y_-(\lambda) = 1$$

$$A'_a(\lambda)B'_a(\lambda) = X_+(\lambda)Y_+(\lambda)\{qX_+(\lambda)Y_+(\lambda) - q^{-1}\}$$

$$A_a(\lambda)B_a(\lambda) = \{q - q^{-1}X_+(\lambda)Y_-(\lambda)\}$$

显然，情况 a)是(6.3.10)式的染色推广，因为当取 $\lambda = \mu$ 且 $X = Y = 1$，$A'_\pm = -A_\mp$，$B'_\pm = -B_\mp$ 时(6.3.11)式回到(6.3.10)式。情况 b)有特别的兴趣，因为欲满足染色的辫子关系，却限制了参数 $q^4 = 1$，即为单位根。这种颜色与参数 q 间的限制关系，以前是没有遇到的。在 $SU(2)$例子中(自旋 1/2)，颜色自由度与 q 是各自独立的，但在 D_2 的非平凡 BGR 中出现了 b)。这个例子告诉我们如果求解染色的辫子关系，而像刚才这例子是难以用通常量子代数得到的。

§ 6.4　不同自旋空间的 BGR

在上节中将 λ，μ 理解为颜色自由度，但(6.3.1)式中参数 λ，μ 可以作各种理解，例如理解为相应自旋空间中不同的权，这时 $\lambda = j_1$，$\mu = j_2$，j_1 与 j_2 分别为 $SU(2)$的权，(6.2.7)式写为：

$$S_{12}^{j_1 j_2} S_{23}^{j_1 j_3} S_{12}^{j_2 j_3} = S_{23}^{j_2 j_3} S_{12}^{j_1 j_3} S_{23}^{j_1 j_2} \tag{6.4.1}$$

现在考虑其中一个权为(即自旋)j，而另外两个空间自旋为 1/2，则(6.4.1)式可简化为以下三组辫子关系：

$$\begin{cases} S_{12}^{j\frac{1}{2}} S_{23}^{j\frac{1}{2}} S_{12}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = S_{23}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} S_{12}^{j\frac{1}{2}} S_{23}^{j\frac{1}{2}} \\ S_{12}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} S_{23}^{\frac{1}{2}j} S_{12}^{\frac{1}{2}j} = S_{23}^{\frac{1}{2}j} S_{12}^{\frac{1}{2}j} S_{23}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \\ S_{12}^{\frac{1}{2}j} S_{23}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} S_{12}^{j\frac{1}{2}} = S_{23}^{j\frac{1}{2}} S_{12}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} S_{23}^{\frac{1}{2}j} \end{cases} \tag{6.4.2}$$

其中

$$S^{j_1 j_2} = \lim_{x \to \infty} \check{R}^{j_1 j_2}(x)$$

假定 CP 不变性成立，即

$$\left(S^{j\frac{1}{2}}\right)^{a(j)b(1/2)}_{c(1/2)d(j)} = \left(S^{\frac{1}{2}j}\right)^{-b(1/2)-a(j)}_{-d(j)-c(1/2)} \tag{6.4.3}$$

上面 $a(j)$是权为 j 指标 a，而 $b\left(\frac{1}{2}\right) = \pm$，对应 $j = 1/2$ 的不同取向，易证(6.4.2)式中只有两个是独立的：

$$\begin{gathered} S_{12}^{j\frac{1}{2}} S_{23}^{j\frac{1}{2}} S_{12}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = S_{23}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} S_{12}^{j\frac{1}{2}} S_{23}^{j\frac{1}{2}} \\ S_{12}^{\frac{1}{2}j} S_{23}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} S_{12}^{j\frac{1}{2}} = S_{23}^{j\frac{1}{2}} S_{12}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} S_{23}^{\frac{1}{2}j} \end{gathered} \tag{6.4.4}$$

它们的物理意义非常明显：代表两种自旋格点或相应 YBE，如图 6.5 与图 6.6 所示。

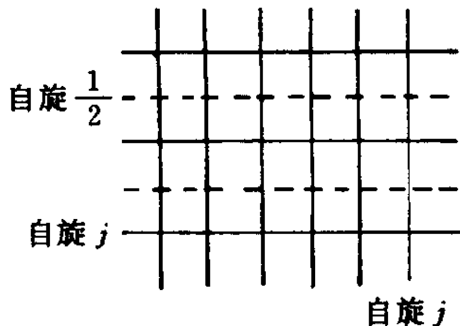


图 6.5

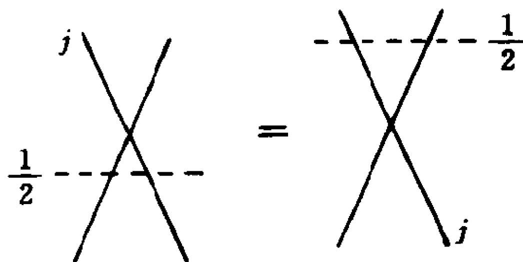


图 6.6

相应的 YBE 为：

$$\begin{cases} \check{R}^{j\frac{1}{2}}_{12}(x)\ \check{R}^{j\frac{1}{2}}_{23}(xy)\ \check{R}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{12}(y) = \check{R}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{23}(y)\ \check{R}^{j\frac{1}{2}}_{12}(xy)\ \check{R}^{j\frac{1}{2}}_{23}(x) \\ \check{R}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{12}(x)\ \check{R}^{\frac{1}{2}j}_{23}(xy)\ \check{R}^{\frac{1}{2}j}_{12}(y) = \check{R}^{\frac{1}{2}j}_{23}(y)\ \check{R}^{\frac{1}{2}j}_{12}(xy)\ \check{R}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{23}(x) \\ \check{R}^{\frac{1}{2}j}_{12}(x)\ \check{R}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{23}(xy)\ \check{R}^{j\frac{1}{2}}_{12}(y) = \check{R}^{j\frac{1}{2}}_{23}(y)\ \check{R}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{12}(xy)\ \check{R}^{\frac{1}{2}j}_{23}(x) \end{cases} \tag{6.4.5}$$

首先解 $S^{j\frac{1}{2}}$，注意 $S^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ 早已有标准解(6.2.17)式，权守恒为

$$a(j) + b\left(\frac{1}{2}\right) = c\left(\frac{1}{2}\right) + d(j) \tag{6.4.6}$$

相应地 $S^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ 与 $S^{j\frac{1}{2}}$ 有以下形式：

$$\begin{cases} \left(S^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\right)^{a(\frac{1}{2})b(\frac{1}{2})}_{c(\frac{1}{2})d(\frac{1}{2})} = q\,|_{a=b=c=d} + \delta^a_d\delta^b_c\,|_{a\neq b} + w\delta^a_c\delta^b_d\,|_{a<b} \\ \left(S^{j\frac{1}{2}}\right)^{a(j)b(\frac{1}{2})}_{c(\frac{1}{2})d(j)} = p^{(a(j),\,b(\frac{1}{2}))}\delta^{a(j)}_{d(j)}\delta^{b(\frac{1}{2})}_{c(\frac{1}{2})} \\ \qquad + q^{(a(j),\,b(\frac{1}{2}))}\delta^{a(j)}_{d(j)-2b(1/2)}\delta^{b(\frac{1}{2})}_{-c(\frac{1}{2})} \end{cases} \tag{6.4.7}$$

其中 $w = q - q^{-1}$，而其他参数将由(6.4.4)式决定。计算表明，(6.4.4)式用(6.4.7)式只允许 $S^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ 的标准解，将(6.4.7)、(6.2.17)式代入(6.4.4)式得到[32]

$$\begin{cases} q^{(a(j),\,-1/2)} = 0 \quad p^{(a(j),\,1/2)} = qp^{(a(j)-1,\,1/2)} \\ \quad p^{(a(j),\,-1/2)} = q^{-1}p^{(a(j)-1,\,-1/2)} \\ q^{(-a(j),\,1/2)}q^{(a(j)-1,\,1/2)}\Big|_{a(j)>-j} - q^{(a(j),\,1/2)}q^{(-a(j)-1,\,1/2)}\Big|_{a(j)<j} \\ \quad = q^{-1}w\left(p^{(a(j),\,1/2)}p^{(-a(j),\,-1/2)} - p^{(-a(j),\,1/2)}p^{(a(j),\,-1/2)}\right) \end{cases} \tag{6.4.8}$$

不失一般性，可取

$$p^{(j,\,1/2)} = q, \quad p^{(-j,\,-1/2)} = Q$$

其中 q 与 Q 为任意参数，遂得到一般解：

$$\begin{cases} p^{(a(j),\,\frac{1}{2})} = q^{a(j)+1+j} \quad p^{(a(j),\,-\frac{1}{2})} = q^{-a(j)-j}Q \quad q^{(a(j),\,-\frac{1}{2})} = 0 \\ q^{(-a(j)-1,\,\frac{1}{2})}q^{(a(j),\,\frac{1}{2})} = q^{-2j}Qw^2[j-a(j)]_q[j+a(j)+1]_q \\ \qquad\qquad (a(j) \neq j) \\ w = q - q^{-1} \end{cases} \tag{6.4.9}$$

其中

$$[n]_q = (q^n - q^{-n})/(q - q^{-1})$$

上式中 $q^{(-a(j)-1,\,\frac{1}{2})}$ 可由 $q^{(a(j),\,\frac{1}{2})}$ 决定。因此一般情况下当 $j=1, 2, \cdots$ 时将有 $(j+2)$ 个自由参数，当 $j=\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \cdots$ 时将有 $(j+3/2)$ 个自由参数。当取

$$Q = q, \quad q^{(-a(j)-1,\frac{1}{2})} = q^{(a(j),\frac{1}{2})}$$

时，(6.4.9)式化为标准解：

$$\begin{cases} q^{(a(j),-\frac{1}{2})} = 0, \quad p^{(a(j),\frac{1}{2})} = q^{a(j)+1-j} \\ p^{(a(j),-\frac{1}{2})} = q^{-a(j)+1-j} \\ q^{(a(j),\frac{1}{2})} = q^{-j+\frac{1}{2}} w\{[j-a(j)]_q [j+a(j)+1]_q\}^{\frac{1}{2}} \end{cases} \tag{6.4.10}$$

它与 Kirillov 等的结果是一致的[33]，实际差一个公共因子 q^{-j+1}。(6.4.10)式可化为 Drinfeld 给出的标准结果

$$\left(R^{\frac{1}{2}j}\right)^{m_1' m_2'}_{m_1 m_2} = \delta^{m_1'+m_2'}_{m_1+m_2} \frac{(1-q)^{m_1'-m_1}}{[m_1'-m_1]_q!} q^{m_1 m_2' + m_2 m_1'} \cdot \left(\frac{\left[\frac{1}{2}+m_1'\right]_q! \left[\frac{1}{2}-m_1\right]_q! [j-m_2']_q! [j+m_2]_q!}{\left[\frac{1}{2}-m_1'\right]_q! \left[\frac{1}{2}+m_1\right]_q! [j+m_2']_q! [j-m_2]q!} \right)^{1/2} \tag{6.4.11}$$

其中 $m = a(j)$。当 $j = 1$ 时标准解 $S_1^{1\frac{1}{2}}$ 为：

$$S_1^{1\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} q & & & & & \\ & 0 & q^{-2}Q & & & \\ & 1 & q_1 & & & \\ & & & 0 & q^{-1}Q & \\ & & & q^{-1} & q_2 & \\ & & & & & Q \end{pmatrix} \tag{6.4.12}$$

其中 $q_1 q_2 = Q(q-q^{-1})(1-q^{-4})$。而同时尚存在非标准解

$$S_{\mathrm{I}}^{1\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} q & & & & & \\ & 0 & \tilde{Q} & & & \\ & 1 & \tilde{q}_1 & & & \\ & & & \tilde{q}_2 & q\tilde{Q} & \\ & & & q & 0 & \\ & & & & & \tilde{Q} \end{bmatrix} \tag{6.4.13}$$

其中
$$\tilde{q}_2 = -q\,\tilde{q}_1 \tag{6.4.14}$$
Q 与$\tilde{Q}$均为任意参数。注意 $j=1$ 时(6.4.13)式有 4 个分立本征值，而标准解只有三个。可验证(6.4.12)式是(6.5.11)式 $j=1$ 的情况，而非标准解则属另外解系并且不能由聚合(Fusion)方法得到。

§6.5 Z_N 对 称 解

上面所有的 BGR 都满足权守恒，即 S_{ab}^{cd}中必有 $a+b=c+d$，不满足这个条件的元素为零。这个条件可以放宽，最容易想到的是

$$S_{ab}^{cd} = 0 \quad 除非\ a+b=c+d+N \tag{6.5.1}$$

$$S_{a+N\,b+N}^{c+N\,d+N} = S_{ab}^{cd} \tag{6.5.2}$$

但 $S_{ab}^{cd} = S_{cd}^{ab}$ 仍成立，有时为了简化模型还要加上条件 $S_{a\,b+N}^{c\,d-N} = S_{ab}^{cd}$ 等，这种模型组成 Z_N 模型。

(1) Z_2 对称的 BGR

这时无谱参数的 BGR 表为

$$S_{Z_2} = \begin{array}{c} \\ 00 \\ 01 \\ 10 \\ 11 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 00 & 01 & 10 & 11 \end{array} \\ \begin{pmatrix} w_1 & & & w_8 \\ & w_5 & w_3 & \\ & w_3 & w_5 & \\ w_8 & & & w_1 \end{pmatrix} \end{array} \tag{6.5.3}$$

将(6.5.3)式代入(6.2.7)式，得到[27]

$$S_{Z_2}=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\begin{pmatrix}1 & & & t\\ & wt & 1 & \\ & 1 & wt & \\ t & & & 1\end{pmatrix}\quad (w^2=1)\qquad (6.5.4)$$

其中 t 为任意参数，S_{Z_2}的逆矩阵为上式中 $t\to -t$。矩阵前因子是为了与逆矩阵对称。(6.5.4)式看起来与洛伦兹变换非常相像。

(2) Z_3 对称的 BGR[34]

$$S_{Z_3}=\begin{array}{c}\\ 00\\ 01\\ 10\\ 02\\ 11\\ 20\\ 12\\ 21\\ 22\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccccc}00 & 01 & 10 & 02 & 11 & 20 & 12 & 21 & 22\end{array}\\ \begin{bmatrix}w_0 & & & & & & w_1 & w_2 & \\ & w_2 & w_0 & & & & & & w_1\\ & w_0 & w_1 & & & & & & w_2\\ & & & w_1 & w_2 & w_0 & & & \\ & & & w_2 & w_0 & w_1 & & & \\ & & & w_0 & w_1 & w_2 & & & \\ w_1 & & & & & & w_2 & w_0 & \\ w_2 & & & & & & w_0 & w_1 & \\ & w_1 & w_2 & & & & & & w_0\end{bmatrix}\end{array}$$

(6.5.5)

其中 $w_i(i=0, 1, 2)$ 为任意参数，其本征值方程为：

$$\left[\lambda^3-\lambda^2\sum_{i=0}^{2}w_i+\lambda\left(\sum_{j>i=0}^{2}w_iw_j-\sum_{i=0}^{2}w_i^2\right)+\sum_{i=0}^{2}w_i^3-3\prod_{i=0}^{2}w_i\right]^3=0$$

(6.5.6)

(3) Z_4 对称

$$
S_{Z_4}=\begin{pmatrix}
w_0 & & & & & & & & & & w_1 & w_2 & w_3 & & & \\
 & w_3 & w_0 & & & & & & & & & & & w_1 & w_2 & \\
 & w_0 & w_1 & & & & & & & & & & & w_2 & w_3 & \\
 & & & w_2 & w_3 & w_0 & & & & & & & & & & w_1 \\
 & & & w_3 & w_0 & w_1 & & & & & & & & & & w_2 \\
 & & & w_0 & w_1 & w_2 & & & & & & & & & & w_3 \\
 & & & & & & w_1 & w_2 & w_3 & w_0 & & & & & & \\
 & & & & & & w_2 & w_3 & w_0 & w_1 & & & & & & \\
 & & & & & & w_3 & w_0 & w_1 & w_2 & & & & & & \\
 & & & & & & w_0 & w_1 & w_2 & w_3 & & & & & & \\
w_1 & & & & & & & & & & w_2 & w_3 & w_0 & & & \\
w_2 & & & & & & & & & & w_3 & w_0 & w_1 & & & \\
w_3 & & & & & & & & & & w_0 & w_1 & w_2 & & & \\
 & w_1 & w_2 & & & & & & & & & & & w_3 & w_0 & \\
 & w_2 & w_3 & & & & & & & & & & & w_0 & w_1 & \\
 & & & w_1 & w_2 & w_3 & & & & & & & & & & w_0
\end{pmatrix} \tag{6.5.7}
$$

其中 $w_i(i=0,1,2,3)$ 为独立参数。

(4) Z_5 对称性

$$
S_{Z_5}=\begin{pmatrix}
A_1 & & & & & B_1 & & & \\
 & A_2 & & & & & B_2 & & \\
 & & A_3 & & & & & B_3 & \\
 & & & A_4 & & & & & B_4 \\
 & & & & A_5 & & & & \\
B_4 & & & & & A_4 & & & \\
 & B_3 & & & & & A_3 & & \\
 & & B_2 & & & & & A_2 & \\
 & & & B_1 & & & & & A_1
\end{pmatrix} \tag{6.5.8}
$$

其中
$$
A_1=w_0,\ B_1=(w_1\ w_2\ w_3\ w_4)
$$

$$
A_2=\begin{pmatrix} w_4 & w_0 \\ w_0 & w_1 \end{pmatrix},\quad B_2=\begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ w_2 & w_3 & w_4 \end{pmatrix}。
$$

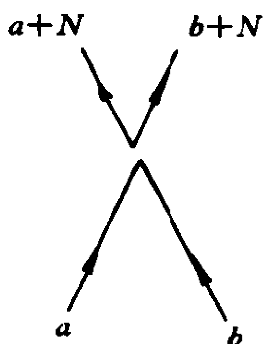


图 6.7

其实 Z_N 对称的 S_{Z_N} 不难写出来，并证明它满足 BGR，限于篇幅，不再赘述，可参阅文献[34]。

这种 Z_N 模型中，由于权不守恒，在图示时除了有散射图、湮没图之外，它还包含不连通的图，如图 6.7 所示。

在拓扑多项式理论中，它只能包括在推广的 Kauffman 图形中，不能用通常的办法处理。讨论权之和不守恒的拓扑不变多项式仍是新课题。

以上简要地介绍了一些 BGR 的直接解法。我们已经看到求解总是和一定对称性质相联系的，这不仅仅是为了求解方便，而是从物理需要出发。因为求 BGR 甚至求解 YBE 并不是最终目的，真正的物理后果常常体现在 RTT 关系之中，而 T 矩阵所引起的物理图象中常常具有一定对称性质。从这个意义上讲，只有具有某种对称性质的解才是我们所关心的。现代的计算数学可以直接找低维数的 BGR 解，作为数学计算在物理学中应用这是件有兴趣的事。但作为将来构造物理模型来说，应当把对称性限制加进去才会有更大的兴趣。

§6.6 三角型 YB 化

设想已经给出 BGR 表达式，它们是当 $x = e^u \to \infty$ 时的 YBE 解的渐近行为。现在对给定 BGR，要寻找 YBE 的解。首先分析一下已知的 BGR 的一些性质与特点。它们可以从两方面分类：从代数结构角度或从作为矩阵自身来讨论。如果从李代数结构变形角度来分析，分为 q 是单位根 $(q^p = 1)$ 或不是单位根，再加上以后要介绍的量子偶(quantum double)性质。因为它限制了 BGR 中除谱参数外尚可允许的独立参数的个数(包括中心扩张)。当 q 为单位

根时，(6.2.9)式右端子空间的个数可以小于M，典型情况时，两个自旋1/2直积分解后的子空间甚至可能只有一个（见Witten[35]）。

从矩阵角度看，BGR自身是个矩阵，非异矩阵有其自身分立的本征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$：

$$\prod_{\nu=1}^{m}(S-\lambda_\nu)=0 \tag{6.6.1}$$

不同的m对应不同类型。早已知道，由A_n代数基本表示生成的BGR有$m=2$，而由B_n，C_n，D_n基本表示生成的BGR有$m=3$，对G_2代数$m=4$，等等。从以上两个角度出发，便产生了两种互相联系而又互为补充的从BGR得到YBE解的方案。最简单的由BGR产生YBE的办法就是把谱参数的依赖关系放在(6.2.12)式的本征值身上，而保持投影算符P_α不变，亦即如果S满足(6.2.12)式则设

$$\check{R}(x)=\sum_{\alpha=1}^{M}\rho_\alpha(x)P_\alpha \tag{6.6.2}$$

其中P_α仍为q有关的投影算符，$\rho_\alpha(x)$为x有关的本征值，当$x=\infty$时它回到λ_α：

$$\rho_\alpha(x=\infty)=\lambda_\alpha,\ \check{R}\ (x=\infty)=S\ (\text{或}\ S^{-1}) \tag{6.6.3}$$

(1) Jimbo圈代数方案[2, 18]

如果用$\pi(\cdots)$表示括号内算符的表示，$X^{\pm}$，K为某量子代数的生成元（为简单省略去反映素根性质的下标），用θ表示其最大根，则由Jimbo理论可以用变形圈代数方法决定$\check{R}(x)$。

令P_α为投影矩阵，$A=\pi(K_\theta)\otimes\pi(X_\theta^+)$，$B=\pi(X_\theta^+)\otimes\pi(K_\theta^{-1})$，$K_\theta$，$X_\theta^+$与$X_\theta^-$分别为对应最大根$\theta$的量子代数生成元，$\pi(\cdots)$为表示，$\lambda_\alpha$为相应BGR本征值，则由于$\check{R}(x)$满足YBE，它必为代数中心，由文献[36，22]可知，

$$\sum_{\alpha=1}^{M}\rho_\alpha(x)P_\alpha(xA+B)=\sum_{\alpha=1}^{M}\rho_\alpha(x)(A+xB)\rho_\alpha \quad (6.6.4)$$

由于 $\rho_\alpha(x=\infty)=\lambda_\alpha$，$P_\alpha$ 为投影算符，在(6.6.4)式取 $x\to\infty$ 有

$$P_\alpha AP=\left(\frac{\lambda_\beta}{\lambda_\alpha}\right)P_\alpha BP_\beta$$

因而成立

$$P_{\alpha-1}BP_\alpha=\left(\frac{\lambda_{\alpha-1}}{\lambda_\alpha}\right)P_{\alpha-1}AP_\alpha \quad (6.6.5)$$

但用 BGR 投影算符可用 S 表达：

$$P_\alpha=\prod_{\nu\neq\alpha}^{M}\frac{(S-\lambda_\nu)}{(\lambda_\alpha-\lambda_\nu)} \quad (6.6.6)$$

可以验证 P_α 满足(6.2.14)式，利用(6.6.5)、(6.6.6)式及(6.6.1)式可以证明

$$P_\alpha BP_{\alpha+1}=\left(\frac{\lambda_\alpha}{\lambda_{\alpha+1}}\right)P_\alpha AP_{\alpha+1} \quad (6.6.7)$$

$$P_\alpha BP_\alpha=P_\alpha AP_\alpha$$

上式相重指标不求和。将(6.6.4)式展开并利用(6.6.7)式推导得

$$\rho_{\alpha+1}(x)\left(1+x\frac{\lambda_{\alpha+1}}{\lambda_\alpha}\right)(P_{\alpha+1}AP_\alpha)=\rho_\alpha(x)\left(x+\frac{\lambda_{\alpha+1}}{\lambda_\alpha}\right)(P_{\alpha+1}AP_\alpha) \quad (6.6.8)$$

当

$$P_{\alpha+1}AP_\alpha\neq 0 \quad (6.6.9)$$

则得到

$$\frac{\rho_{\alpha+1}(x)}{\rho_\alpha(x)}=\frac{x+\left(\frac{\lambda_{\alpha+1}}{\lambda_\alpha}\right)}{1+x\left(\frac{\lambda_{\alpha+1}}{\lambda_\alpha}\right)}\quad(\alpha=1,\cdots,M) \quad (6.6.10)$$

故从已知的 BGR 的本征值 λ_α，可推出 $\rho_\alpha(x)$，即

$$\rho_{\alpha+1}(x) = \prod_{\beta=1}^{\alpha} \left(\frac{x + \frac{\lambda_{\beta-1}}{\lambda_\beta}}{1 + x\frac{\lambda_{\beta+1}}{\lambda_\beta}} \right) \rho_1(x) \tag{6.6.11}$$

这样生成的$\check{R}(x)$具有很好的性质：

$$[\check{R}(x)]^{-1} = \check{R}(x^{-1}) \tag{6.6.12}$$

$$\check{R}(x \to \infty) = S,\ \check{R}(x = 1) = I \tag{6.6.13}$$

从以上讨论可见，Jimbo 方案是个很宽的处理办法：只要有量子代数结构并保持(6.2.12)式李代数的变形结构就可以，对标准解它有一般的性质。但这里要注意两点：首先必须(6.6.9)式不为零，其次它不适于 q 为单位根的情况和某些非标准解。在实际计算中，如何确定本征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_M$ 的顺序是个重要的问题。在 $SU(2)$中按权的高低去排列是对的，在两个本征值情况也没有问题，在 B_n，C_n，D_n 所讨论的情况，第三个本征值是特殊的。但一般情况并不简单，例如对 G_2，就不能按权大小次序排列。确定诸根顺序的原则是计算(6.6.9)式左端是否为零。如果为零，这种顺序是不可取的，因为这时(6.6.8)式没有意义。在 G_2 的例子中，排列顺序仅为

$$\lambda_1 = -q^{-3},\quad \lambda_2 = q,\quad \lambda_3 = -1,\quad \lambda_4 = q^{-6}$$

将其他顺序代入(6.6.9)式发现 $P_{\alpha+1}AP_\alpha = 0$。如果一般情况下有数种排列使(6.6.9)式右端不为零，则同一个 BGR S 会产生两个不同的 YBE 的解。计算(6.6.9)式左端是很大的工作量，对 G_2 的讨论见文献[37，38]。

(2) 广义 Hecke 代数的 YB 化方案

可否保持(6.6.2)式与(6.6.10)式又不需要 BGR 与李代数有过于密切的联系呢？这就需要从 BGR 自身的矩阵形式出发，即从(6.6.1)式的本征值特性出发，所付出的代价是依赖于具体表示。这时本征值(分立)的个数就是 BGR 的类别，而不必顾及 BGR

与李代数的联系，也不必管 q 是否为单位根。这种从 BGR 按本征值个数直接生成 $\check{R}(x)$ 的方案称为 YB 化，最早是由 Jones 提出的[38]，以后有了比较大的发展[39, 40]。这种方案的优点很多，缺点是当独立本征值个数比较多时，计算很繁。为了介绍 YB 化的基本特点，从两个本征值的情况开始。

设 BGR S 具有两个独立本征值 λ_1 与 λ_2，则

$$S = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = \lambda_1 \left\{ I + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1 \right) P_2 \right\}$$

因为 $P_1 + P_2 = I$，由于公共因子不起作用，仍可记为

$$S = 1 + \xi U, \quad \xi = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1, \quad U = P_2 \tag{6.6.14}$$

将(6.6.14)式代入辫子群关系：

$$b_i b_{i+1} b_i = b_{i+1} b_i b_{i+1} \tag{6.6.15}$$

其中

$$b_i = I \otimes I \otimes \cdots \otimes \underset{i-1}{I} \otimes \underset{i,\, i+1}{S} \otimes \underset{i+2}{I} \otimes \cdots \otimes I \tag{6.6.16}$$

$$b_i b_j = b_j b_i, \text{ 当 } |i - j| \geqslant 2 \tag{6.6.17}$$

则得到

$$\begin{cases} (1 + \xi)(U_i - U_{i+1}) + \xi^2 (U_i U_{i+1} U_i - U_{i+1} U_i U_{i+1}) = 0 \\ U_i^2 = U_i, \quad U_{i+1}^2 = U_{i+1} \end{cases} \tag{6.6.18}$$

其中

$$U_i = I \otimes I \otimes \cdots \otimes \underset{i-1}{I} \otimes \underset{i,\, i+1}{U} \otimes \underset{i+1}{I} \otimes \cdots \otimes I \tag{6.6.19}$$

(6.6.18)式的一个充分解为

$$U_i^2 = U_i, \quad U_i U_{i+1} U_i = \lambda U_i \tag{6.6.20}$$

其中 $\lambda = -\xi^2/(1+\xi)$。满足这种关系的集合称为 Templer-Lieb 代数，(6.6.18)式称为 Hecke 代数。(6.6.20)式的图解如图 6.8 所示[15]。

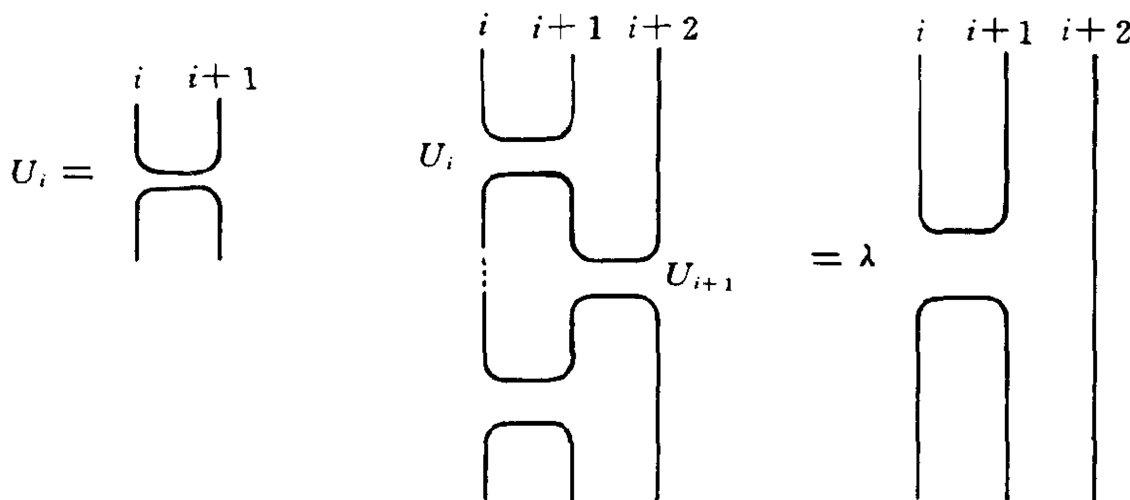


图 6.8

为了将(6.6.18)式 YB 化，将$\check{R}(x)$写为：

$$\check{R}(x) = F(x)(I + G(x)U) \tag{6.6.21}$$

即不改变投影算符 $U = P_2$，只把本征值 $\xi \to G(x)$，要求(6.2.21)式满足 YBE：

$$\check{R}_i(x)\,\check{R}_{i+1}(xy)\,\check{R}_i(y) = \check{R}_{i+1}(y)\,\check{R}_i(xy)\,\check{R}_{i+1}(x) \tag{6.6.22}$$

其中

$$\check{R}_i(x) = I \otimes \cdots \otimes \underset{i-1}{I} \otimes \underset{i,\,i+1}{\check{R}(x)} \otimes \underset{i+2}{I} \otimes \cdots \otimes I \tag{6.6.23}$$

满足条件 $(x = \mathrm{e}^{-u})$：

$$\check{R}(x=1) = I,\ \check{R}(x \to 0) = S,\ F(0) = \lambda_1,\ G(0) = \xi \tag{6.6.24}$$

注意为方便，应用了 $x=\mathrm{e}^{-u}$，所以 $u\to\infty$时 $x\to0$，这种代换与以前不同，这样便于同多数文献相比较。如何决定 $G(x)$？将(6.6.22)式代入(6.6.23)式并应用(6.6.18)式，便得到 $G(x)$应满足的方程为

$$\begin{aligned}&\xi^2[G(x)+G(y)+G(x)G(y)-G(xy)]\\&\quad=(1+\xi)G(x)G(y)G(xy)\end{aligned}\tag{6.6.25}$$

为了解函数方程(6.6.25)，首先令 $x=1$，可得

$$\xi^2G(1)[1+G(y)]=(1+\xi)G(1)G(y)^2\tag{6.6.26}$$

它对任意谱参数 y 都成立，必有

$$G(1)=0$$

对(6.6.26)式取 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$，再令 $x=1$，得到

$$\xi^2\{\alpha[1+G(y)]-yG'(y)\}=(1+\xi)\alpha[G(y)]^2\tag{6.6.27}$$

$$\alpha=G'\Big|_{x=1}\ \text{为任意常数}$$

微分方程(6.6.27)用 $\delta=\xi+\xi^{-1}$ 可改写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{d}G(y)}{1+G(y)-\delta[G(y)]^2}$$

其解为

$$G(x)=\frac{\xi(1-x^\eta)}{1+(1+\xi)x^\eta},\quad \eta=-\left(\frac{2+\xi}{\xi}\right)\alpha$$

由于(6.6.22)式中 x 的定义是任意的，重要的是不同空间谱参数的相对关系，可把 $x^\eta\to x$，仍记为 x，则得到

$$\begin{cases}\check{R}(x)=\rho_1(x)P_1+\rho_2(x)P_2\\ \dfrac{\rho_2(x)}{\rho_1(x)}=\dfrac{\lambda_2/\lambda_1+x}{1+(\lambda_2/\lambda_1)x}\end{cases}\tag{6.6.28}$$

它正是(6.6.10)式 $M=2$ 的结果。但是现在它成立的条件是 BGR (6.6.14)式，即满足(6.6.18)式这种一般 Hecke 代数关系即可，而不需要与李代数相联系。换言之，当 BGR 满足某种代数关系时，例如一般 Hecke 代数，那么一定可以 YB 化，得到(6.6.28)式的结果。

(3) 广义 Birman-Wenzl 代数的 YB 化

当 BGR 有三个独立本征值时，为区别记号，用 T 表示这时的 BGR，设其独立本征值为 λ_1，λ_2 与 λ_3，即

$$T^2=\Big(\sum_{i=1}^{3}\lambda_i\Big)T-\Big(\prod_{i\neq j}^{3}\lambda_i\lambda_j\Big)I+\Big(\prod_{i=1}^{3}\lambda_i\Big)T^{-1} \quad (6.6.29)$$

引入一些记号

$$T=kG,\ k^2=\lambda_1\lambda_2,\ l=k/\lambda_3,\ m=(\lambda_1+\lambda_2)/k \quad (6.6.30)$$

则(6.6.29)式可改写为：

$$G^2=(m+l^{-1})G-(ml^{-1}+1)I+l^{-1}G^{-1} \quad (6.6.31)$$

这个关系式规定了 G^2 与 G^{-1} 的关系，与两个本征值的 BGR 不同，现在 G 与 G^{-1} 为基本元素，代替 G^{-1} 引入新的矩阵

$$E=\frac{1}{m}(G+G^{-1})-I \quad (6.6.32)$$

容易证明这样定义的 E 满足：

$$\begin{cases}GE=EG=l^{-1}E\\ E^2=[(l+l^{-1})/m-1]E\\ G^2=mG+(m/l)E-1\end{cases} \quad (6.6.33)$$

因此，G 与 E 可视为独立元素。下面将证明，如果具有三个独立本征值的 BGR 满足下面代数关系：

$$\alpha_1(G_iE_{i\pm1}G_i-G_{i\pm1}E_iG_{i\pm1})+\alpha_2(E_iG_{i\pm1}E_i-E_{i\pm1}G_iE_{i\pm1})$$

$$+\alpha_3(E_iG_{i\pm1}-G_iE_{i\pm1}+G_{i\pm1}E_i-E_{i\pm1}G_i)+\alpha_4(E_i-E_{i\pm1})$$

$$= 0 \tag{6.6.34}$$

它可变为：

$$\begin{aligned}
&\alpha_1(G_i^{-1}G_{i\pm1}G_i^{-1} - G_{i\pm1}G_i^{-1}G_{i\pm1}) + m^{-1}\alpha_2(G_i^{-1}G_{i\pm1}G_i^{-1} \\
&- G_{i\pm1}^{-1}G_iG_{i\pm1}^{-1}) + (\alpha_3 - \alpha_2)(G_i^{-1}G_{i\pm1} - G_iG_{i\pm1}^{-1} + G_{i\pm1}G_i^{-1} \\
&- G_{i\pm1}^{-1}G_i) + m[m^{-1}\alpha_4 + 2\alpha_3 - \alpha_2 - (m + l^{-1})\alpha_1](G_i - G_{i\pm1}) \\
&+ (\alpha_4 - ml^{-1}\alpha_1)(G_i^{-1} - G_{i\pm1}^{-1}) = 0
\end{aligned} \tag{6.6.35}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \lambda_3^{-1}k, \quad \alpha_2 = -\lambda_1 mk^{-1} \\ \alpha_3 = m\alpha_1, \quad \alpha_1 m^2 + l\alpha_2 + \alpha_4 = 0 \end{cases} \tag{6.6.36}$$

(6.6.32)式～(6.6.35)式以及从它们推出的一系列关系定义了广义 Birman-Wenzl 代数(BWA)[40]，它是 BWA 的推广[41]。

将(6.6.31)、(6.6.32)、(6.6.34)式结合起来，取 $k = 1$，则得到广义 BWA 的一般表达式：

$$\begin{aligned}
&G_iE_{i\pm1}E_i - E_{i\pm1}E_iG_{i\pm1} \\
&\quad = m^{-1}(G_iE_{i\pm1}G_i - G_{i\pm1}E_iG_{i\pm1}) - (G_iE_{i\pm1} - E_iG_{i\pm1})
\end{aligned} \tag{6.6.37}$$

$$\begin{aligned}
&E_iE_{i\pm1}G_i - G_{i\pm1}E_iE_{i\pm1} \\
&\quad = m^{-1}(G_iE_{i\pm1}G_i - G_{i\pm1}E_iG_{i\pm1}) - (E_{i\pm1}G_i - G_{i\pm1}E_i)
\end{aligned} \tag{6.6.38}$$

$$\begin{aligned}
&E_iE_{i\pm1}E_i - E_{i\pm1}E_iE_{i\pm1} \\
&\quad = m^{-1}(E_iG_{i\pm1}E_i - E_{i\pm1}G_iE_{i\pm1}) + m^{-2}(G_iE_{i\pm1}G_i \\
&\qquad - G_{i\pm1}E_iG_{i\pm1}) - m^{-1}l(E_i - E_{i\pm1}) + m^{-1}(G_{i\pm1}E_i \\
&\qquad - E_{i\pm1}G_i + E_iG_{i\pm1} - G_iE_{i\pm1}) - m^{-1}l(E_i - E_{i\pm1})
\end{aligned} \tag{6.6.39}$$

由(6.6.32)式，可直接导出：

$$\begin{cases} G_iE_{i\pm1}G_i - G_{i\pm1}E_iG_{i\pm1} = m^{-1}(G_iG_{i\pm1}^{-1}G_i - G_{i\pm1}G_i^{-1}G_{i\pm1}) \\ \qquad - (m + l^{-1})(G_i - G_{i\pm1}) - l^{-1}(G_i^{-1} - G_{i\pm1}^{-1}) \\ E_iG_{i\pm1}E_i - E_{i\pm1}G_iE_{i\pm1} = m^{-1}(G_i^{-1}G_{i\pm1}E_i - E_{i\pm1}G_iG_{i\pm1}^{-1}) \\ \qquad - (G_{i\pm1}E_i - E_{i\pm1}G_i) \\ E_iG_{i\pm1} - G_iE_{i\pm1} = m^{-1}(G_i^{-1}G_{i\pm1} - G_iG_{i\pm1}^{-1}) + G_i - G_{i\pm1} \\ G_{i\pm1}E_i - E_{i\pm1}G_i = m^{-1}(G_{i\pm1}G_i^{-1} - G_{i\pm1}^{-1}G_i) + G_i - G_{i\pm1} \\ G_i^{-1}G_{i\pm1}E_i - E_{i\pm1}G_iG_{i\pm1}^{-1} = m^{-1}(G_i^{-1}G_{i\pm1}G_i^{-1} - G_{i\pm1}^{-1}G_iG_{i\pm1}^{-1}) \\ \qquad - (G_i^{-1}G_{i\pm1} - G_iG_{i\pm1}^{-1}) \end{cases} \tag{6.6.40}$$

(6.6.37)式～(6.6.40)式充分地满足(6.6.35)式，称为 BWA。以前讨论过的自旋 1 的 BGR，B_n，C_n，D_n 决定的标准或非标准 BGR 都满足 BWA，但(6.3.3)式虽然有三个独立的本征值，却不满足 BWA。

现在证明(6.6.40)式是具有三个独立本征值的 BGR 通过 YB 化得到 YBE 解的充分条件。

由于现在 G 与 E 为独立元素，故可写为

$$\check{R}(x) = I + g(x)G + h(x)E \tag{6.6.41}$$

边值条件为 $(x = e^{-u})$

$$g(1) = h(1) = 0 \tag{6.6.42}$$

将(6.6.41)式代入 YBE，得到

$$\begin{aligned} & g(x)h(xy)g(y)(G_iE_{i\pm1}G_i - G_{i\pm1}E_iG_{i\pm1}) \\ & \quad + h(x)h(xy)h(y)(E_iE_{i\pm1}E_i - E_{i\pm1}E_iE_{i\pm1}) \\ & \quad + h(x)g(xy)h(y)(E_iG_{i\pm1}E_i - E_{i\pm1}G_iE_{i\pm1}) \\ & \quad + g(x)h(xy)h(y)(G_iE_{i\pm1}E_i - E_{i\pm1}E_iG_{i\pm1}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+h(x)h(xy)g(y)(E_iE_{i\pm1}G_i-G_{i\pm1}E_iE_{i\pm1})\\
&+\{h(x)g(xy)-g(x)h(xy)\}(E_iG_{i\pm1}-G_iE_{i\pm1})\\
&+\{g(xy)h(y)-h(xy)g(y)\}(G_{i\pm1}E_i-E_{i\pm1}G_i)\\
&+\{g(x)+g(y)+mg(x)g(y)-g(xy)\}(G_i-G_{i\pm1})\\
&+\{h(x)+h(y)-h(xy)+\left[\frac{l+l^{-1}}{m}-1\right]h(x)h(y)-h(xy)\\
&+ml^{-1}g(x)g(y)+l^{-1}g(x)h(y)+l^{-1}h(x)g(y)\}(E_i-E_{i\pm1})\\
&\quad=0
\end{aligned}
\tag{6.6.43}
$$

利用 BWA 和辫子代数，可由(6.6.43)式确定函数$g(x)$和$h(x)$，有关的计算参见文献[40]。为了说明这类问题，介绍一下如何从 BWA 关系解(6.6.43)式。当(6.6.43)式被简化为 BWA 时：

$$g(x)+g(y)+mg(x)g(y)-g(xy)=0 \tag{6.6.44}$$

$$
\begin{aligned}
&\alpha_3\{h(x)g(xy)h(y)+m^{-1}h(x)h(xy)h(y)\}\\
&\quad=\alpha_2\{h(x)g(xy)-g(x)h(xy)+g(x)h(xy)h(y)\\
&\qquad+m^{-1}h(x)h(xy)h(y)\}
\end{aligned}
\tag{6.6.45}
$$

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1\{h(x)g(xy)h(y)+m^{-1}h(x)h(xy)h(y)\}\\
&\quad=\alpha_2\{g(x)h(xy)g(y)+m^{-1}g(x)h(xy)h(y)\\
&\qquad+m^{-1}h(x)h(xy)g(y)+m^{-2}h(x)h(xy)h(y)\}
\end{aligned}
\tag{6.6.46}
$$

$$
\begin{aligned}
&\alpha_4\{h(x)g(xy)h(y)+m^{-1}h(x)h(xy)h(y)\}\\
&\quad=\alpha_2\left\{h(x)+h(y)+\left(\frac{l+l^{-1}}{m}-1\right)h(x)h(y)-h(xy)\right.\\
&\qquad+ml^{-1}g(x)g(y)+l^{-1}[g(x)h(y)+h(x)g(y)]\\
&\qquad-lm^{-1}h(x)h(xy)h(y)=0
\end{aligned}
\tag{6.6.47}
$$

与以前类似，取(6.6.44)式对 x 的微商，并令 $x=1$，得

$$g(x)=m^{-1}(x^{\sigma}-1),\quad \sigma=m\left.\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}$$

对(6.6.45)式两端重复同样过程，得到

$$g(x)=(cx^{\eta}-m^{-1})h(x),\quad \eta\equiv(\alpha_3-\alpha_2)h'(1)/\alpha_2$$

再代回(6.6.45)式，得

$$\alpha_3c(xy)^{\eta}h(y)=\alpha_2cx^{\eta}(y^{\eta}-1+h(y))$$

其中 c 为积分常数，即得：

$$h(y)=\alpha_2(y^{\eta}-1)/(\alpha_3y^{\eta}-\alpha_2)$$

$$\alpha_3=mc\alpha_2,\ \xi=\eta$$

(6.6.46)式要求：

$$c\alpha_2=\alpha_1$$

而(6.6.47)式要求：

$$\alpha_4=\alpha_2\beta^2/l,\quad (\beta-1)(\beta^2+ml\beta+l^2)=0$$

但 $\beta=1$ 导致 $h(1)=0$，故取

$$\beta^2+ml\beta+l^2=0$$

得到

$$\alpha_4=-(m\alpha_3+l\alpha_1)=-(m^2\alpha_1+l\alpha_2)$$

由于 $\beta=\alpha_3/\alpha_2=-\lambda_2/\lambda_3$，得

$$g(x)=(x-1)/m,\ h(x)=(x-1)/(\beta x-1) \tag{6.6.48}$$

以及 $G=\sum_{\alpha=1}^{3}\lambda_\alpha P_\alpha$，即得到(6.6.41)式，$g(x)$与 $h(x)$由上式决定。

因此，满足 BWA 的所有 BGR 必定可通过(6.6.48)式导出 YBE 的解 $\check{R}(x)$。更一般地，满足(6.6.44)式～(6.6.47)式的代数集合必然可以 YB 化，在形式上结果与(6.6.48)式完全相同。将(6.6.41)式写成 G 与 G^{-1}形式则为[38,39]

$$\check{R}(x)=\lambda_1 x(x-1)G^{-1}+\left(1+\frac{\lambda_1}{\lambda_2}+\frac{\lambda_1}{\lambda_3}+\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2\lambda_3}\right)xI-\frac{\lambda_1}{\lambda_2\lambda_3}(x-1)G \tag{6.6.49}$$

其中 λ_1，λ_2 与 λ_3 为 BGR G 的三个独立本征值，G 与 G^{-1}(或 G 与 E)满足(6.6.34)式。

当 BGR 有四个本征值(独立)时，也可以引入更复杂的代数称为扩展的 BW 代数，当 BGR 满足这个更大的代数时，其 YB 化也必定可以进行。但公式过于复杂，不再讨论，可参阅文献[40]。这时，$\check{R}(x)$由下式给出[39]：

$$\check{R}(x)=A(x)S^2+B(x)S+C(x)I+D(x)S^{-1} \tag{6.6.50}$$

其中对本征值 λ_1，…，λ_4，诸函数由下式给出：

$$\begin{cases}A(x)=(\lambda_2\lambda_3\lambda_4)^{-1}(\lambda_4-\lambda_1)^{-1}(\lambda_4\lambda_2-\lambda_1\lambda_3)x(x-1)\\ B(x)=-\lambda_4^{-1}(x-1)-\dfrac{(\lambda_2\lambda_3\lambda_4)^{-1}}{\lambda_4-\lambda_1}\\ \qquad\cdot[(\lambda_2+\lambda_3)(\lambda_2\lambda_4-\lambda_1\lambda_3)-\lambda_2\lambda_4^2-\lambda_1^2\lambda_3]x(x-1)\\ C(x)=\dfrac{(\lambda_2\lambda_3\lambda_4)^{-1}}{\lambda_4-\lambda_1}\{[(\lambda_1\lambda_3+\lambda_1\lambda_4+\lambda_2\lambda_3\\ \qquad+\lambda_2\lambda_4)(\lambda_2\lambda_4-\lambda_1\lambda_3)+\lambda_2\lambda_3(\lambda_4^2-\lambda_1^2)+\lambda_1\lambda_4(\lambda_3\lambda_4\\ \qquad-\lambda_1\lambda_2)]x^2+[\lambda_3^2\lambda_4(\lambda_1+\lambda_2)-\lambda_1\lambda_2^2(\lambda_3+\lambda_4)]x\}\\ D(x)=x(x-1)\left(x+\dfrac{\lambda_3-\lambda_2}{\lambda_4-\lambda_1}\right)\lambda_1\end{cases} \tag{6.6.51}$$

满足 4 个本征值 YB 化的例子是 G_2(7 维表示)、D_2 所构成的非平凡 BGR、自旋 3/2 模型等。

(4) BWA 的充分条件

上面所述的 Hecke 代数结构相当简单,BWA 较为复杂,而只要 BGR 满足 BWA 立即就可以用 YB 化方法得到 YBE 的解。因此找到 BGR 满足 BWA 的充分条件是件比较重要的事。利用 $(E_{\alpha\beta})_{ab} = \delta_{\alpha a}\delta_{\beta b}$, BGR G 可写为

$$G = \sum_{1}^{N} G_{ab}^{cd}(E_{ac} \otimes E_{bd}) \tag{6.6.52}$$

在所讨论的问题中,设:

权守恒: $G_{ab}^{cd} \neq 0$,仅当 $a + b = c + d$

CPT 不变: $G_{ab}^{cd} = G_{b'a'}^{d'c'}$, $a' = N + 1 - a$

定义:

$$E = I - W^{-1}(G - G^{-1}) = \sum_{1}^{N} E_{ab}^{cd}(E_{ac} \otimes E_{bd}) \tag{6.6.53}$$

$$G_j = I \otimes \cdots \otimes \underset{j-1}{I} \otimes \underset{j,\, j+1}{G} \otimes \underset{j+2}{I} \otimes \cdots \otimes I$$

$$E_j = I \otimes \cdots \otimes \underset{j-1}{I} \otimes \underset{j,\, j+1}{E} \otimes \underset{j+2}{I} \otimes \cdots \otimes I$$

定理:S_j 与 E_j 满足 BWA 的充分条件为[20]

a) $$E_{cd}^{ab} = r(a)r(c)\delta(a, -b)\delta(c, -d) \tag{6.6.54}$$

b) $$r(a)r(-a) = 1 \tag{6.6.55}$$

c) $$\sum_{b} G_{ab}^{ab} r^2(b) = \sigma^{-1} \quad (\text{与 } a \text{ 无关}) \tag{6.6.56}$$

$$a, b, c, d = \left[-\left(\frac{N-1}{2}\right), -\left(\frac{N-1}{2}\right) + 1, \cdots,\right.$$

$$\left(\frac{N-1}{2}\right)-1,\ \frac{N-1}{2}\right]$$

其中I为$N\times N$单位矩阵，$\delta(a,b)$为δ记号。忆及BWA有下面关系式定义[19,20]：

$$\begin{cases}S_j-S_j^{-1}=w(I-E_j)\\ S_jS_{j\pm1}S_j=S_{j\pm1}S_jS_{j\pm1},\quad S_jS_k=S_kS_j,\ |j-k|\geqslant 2\\ E_jE_{j\pm1}E_j=E_j,\quad E_jE_k=E_kE_j,\ |j-k|\geqslant 2\\ E_jS_j=S_jE_j=\sigma E_j\\ S_{j\pm1}S_jE_{j\pm1}=E_jS_{j\pm1}S_j=E_jE_{j\pm1}\\ S_{j\pm1}E_jS_{j\pm1}=S_j^{-1}E_{j\pm1}S_j^{-1}\\ E_{j\pm1}E_jS_{j\pm1}=E_{j\pm1}S_j^{-1},\quad S_{j\pm1}E_jE_{j\pm1}=S_j^{-1}E_{j\pm1}\\ E_jS_{j\pm1}E_j=\sigma^{-1}E_j\\ E_j^2=\left(1-\dfrac{\sigma-\sigma^{-1}}{w}\right)E_j\end{cases}$$

(6.6.57)

将(6.6.54)～(6.6.56)式代入(6.6.57)式中的独立关系可证明本定理，详见文献[20]。

现在感兴趣的是(6.2.43)式所示的与B_n，C_n和D_n基本表示相联系的BGR，无论是标准解还是非标准解都满足BWA。G可写为：

$$\begin{aligned}G=&\sum_i u_i(E_{ii}\otimes E_{ii})+\sum_{i\neq j,-j}E_{ij}\otimes E_{ji}\\&+\sum_{i=-i}u_i^{-1}(E_{i,-i}\otimes E_{-i,i})\\&+w\sum_{i<j}E_{ii}\otimes E_{jj}-w\sum_{i<j}r(i)r(-j)(E_{-j,i}\otimes E_{j-i})\end{aligned}$$

(6.6.58)

它可改写为(相重指标不求和)

$$G_{ab}^{ab} = u_a\delta(a,b) + w\theta(a,b) - wr^2(a)\theta(a,b)\delta(a,-b) \tag{6.6.59}$$

其中 $\theta(a,b) = 1$ 当 $a < b$，$\theta(a,b) = 0$ 当 $a > b$，可以得到：
对 B_n

$$wr^2(b) = \begin{cases} \prod_{k=0}^{b} u_k^2 - \prod_{k=0}^{b-1} u_k^2, & b > 0 \\ w, & b = 0 \\ \prod_{k=0}^{-b-1} u_k^{-2} - \prod_{k=0}^{-b} u_k^{-2}, & b < 0 \end{cases} \tag{6.6.60}$$

对 $C_n(\varepsilon = -1)$ 与 $D_n(\varepsilon = +1)$

$$wr^2(b) = \begin{cases} \varepsilon(u_{1/2})^{-\varepsilon}\left(\prod_{k=1/2}^{b} u_k^2 - \prod_{k=1/2}^{b-1} u_k^2\right) & \text{当 } b > \frac{1}{2} \\ \varepsilon w(u_{1/2})^{1-\varepsilon}, & \text{当 } b = \frac{1}{2} \\ \varepsilon w(u_{1/2})^{\varepsilon-1}, & \text{当 } b = -\frac{1}{2} \\ \varepsilon(u_{1/2})^{\varepsilon}\left(\prod_{k=1/2}^{-b-1} u_k^{-2} - \prod_{k=1/2}^{-b} u_k^{-2}\right), & \text{当 } b < -\frac{1}{2} \end{cases} \tag{6.6.61}$$

将(6.6.53)、(6.6.59)～(6.6.61)式代入(6.6.54)～(6.6.56)式可验证满足该定理，其中 σ 为第三个本征值由(6.2.47)式给出。

(5) BWA 的对称性

在 BWA 的三个分立本征值中，第三个是特殊的，不失一般性可取

$$w = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \lambda_1\lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = \sigma$$

例如 $\lambda_1 = q$，$\lambda_2 = -q^{-1}$。经 YB 化后 $\check{R}(x)$ 有两种可能的结果，它们与取本征值 λ_1，λ_2 哪一个有关：

$$\check{R}_\alpha(x) = a_\alpha(x)G + b_\alpha(x)E + c_\alpha(x)I \quad (\alpha = a,\ b) \tag{6.6.62}$$

其中

$$\begin{cases} a_\alpha(x) = (x-1)(x-x_\alpha) \\ b_\alpha(x) = wx(x-1) \\ c_\alpha(x) = -wx(x-x_\alpha) \end{cases} \quad 而 \begin{cases} x_a = -\lambda_1\sigma^{-1} \\ x_b = -\lambda_2\sigma^{-1},\ \sigma = \lambda_3 \end{cases} \tag{6.6.63}$$

亦即，当 $\lambda_1 \leftrightarrow \lambda_2$ 互换时，两种次序$(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3)$与$(\lambda_2,\ \lambda_1,\ \lambda_3)$得到两种不同的$\check{R}(x)$，它们对应同一个 BGR 的 G。如取 $\lambda_1 = q,\ \lambda_2 = -q^{-1}$，则有

$$\check{R}_a(x) = \frac{qx+G}{q+xG} f_a(x) \quad (x \neq -1) \tag{6.6.64}$$

$$\check{R}_b(x) = \frac{-q^{-1}x+G}{-q^{-1}+xG} f_b(x) \tag{6.6.65}$$

分母理解为逆矩阵，且

$$\begin{cases} f_a(x) = q^{-1}(x-q^2)(x-x_a) \\ f_b(x) = q(x-q^{-2})(x-x_b) \end{cases} \tag{6.6.66}$$

(6.6.64)式看起来很像对谱参数 x 的分式变换。这种 $\lambda_1 \leftrightarrow \lambda_2$ 的不变性反映了作为矩阵代数方程两个根互换的不变性，本质上是一种伽罗华群不变性。另外，当出现蜕化情况时，例如 §6.2 中讨论的第三个本征蜕化为 λ_1 或 λ_2 时，则本征方程变为

$$(G-q)^2(G+q^{-1}) = 0 \tag{6.6.67a}$$

或

$$(G-q)(G+q^{-1})^2 = 0 \tag{6.6.67b}$$

但这里平方不能去掉，它们代表一个投影算符是蜕化的，本质上还是三个本征值问题，可证明仍然满足 BWA。

(6) BWA 的有理极限

标准解存在有理极限，而非标准解一般不一定存在这种极限。由于BWA 的三个本征值可选为 q，$-q^{-1}$ 与 $\sigma=\pm q^{s}$，定义极限

$$S_j^{有理}=\lim_{q\to 1}G_j,\ F_j=\lim_{q\to 1}E_j$$

引入 $x=e^{hu}$，$q=e^{-h\gamma/2}$，则当取 u 代替 $u\gamma^{-1}$之后，$\check{R}(x)$的有理极限为[20]：

$$\check{R}_{\pm}^{有理}(u)=I+uP-u\left(u-\frac{S\pm 1}{2}\right)^{-1}F$$

其中$\pm$对应于 $\sigma=\pm q^{s}$，P 为置换算符 $P^2=I$，而 F 则由BWA 贡献得来。由于 $uP+I$ 与 A_n 基本表示的$\check{R}$矩阵相应，并且置换与 A_n 的 Weyl 群同构，所以 F 应当与 B_n，C_n，D_n 的 Weyl 群有关。本节详细讨论见文献[20]。

§6.7 YB 化举例

(1) 自旋 1/2 模型

已知BGR S 满足 Hecke 代数(例如解(6.2.17)式)，或广义的 Hecke 代数(例如(6.2.19)式满足(6.6.18)式而不满足(6.6.20)式)，永远可选择 $\lambda_1=q$，$\lambda_2=-q^{-1}$，取 $x=e^{u}$

$$\check{R}(x)=xS-x^{-1}S^{-1} \tag{6.7.1}$$

必满足 YBE。最简单的例子是 4×4 表示，即自旋 1/2 情况，

$$\check{R}(x)=\begin{pmatrix} (xq-x^{-1}q^{-1}) & & & \\ & x^{-1}w & \eta(x-x^{-1}) & \\ & \eta^{-1}(x-x^{-1}) & xw & \\ & & & (xq-x^{-1}q^{-1}) \end{pmatrix} \tag{6.7.2}$$

令 $x = \mathrm{e}^u$，$q = \mathrm{e}^\gamma$，可化为(丢掉公因子 2)

$$\check{R}(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{sh}(u+\gamma) & & & \\ & \mathrm{e}^{-u}\mathrm{sh}\gamma & \eta\mathrm{sh}u & \\ & \eta^{-1}\mathrm{sh}u & \mathrm{e}^{u}\mathrm{sh}\gamma & \\ & & & \mathrm{sh}(u+\gamma) \end{pmatrix} \tag{6.7.3}$$

它的物理意义十分明显，由(3.3.17)式可以计算系统的哈密顿量：

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \check{R}(u)}{\partial u}\bigg|_{u=0} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\gamma & & & \\ & 0 & \eta & \\ & \eta^{-1} & 0 & \\ & & & \mathrm{ch}\gamma \end{pmatrix} + \mathrm{sh}\gamma \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & -1 & 0 & \\ & 0 & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{ch}\gamma I + \frac{1}{2}\mathrm{ch}\gamma \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}(\eta^{-1}\sigma^{+}\otimes\sigma^{-} + \eta\sigma^{-}\otimes\sigma^{+})$$

其中 $\sigma^{\pm}$，σ^{3} 为泡利矩阵，注意到

$$\frac{1}{2}(1\otimes\sigma^{3} - \sigma^{3}\otimes 1) = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & -1 & 0 & \\ & 0 & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

得到

$$\left.\frac{\partial \check{R}(u)}{\partial u}\right|_{u=0}=(\mathrm{ch}\lambda)I+\frac{1}{2}(\eta^{-1}\sigma^{+}\otimes\sigma^{-}+\eta\sigma^{-}\otimes\sigma^{+})$$

$$+(\mathrm{ch}\lambda)(\sigma^{3}\otimes\sigma^{3})+(\mathrm{sh}\gamma)(1\otimes\sigma^{3}-\sigma^{3}\otimes 1)$$

由于$\check{R}(u)$占据第 n 与第 $n+1$ 空间，由(3.3.17)式，上式左端即为 $H_{n,n+1}$，即有

$$H_{n,n+1}=(\mathrm{ch}\lambda)1_{n}1_{n+1}+\frac{1}{2}\{\eta\sigma_{n}^{-}\sigma_{n+1}^{+}+\eta^{-1}\sigma_{n}^{+}\sigma_{n+1}^{-}\}$$

$$+(\mathrm{ch}\lambda)\sigma_{n}^{3}\sigma_{n+1}^{3}+(\mathrm{sh}\gamma)(1_{n}\sigma_{n+1}^{3}-\sigma_{n}^{3}1_{n+1}) \quad (6.7.4)$$

系统的哈密顿量为

$$H=\sum_{n=1}^{N-1}H_{n,n+1}$$

为简单取 $\eta=1$，注意到对(6.7.4)式求和时，最后一项求和的结果中，非边界项都被消掉，遂有

$$H=(\mathrm{ch}\lambda)I+\sum_{n=1}^{N-1}(\sigma_{n}^{x}\sigma_{n+1}^{x}+\sigma_{n}^{y}\sigma_{n+1}^{y}+\mathrm{ch}\lambda\sigma_{n}^{3}\sigma_{n+1}^{3})$$

$$+\mathrm{sh}\lambda(\sigma_{N}^{3}-\sigma_{1}^{3}) \quad (6.7.5)$$

它正是带边界项的 XXZ 链模型的哈密顿量[42]，因为$\check{R}(x)$是量子代数的中心(表示)，所以(6.7.5)式必定与量子代数的生成元对易。显然在周期性边界条件或 $N\to\infty$ 时，$\sigma_{1}^{3}=\sigma_{N}^{3}$，即回到通常的 XXZ 模型。解(6.7.3)式可以变换为通常的 6 顶角解。由于当权守恒时，变换

$$\check{R}_{ab}^{cd}(u)\longrightarrow \mathrm{e}^{\mu(a+c-b-d)u}\,\check{R}_{cd}^{ab}(u) \quad (6.7.6)$$

当 $a+b=c+d$ 仍满足 YBE，其中 μ 为任意常数，当取(6.7.3)式标号时可选 $\mu=-\frac{1}{2}$，此时(6.7.3)中对角元中 $\mathrm{e}^{\pm u}$因子被消除，

取 $\eta = 1$ (η 相当于外磁场)得

$$\check{R}(u) = \begin{bmatrix} \mathrm{sh}(u+\gamma) & & & \\ & \mathrm{sh}\gamma & \mathrm{sh}u & \\ & \mathrm{sh}u & \mathrm{sh}\gamma & \\ & & & \mathrm{sh}(u+\gamma) \end{bmatrix} \tag{6.7.7}$$

即通常 6 顶角解。

(2) A_n 基本表示的 BGR

$$S(A_n) = \sum_{\alpha}^{N} u_\alpha E_{\alpha\alpha} \otimes E_{\alpha\alpha} + \sum_{\alpha\neq\beta}^{N} E_{\alpha\beta} \otimes E_{\beta\alpha} + w \sum_{\alpha<\beta}^{N} E_{\alpha\alpha} \otimes E_{\beta\beta}$$

$$S(A_n)^{-1} = \sum_{\alpha}^{N} u_\alpha^{-1} E_{\alpha\alpha} \otimes E_{\alpha\alpha} + \sum_{\alpha\neq\beta}^{N} E_{\alpha\beta} \otimes E_{\beta\alpha} - w \sum_{\alpha>\beta}^{N} E_{\alpha\alpha} \otimes E_{\beta\beta} \tag{6.7.8}$$

$w = q - q^{-1}$, $u_\alpha = q$ 或 $-q^{-1}$(但第一个 $u_\alpha = q$)
$N = n + 1$,其 $\check{R}(x)$解为(例如对标准解):

$$\check{R}_{A_n}(x) = (xq - xq^{-1}) \sum_{\alpha} E_{\alpha\alpha} \otimes E_{\alpha\alpha} + (x - x^{-1}) \sum_{\alpha\neq\beta} E_{\alpha\beta} \otimes E_{\beta\alpha}$$

$$+ x^{-1} w \sum_{\alpha>\beta} E_{\alpha\alpha} \otimes E_{\beta\beta} + xw \sum_{\alpha<\beta} E_{\alpha\alpha} \otimes E_{\beta\beta} \tag{6.7.9}$$

(3) BWA 的 YB 化

由(6.6.59)式和(6.6.63)式给出,上段已有详细讨论。

(4) $V^{j\frac{1}{2}}$空间 BGR

此时由于李代数直积空间为:

$$j \otimes \frac{1}{2} = j + \frac{1}{2} \oplus j - \frac{1}{2}$$

由于分解为两个独立子空间,$\check{R}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(x)$选为标准解,考虑到公共因

子对 YBE 解无影响，则有

$$\check{R}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(x) = x\left(S^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\right)^{-1} - S^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \tag{6.7.10}$$

$$\begin{cases} \check{R}^{j\frac{1}{2}}(x) = A_1 x\left(S^{\frac{1}{2}j}\right)^{-1} + A_2 S^{j\frac{1}{2}} \\ \check{R}^{\frac{1}{2}j}(x) = A_1 x\left(S^{j\frac{1}{2}}\right)^{-1} + A_2 S^{\frac{1}{2}j} \end{cases} \tag{6.7.11}$$

将它们代入 YBE：

$$\begin{aligned} &\check{R}^{j\frac{1}{2}}_{12}(x)\ \check{R}^{j\frac{1}{2}}_{23}(xy)\ \check{R}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{12}(y) = \check{R}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{23}(y)\ \check{R}^{j\frac{1}{2}}_{12}(xy)\ \check{R}^{j\frac{1}{2}}_{23}(x) \\ &\check{R}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{12}(x)\ \check{R}^{\frac{1}{2}j}_{23}(xy)\ \check{R}^{\frac{1}{2}j}_{12}(y) = \check{R}^{\frac{1}{2}j}_{23}(y)\ \check{R}^{\frac{1}{2}j}_{12}(xy)\ \check{R}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{23}(x) \\ &\check{R}^{\frac{1}{2}j}_{12}(x)\ \check{R}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{23}(xy)\ \check{R}^{j\frac{1}{2}}_{12}(y) = \check{R}^{j\frac{1}{2}}_{23}(y)\ \check{R}^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}_{12}(xy)\ \check{R}^{\frac{1}{2}j}_{23}(x) \end{aligned} \tag{6.7.12}$$

可得到 YBE 成立的条件

$$A_1 = -Qq^{-2j}A_2$$

为方便取 $A_1 = q$，则有

$$A_2 = -q^{2j+1}Q^{-1}$$

其中 q，Q 为任意参数。从而得到 YB 化后的 $\check{R}^{j\frac{1}{2}}(x)$ 表达式：

$$\begin{aligned} \check{R}^{j\frac{1}{2}}(x) = &\sum_{a(j),\, b(1/2)} p^{(a(j),\, b(1/2))}(x) E_{a(j),\, b(1/2)} \otimes E_{b(1/2),\, a(j)} \\ &+ \sum_{a(j),\, b(1/2)} q^{(a(j),\, b(1/2))}(x) E_{a(j),\, -b(1/2)} \\ &\otimes E_{b(1/2),\, a(j)+2b(1/2)} \end{aligned} \tag{6.7.13}$$

其中

$$
\begin{cases}
p^{(a(j),\,b(1/2))}(x) = \begin{cases} q^{j+1}\left(xq^{-a(j)} - Q^{-1}q^{a(j)+1}\right), & b\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \\ q^{j}\left(xq^{a(j)} - Q^{-i}q^{-a(j)+1}\right), & b\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \end{cases} \\
q^{(a(j),\,b(1/2))} = \begin{cases} -q^{2j+1}Q^{-1}q^{(a(j),\,1/2)}, & b\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \\ -q^{2j+1}xq^{(-a(j),\,1/2)}, & b\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \end{cases}
\end{cases}
\tag{6.7.14}
$$

当考虑标准解时,(6.7.14)式简化为

$$
\begin{cases}
p^{(a(j),\,b(1/2))}(x) = \begin{cases} q^{j+1}\left(xq^{-a(j)} - q^{a(j)}\right) & \text{当 } b\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \\ q^{j}\left(xq^{a(j)} - q^{-a(j)}\right) & \text{当 } b\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \end{cases} \\
q^{(a(j),\,b(1/2))}(x) = \begin{cases} -q^{j+\frac{1}{2}}w\{[j-a(j)]_q[j+a(j)+1]_q\}^{1/2} \\ \qquad \text{当 } b\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \\ -q^{j+\frac{1}{2}}w\{[j+a(j)]_q[j-a(j)+1]_q\}^{1/2}x \\ \qquad \text{当 } b\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \end{cases}
\end{cases}
\tag{6.7.15}
$$

它与 Drinfeld-Jimbo 一般公式相一致。本节的详细计算以及非标准解的有关讨论参见文献[32]。

(5) 带颜色的情况

令 λ, μ, ν 代表颜色指标,其 BGR $S(\lambda, \mu)$满足(6.3.1)式,而依赖于谱参数 $x = \mathrm{e}^{-u}$ 的 YBE 解满足

$$
\begin{aligned}
&\check{R}_{12}(\lambda, \mu; x)\,\check{R}_{23}(\lambda, \nu; xy)\,\check{R}_{12}(\nu, \mu; y) \\
&\quad = \check{R}_{23}(\nu, \mu; y)\,\check{R}_{12}(\lambda, \nu; xy)\,\check{R}_{23}(\lambda, \mu; x)
\end{aligned}
\tag{6.7.16}
$$

注意 $S(\lambda, \mu)$满足(6.3.1)式及其一系列衍生关系,例如

$$S_{12}(\lambda, \mu)S_{23}(\lambda, \nu)S_{12}^{-1}(\nu, \mu) = S_{23}^{-1}(\nu, \mu)S_{12}(\lambda, \nu)S_{23}(\lambda, \mu)$$

等等类似的关系，并注意区分颜色。相应地必须引入颜色空间的单位矩阵：

$$I(\lambda, \mu)I(\mu, \lambda) = I(\lambda, \lambda) = I$$

满足

$$I_{12}(\lambda, \mu)I_{23}(\lambda, \nu)I_{12}(\mu, \nu) = I_{23}(\mu, \nu)I_{12}(\lambda, \nu)I_{23}(\lambda, \nu) \tag{6.7.17}$$

的平凡解。以前讨论过的自旋 1/2 模型或 B_n，C_n 与 D_n 基本表示的模型都可以染色，设其本征值为 Λ_1，Λ_2 与 Λ_3，此时有

$$S(\lambda, \lambda) = (\Lambda_1 + \Lambda_2)I - \Lambda_1\Lambda_2 S(\lambda, \lambda)^{-1} \tag{6.7.18}$$

或

$$(S(\lambda, \lambda))^2 = \Big(\sum_{i=1}^{3}\Lambda_i\Big)S(\lambda, \lambda) - \Big(\sum_{i<j}^{3}\Lambda_i\Lambda_j\Big)I + \Big(\prod_{i=1}^{3}\Lambda_i\Big)S(\lambda\lambda)^{-1} \tag{6.7.19}$$

现在要求(6.7.16)式的解，当 $x = \mathrm{e}^{-u}$，考虑以下限制条件：

a) $\check{R}(\lambda, \mu; x = 0) \propto S(\lambda, \mu)$

$\check{R}(\lambda, \mu; x \to \infty) \propto S(\lambda, \mu)^{-1}$

b) $\check{R}(\lambda, \mu; x = 1) \propto I(\lambda, \mu)$

c) $\check{R}(\lambda, \mu; x)\check{R}(\mu, \lambda; x^{-1}) \propto I$

可以证明，BGR 具有(6.7.17)式时，有

$$\check{R}(\lambda, \mu; x) = f(\lambda, \mu)\{x\Lambda_1\Lambda_2 S(\mu, \lambda)^{-1} + S(\lambda, \mu)\} \tag{6.7.20}$$

其中 $f(\lambda, \mu)$ 为任意函数。

当 BGR 具有(6.7.19)式时，YBE 的解为：

$$\check{R}(\lambda, \mu; x) = \Lambda_1 x(x-1)S(\mu, \lambda)^{-1}$$
$$+ x\Lambda_2^{-1}\Lambda_3^{-1}(\Lambda_1 + \Lambda_2)(\Lambda_2 + \Lambda_3)$$
$$\cdot I(\lambda, \mu) - \Lambda_3^{-1}(x-1)S(\lambda, \mu) \quad (6.7.21)$$

相关的计算和讨论可参阅文献[29]。

相应地可以引入染色的 BWA，此时定义

$$E(\lambda, \mu) = m^{-1}\{\check{R}(\lambda, \mu) + \check{R}(\mu, \lambda)^{-1}\} - I(\lambda, \mu)$$
$$m = \mathrm{i}(q - q^{-1}) = \mathrm{i}w$$

定义

$$E_i = I \otimes \cdots \otimes \underset{i}{I} \otimes \underset{i,\, i+1}{E(\lambda, \mu)} \otimes \underset{i+2}{I} \otimes \cdots$$
$$b_i = I \otimes \cdots \otimes \underset{i}{I} \otimes \underset{i,\, i+1}{\check{R}(\lambda, \mu)} \otimes I \otimes \cdots$$
$$I_i = I \otimes \cdots \otimes \underset{i}{I} \otimes \underset{i,\, i+1}{I(\lambda, \mu)} \otimes I \otimes \cdots$$

染色 BWA 满足以下关系：

$$I_i(\lambda, \mu)I_{i+1}(\lambda, \nu)I_i(\mu, \nu) = I_{i+1}(\mu, \nu)I_i(\lambda, \nu)I_{i+1}(\lambda, \mu)$$
$$I_i(\lambda, \mu)I_j(\nu, \rho) = I_j(\nu, \rho)I_i(\lambda, \mu), \ |i - j| \geqslant 2$$
$$I_i(\lambda, \mu)I_i(\mu, \lambda) = I, \quad I_i(\lambda, \lambda) = I$$
$$E_i(\lambda, \mu) = m^{-1}\{b_i(\lambda, \mu) + b_i^{-1}(\mu, \lambda)\} - I_i(\lambda, \mu)$$
$$b_i(\lambda, \mu)I_i(\mu, \lambda) = I_i(\lambda, \mu)b_i(\mu, \lambda)$$
$$b_i(\lambda, \mu)I_{i+1}(\lambda, \nu)I_i(\mu, \nu) = I_{i+1}(\mu, \nu)b_i(\lambda, \nu)I_{i+1}(\lambda, \mu)$$
$$= I_i(\lambda, \mu)I_{i+1}(\lambda, \nu)b_i(\mu, \nu)$$
$$b_{i+1}(\mu, \nu)I_i(\lambda, \nu)I_{i+1}(\lambda, \mu) = I_i(\lambda, \mu)b_{i+1}(\lambda, \nu)I_i(\mu, \nu)$$
$$= I_{i+1}(\mu, \nu)I_i(\lambda, \nu)b_{i+1}(\lambda, \mu)$$

$$E_i(\lambda, \mu)b_{i+1}(\lambda, \nu)E_i(\mu, \nu) = lI_{i+1}(\mu, \nu)E_i(\lambda, \nu)I_{i+1}(\lambda, \mu)$$

$$E_{i+1}(\mu, \nu)b_i(\lambda, \nu)E_{i+1}(\lambda, \mu) = lI_i(\lambda, \mu)E_{i+1}(\lambda, \nu)I_i(\mu, \nu)$$

$$E_i(\lambda, \mu)b_i(\mu, \lambda) = l^{-1}E_i(\lambda, \mu)I_i(\mu, \lambda), \quad l = -\mathrm{i}\Lambda_3^{-1}$$

从以上关系式可以推得：

$$E_i(\lambda, \mu)E_{i+1}(\lambda, \nu)E_i(\mu, \nu) = I_{i+1}(\mu, \nu)E_i(\lambda, \nu)I_{i+1}(\lambda, \mu)$$
$$= I_i(\lambda, \mu)I_{i+1}(\lambda, \nu)E_i(\mu, \nu)$$

$$E_{i+1}(\mu, \nu)E_i(\lambda, \nu)E_{i+1}(\lambda, \nu) = I_i(\lambda, \mu)E_{i+1}(\lambda, \nu)I_i(\mu, \nu)$$
$$= E_{i+1}(\mu, \nu)I_i(\lambda, \nu)I_{i+1}(\mu, \nu)$$

$$b_i(\lambda, \mu)b_{i+1}(\lambda, \nu)E_i(\mu, \nu) = E_{i+1}(\mu, \nu)b_i(\lambda, \nu)b_{i+1}(\lambda, \mu)$$

$$E_i(\lambda, \mu)b_{i+1}(\lambda, \nu)b_i(\mu, \nu) = b_{i+1}(\mu, \nu)b_i(\lambda, \nu)E_{i+1}(\lambda, \mu)$$

$$E_i(\lambda, \mu)I_i(\mu, \lambda) = I_i(\lambda, \mu)E_i(\mu, \lambda)$$

$$E_i(\lambda, \mu)E_i(\mu, \lambda) = \{m^{-1}(l + l^{-1}) - 1\}E_i(\lambda, \mu)I_i(\mu, \lambda)$$

$$b_i(\lambda, \mu)b_i(\mu, \lambda) = m\{b_i(\lambda, \mu) + l^{-1}E_i(\lambda, \mu)\}I_i(\mu, \lambda) + I$$

$$b_i(\lambda, \mu)b_i(\mu, \lambda)b_i(\lambda, \mu) = (m + l^{-1})b_i(\lambda, \mu)b_i(\mu, \lambda)I_i(\lambda, \mu)$$
$$- (l^{-1}m + 1)b_i(\lambda, \mu) + l^{-1}I_i(\lambda, \mu)$$

$$b_i(\lambda, \mu)E_{i+1}(\lambda, \nu)E_i(\mu, \nu) = b_{i+1}(\nu, \mu)E_i(\lambda, \nu)I_{i+1}(\lambda, \mu)$$

$$b_i(\lambda, \mu)E_{i+1}(\lambda, \nu)b_i(\mu, \nu) = b_{i-1}^{-1}(\nu, \mu)E_i(\lambda, \nu)b_{i+1}^{-1}(\mu, \lambda)$$

$$b_{i+1}(\mu, \nu)E_i(\lambda, \nu)b_{i+1}(\lambda, \mu) = b_i^{-1}(\mu, \lambda)E_{i+1}(\lambda, \nu)b_i^{-1}(\nu, \mu)$$

$$E_i(\lambda, \mu)I_{i+1}(\lambda, \nu)E_i(\mu, \nu) = \{m^{-1}(l + l^{-1}) - 1\}$$
$$\cdot E_i(\lambda, \mu)I_{i+1}(\lambda, \nu)I_i(\mu, \nu)$$

$$E_{i+1}(\lambda, \mu)I_i(\lambda, \mu)E_{i+1}(\lambda, \nu) = \{m^{-1}(l + l^{-1}) - 1\}$$

$$\cdot I_{i+1}(\mu, \nu)I_i(\lambda, \mu)E_{i+1}(\lambda, \mu)$$

$$b_i(\lambda, \mu)I_{i+1}(\lambda, \nu)b_i(\mu, \nu) = \{m(b_i(\lambda, \mu) + l^{-1}E_i(\lambda, \mu)\}$$
$$+ I_i(\lambda, \mu)I_{i+1}(\lambda, \nu)I_i(\mu, \nu)$$

$$b_{i+1}(\mu, \nu)I_i(\lambda, \mu)b_{i+1}(\lambda, \mu) = \{m(b_{i+1}(\mu, \nu) + l^{-1}E_{i+1}(\mu, \nu)\}$$
$$+ I_{i+1}(\mu, \nu)I_i(\lambda, \nu)I_{i+1}(\lambda, \mu)$$

例如对 B_n，C_n，D_n 基本表示，有

$$(\check{R}(\lambda, \mu))^{ab}_{cd} = u_a(\lambda, \mu)\delta_{abcd} + p^{(a,b)}(\lambda, \mu)\delta_{ad}\delta_{bc}|_{a\neq b}$$
$$+ W^{(a,b)}(\lambda, \mu)\delta_{ac}\delta_{bd}|_{a<b}$$
$$+ q^{(a,c)}(\lambda, \mu)\delta_{a-b}\delta_{c-d}|_{\substack{a\neq \pm c \\ |a|<|c| 若 c<0 \\ |c|<|a| 若 a<0}} \quad (6.7.22)$$

其中 a，b，c，d 的取值为：

$$\left[-\left(\frac{N-1}{2}\right), -\left(\frac{N-1}{2}\right)+1, \cdots, \left(\frac{N-1}{2}\right)\right]$$

$$(对\ B_n: N = 2n+1;\ 对\ C_n, D_n: N = 2n)$$

对标准解有 $\Lambda_i = \lambda_i (i = 1, 2, 3)$：

$$\lambda_3 = \begin{cases} q^{-2n}, & 对\ B_n \\ -q^{-2n-1}, & 对\ C_n \\ q^{-2n+1}, & 对\ D_n \end{cases} \quad (6.7.23)$$

(6) 有理 YB 化

§3.2 中的 $\check{R}(u)$ 是满足 YBE 的最简单的有理解的形式，为实用方便将谱参数记为快度 θ，则这个解可写为：

$$\check{R}(\theta) = f(\theta)(\theta P + I)\ (\theta\ 为快度) \quad (6.7.24)$$

其中 P 为置换算符矩阵：

$$P = \sum_{\alpha,\beta} E_{\alpha\beta} \otimes E_{\beta\alpha}, \ (E_{\alpha\beta})_{ab} = \delta_{\alpha a}\delta_{\beta b} \tag{6.7.25}$$

现在仿照三角解的 YB 化，提出一个问题：

在以下条件下：

$$\begin{aligned} &\text{幺正性：} && \check{R}(\theta)\check{R}(-\theta) = I \\ &\text{初始值：} && \check{R}(\theta = 0) = \text{常数}\cdot I \\ &\text{渐近行为：} && \check{R}(\theta \to \infty) = \text{常数}\cdot P \quad (P^2 = I) \end{aligned} \tag{6.7.26}$$

如何用 YB 化的方法构造 YBE 的有理解？

由§6.6 的启发，$\check{R}(\theta)$应可视为 θ 的多项式形式，例如，

$$\check{R}(\theta) = f(\theta)(\theta^2 P + \theta M + \eta I) \tag{6.7.27}$$

其中 $f(\theta)$为归一化函数，P 为置换算符，M 为某个矩阵，η 为某常数，I 为单位矩阵，显然置换算符满足

$$\begin{cases} P_{12}P_{23}P_{12} = P_{23}P_{12}P_{23} \\ P^2 = I \end{cases} \tag{6.7.28}$$

将(6.7.27)式代入 YBE 确定出 M 与 η 的过程是有理 YB 化的一个例子，这个计算已在§3.5 中讨论过。它给出了 $0(n)(n \geqslant 3)$ 对称的因式化 S 矩阵的解，不再赘述，参见§3.5，以及文献[43～45]。

在结束本节之前，注意以下事项。至今已介绍了具有 2，3，4 个本征值的 BGR 的 YB 化方案与例子，包括三角解与有理解情况。从物理角度，如果着眼于构造物理模型，它们已经足够了。忆及第四章，仅仅一个最简单的$\check{R}(u)$的有理解，就产生相当多的完全可积量子模型。从这个意义上说太高维的三角解$\check{R}(x)$或有理解$\check{R}(u)$不会有太多物理兴趣。

当 q 不是单位根时，Jimbo 方案对李代数标准解情况给出了任意维数的 BGR 产生 YBE 三角解的问题。虽然有 Jimbo 的一般

方案，但当投影算符表示的直积分解子空间有多重数时，实现这个方案不是件容易的事。对 $SU(3)$情况可参阅文献[14]中解决的办法。Jimbo 的方案一般不适用于 q 为单位根情况。

在实际物理问题中，常常 $q \sim \exp(i\Phi)$，Φ 为磁通量，当 Φ 量子化时，q 即为单位根。因此恰恰 q 为单位根时对应更感兴趣的物理问题。从这个意义上讲，非标准解及其 YB 化反而更适用于物理的要求。

此外，我们没有涉及例外代数的 BGR 解等问题。文献上的这方面解基本上都是 A_n 型解的推广，并没有全面反映出例外群根图的 Weyl 反射性质。因此，从构造模型角度，应当寻求另外可能的途径。事实上这涉及 YBE 的本质是什么的看法问题，这个问题对即使 A_n 也存在。将在下节从一个新的角度看待 YBE 及其对称性质。

§6.8 Weyl 群与万花筒散射

在第二章 δ 函数作用势的例子中，N 个粒子排在一条线上，不同坐标 x_i 与 x_j 的交换有更深刻的含义。因为设在一个线轴上，有 $N = n + 1$ 个点，每个点用一个文字代表：1，2，…，i，…，j …，N，将文字 i 与文字 k 的交换可以作如下理解。由于 A_n 群($SU(N)$ 群)的根系由 N 维欧氏空间表示，设 N 个正交归一基为 $e_k(k = 1, 2, \cdots, N)$，则其根由 $e_i - e_k(i \neq k)$ 组成，即$\mathbb{R}^N$ 中任意矢量 x 均可由以 e_i 展开：

$$x = \sum_{i=1}^{N} x_i e_i$$

这里"坐标基"e_i 当然是算符。设想把这些 x_i 排在一条线上，每处置放一个全同粒子，那么不同坐标 x_i 与 x_j 的交换同构于 A_n 群的 Weyl 群，因为 A_n 的 Weyl 群可看作 N 个文字的对称群[47]。因此在第二章介绍 Y 算符中的置换算符 P 实际就是 A_n 群的 Weyl 群。这个观念有些像基本粒子排列的规则，过去基本粒子按色 $SU(N)$

权图排列，而现在 N 个粒子在描述根图的实$\mathbb{R}^N$ 欧氏空间中按坐标 x_i 排列。在 δ 函数作用势例子里，与两个粒子连线垂直平面是一个奇异面，即 $\delta(x_1 - x_2)$，当 $x_1 = x_2$ 时为无穷。现在两个粒子对应 $A_1(SU(2))$。推广这个概念，A_n 将有更多的奇异面，个数为 $N!$，这时 δ 函数作用势推广为[46]：

$$-\Delta_N\psi - 2c\sum_{\alpha>0}\delta((x, \alpha))\psi = (k, k)\psi \qquad (6.8.1)$$

其中 α 为李群的正根，(x, α)为$\mathbb{R}^N$ 中矢量 x 与正根 α 的内积，k 为 $\mathbb{R}^N$ 中波矢量，(k, k)为本征值 $\sum_{i=1}^{N}k_i^2$ 的推广。对 A_n 成立：

$$\sum_{\alpha>0}\delta((x, \alpha)) = \sum_{j>i}\delta(x_j - x_i) \qquad (6.8.2)$$

现在推广这一想法。认为(6.8.1)式对任意单李代数都对，这就是 Sutherland 的基本思想[46]，此时波函数可写为

$$\psi_{g_1}(x) = \sum_{g\in G}A(g_1, g)\exp(\mathrm{i}x\cdot k_g) \qquad (6.8.3)$$

其中 G 为 Weyl 群，$g \in G$ 为 Weyl 群的群元，k_g 为经过 Weyl 反射后新的动量。用 σ_j 表示相关于 α_j 根的 Weyl 反射元素。g_1 为初始选定的固定元素，也可取为恒元，以下略去它。当作 Weyl 反射时有

$$A(\sigma_j g) = Y(g, \sigma_j)A(g) \qquad (6.8.4)$$

(1) A_n 群

α_j 引起相邻置换 $(c = 1)$

$$Y(g, \alpha_j) = \frac{1 + \mathrm{i}\left(k_{g_{i+1}} - k_{g_i}\right)P_{i,i+1}}{1 - \mathrm{i}\left(k_{g_{i+1}} - k_{g_i}\right)} \qquad (6.8.5)$$

可记为

$$Y(g, \sigma_j) = Y^{j,j+1}\left(k_{g_{i+1}} - k_{g_i}\right)$$

注意到对于任何 Weyl 反射，均成立

$$\begin{cases}\sigma_j^2 = 1 \\ \sigma_j\sigma_{j+1}\sigma_j = \sigma_{j+1}\sigma_j\sigma_{j+1} \\ \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i, \quad |i-j| \geqslant 2\end{cases} \tag{6.8.6}$$

于是(6.8.4)式导致通常的 YBE：

$$\begin{aligned} &Y^{j,j+1}(\lambda-\mu)Y^{j+1,j+2}(\nu-\mu)Y^{j,j+1}(\nu-\lambda) \\ &= Y^{j+1,j+2}(\nu-\lambda)Y^{j,j+1}(\nu-\mu)Y^{j+1,j+2}(\lambda-\mu) \end{aligned} \tag{6.8.7}$$

其中

$$\begin{cases}\lambda = k_{gj+1},\ \mu = k_{gj+2},\ \nu = k_{gj} \\ Y^{j,j+1}(\lambda-\nu)Y^{i,i+1}(\mu-\eta) \\ \qquad = Y^{i,i+1}(\mu-\eta)Y^{j,j+1}(\lambda-\nu), \quad |i-j| \geqslant 2\end{cases}$$

它们就是通常的 YBE。

(2) B_n 群

这时 Weyl 群可看作是由一切将 n 个文字作任意置换，并同时改变其中任意个文字的符号的变换所组成的群[47]。从 Dynkin 图上去实现可选择对前 $(n-1)$ 个根，它与 A_n 相同，但最后一个点 α_n 处反符号，亦即 σ_{α_i} 作用在 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 上，前 $n-1$ 个为置换，而 $\sigma_{\alpha_n}x_n = -x_n$，于是有

$$A(\sigma_i g) = Y^{j,j+1}\left(k_{g_j} - k_{g_{j+1}}\right)A(g) \quad (j \leqslant n-1) \tag{6.8.8}$$

$$A(\sigma_n g) = T^{(n)}(k_{g_n})A(g) \tag{6.8.9}$$

其中

$$T^{(n)}\left(k_{g_n}\right) = \frac{1 + \mathrm{i}k_{g_n}/cK^{(n)}}{-1 + k_{g_n}/c}$$

$K^{(n)}$ 作用在 $A(g)$ 上，使得 g_n 变为 $-g_n$。现在相邻三点的自洽性的

相容关系为：

$$A(g_1, \alpha_j\alpha_{j+1}\alpha_j g) = A(g_1, \alpha_{j+1}\alpha_j\alpha_{j+1}g), \ j \leqslant n-2 \tag{6.8.10}$$

$$A(g_1, \alpha_{n-1}\alpha_n\alpha_{n-1}\alpha_n g) = A(g_1, \alpha_n\alpha_{n-1}\alpha_n\alpha_{n-1}g) \tag{6.8.11}$$

$$A(g_1, \alpha_j\alpha_m g) = A(g_1, \alpha_m\alpha_j g), \ m, j \leqslant n-2; \ |m-j| \leqslant 2 \tag{6.8.12}$$

$$A(g_1, \alpha_j^2 g) = A(g_1, g) \tag{6.8.13}$$

$$A(g_1, \alpha_j\alpha_n g) = A(g_1, \alpha_n\alpha_j g), \ j \leqslant n-2 \tag{6.8.14}$$

(6.8.10)式与(6.8.11)式导致与(6.8.7)式相同的 YBE，与 A_{n-1} 没什么本质区别，但(6.8.11)式却是一种完全新型的关系。注意 $K^{(n)}$ 只依赖于 Dynkin 图最右端点处，如图 6.9 所示。

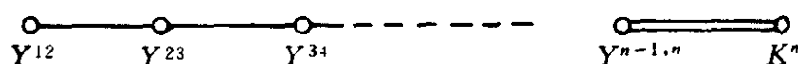


图 6.9

(6.8.10)式～(6.8.14)式导致了下列自洽条件：

$$Y^{j,j+1}(\mu-\eta)Y^{j+1,j+2}(\lambda-\eta)Y^{j,j+1}(\lambda-\mu)$$
$$= Y^{j+1,j+2}(\lambda-\mu)Y^{j,j+1}(\lambda-\eta)Y^{j+1,j+2}(\mu-\eta) \tag{6.8.15}$$

$$\forall\ j \leqslant n-2$$

$$Y^{n-1,n}(\lambda-\mu)K^n(\lambda)Y^{n-1,n}(\lambda+\mu)K^n(\mu)$$
$$= K^n(\mu)Y^{n-1,n}(\lambda+\mu)K^n(\lambda)Y^{n-1,n}(\lambda-\mu) \tag{6.8.16}$$

$$Y^{i,i+1}(\lambda-\mu)Y^{j,j+1}(\eta-\nu)$$
$$= Y^{j,j+1}(\eta-\nu)Y^{i,i+1}(\lambda-\mu)$$

$$\forall\ j, i \leqslant n-1 \quad |i-j| \leqslant 2$$

$$Y^{i,i+1}(\lambda-\mu)Y^{i,i+1}(\mu-\lambda) = I$$

$$K^n(\lambda)K^n(-\lambda) = I$$

$$Y^{j,j+1}(\lambda-\mu)K^n(\nu) = K^n(\nu)Y^{j,j+1}(\lambda-\mu)$$

$$j \leqslant n-2$$

(6.8.16)式称为反射方程，而(6.8.15)式为通常的 YBE。引入

$$\check{R}^{12}(xy^{-1}) = Y^{n-1,n}(\lambda-\mu),\ \overset{2}{K}(x) = K^{(n)}(\lambda)$$

$$x = \mathrm{e}^{\lambda},\ y = \mathrm{e}^{\mu}$$

(6.8.16)式变为：

$$\check{R}^{12}(xy^{-1})\,\overset{2}{K}(x)\,\check{R}^{12}(xy)\,\overset{2}{K}(y)$$

$$= \overset{2}{K}(y)\,\check{R}^{12}(xy)\,\overset{2}{K}(x)\,\check{R}^{12}(xy^{-1}) \tag{6.8.17}$$

它有非常好的图示(见图 6.10)。

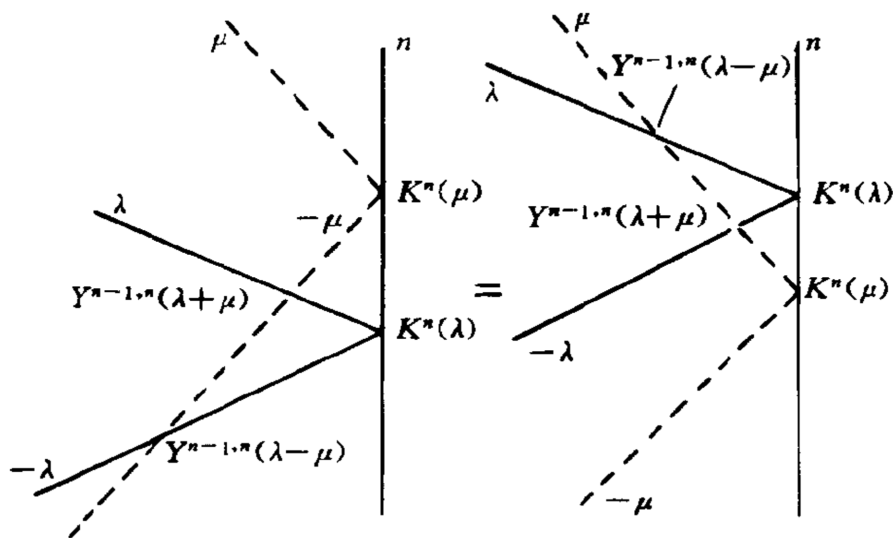


图　6.10

由于这种与根图相联系的散射与 Weyl 反射相关，Weyl 反射导致根的互换，颇像万花筒对称图案，故称以上图象为万花筒散射。详细的讨论可参阅文献[48]。(6.8.17)式型反射方程有非常重要的物理意义，将在下节继续讨论。

(3) G_2 模型

其 Weyl 群是两维平面上的六角形，元素为

$$\begin{cases} g_m = r\exp\left\{\mathrm{i}\left(\theta + \dfrac{m\pi}{3}\right)\right\} \\ g_{-m} = r\exp\left\{\mathrm{i}\left(-\theta + \dfrac{m\pi}{3}\right)\right\} \\ \quad (m = 0, 1, \cdots, 5) \end{cases} \tag{6.8.18}$$

可选 g_0 与 g_{-1} 为基本独立矢量，用 α_0 与 α_1 表示，它们满足

$$\begin{cases} \alpha_0^2 = \alpha_1^2 = 1 \\ (\alpha_1\alpha_0)^6 = 1 \end{cases} \tag{6.8.19}$$

α_0 沿水平轴，而 α_1 与 α_0 夹角为 $\pi/3$。这时与 A_n, B_n, C_n, D_n 情况不同，相应 Y 算符必须区别二维指标，相应动量亦为二维，满足

$$\begin{cases} Y_0(k_{g_1})Y_0(-k_{g_2}) = I \\ Y_1\left(\dfrac{1}{2}k_{g_1} + \dfrac{1}{2}k_{g_2}\right)Y_1\left(\dfrac{1}{2}k_{g_1} - \dfrac{1}{2}\sqrt{3}\,k_{g_2}\right) = I \end{cases} \tag{6.8.20}$$

其中

$$\begin{cases} Y_j(\lambda) = \dfrac{c + \mathrm{i}\lambda\alpha_j}{-c + \mathrm{i}\lambda}, \; j = 0, 1 \\ k_g = (k_{g_1}, k_{g_2}) = k_g(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \end{cases} \tag{6.8.21}$$

以及 Weyl 群导致的 Bethe-Ansatz 的相容性：

$$\begin{aligned} & Y_1\left(\frac{1}{2}k_{g_1} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,k_{g_2}\right)Y_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\,k_{g_1} - \frac{1}{2}k_{g_2}\right)Y_1(k_{g_2}) \\ & \cdot Y_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\,k_{g_1} + \frac{1}{2}k_{g_2}\right)Y_1\left(\frac{1}{2}k_{g_1} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,k_{g_2}\right)Y_0(-k_{g_2}) \\ & \quad = Y_0(k_{g_2})Y_1\left(\frac{1}{2}k_{g_1} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,k_{g_2}\right)Y_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\,k_{g_1} + \frac{1}{2}k_{g_2}\right) \end{aligned}$$

$$\cdot Y_1(k_{g_1})Y_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}k_{g_1}-\frac{1}{2}k_{g_2}\right)Y_1\left(\frac{1}{2}k_{g_1}-\frac{1}{2}\sqrt{3}k_{g_1}\right) \tag{6.8.22}$$

也就是说，全面反映 G_2 的 Weyl 群性质的 YBE 必须是二维的，而且每侧包含 6 个 R 矩阵，这与(6.8.19)式是相关的。通常李代数有 $(\alpha_i\alpha_j)^3=1$，所以导致 YBE 两端各有三个 R 矩阵。从这个意义上讲，全面反映例外群的 YBE 是更为复杂的，因为一般情况下，维数高会导致多个联立矩阵方程组。因此，有些例外代数 R 矩阵的解虽然本质上是 A_n 类型解的简单推广，并没有全面反映出例外群的根图特点，但不失为比较现实的一种作法。

§6.9　反射方程、守恒量

(1) 反射方程及守恒量

如我们所熟悉的，用谱参数 $x=e^u$(或 $x=e^{-u}$)，$y=e^v$(或 $y=e^{-v}$)，YBE 可写为：

$$\check{R}_{12}(x)\check{R}_{23}(xy)\check{R}_{12}(y)=\check{R}_{23}(y)\check{R}_{12}(xy)\check{R}_{23}(x)$$

由于谱参数间的关系是相对的，也可写成

$$\check{R}_{12}(xy^{-1})\check{R}_{23}(x)\check{R}_{12}(y)=\check{R}_{23}(y)\check{R}_{12}(x)\check{R}_{23}(xy^{-1}) \tag{6.9.1}$$

或矩阵元形式

$$\check{R}(xy^{-1})_{ij}^{i'j'}\check{R}(x)_{j'k}^{k'p}\check{R}(y)_{i'k'}^{mn}=\check{R}(y)_{jk}^{j'k'}\check{R}(x)_{ij'}^{mi'}\check{R}(xy^{-1})_{i'k'}^{np} \tag{6.9.2}$$

其中相重指标代表求和。正如上节所描述的，(6.8.17)式连同 RTT 关系

$$\check{R}(xy^{-1})(T(x)\otimes T(y))=(T(y)\otimes T(x))\check{R}(xy^{-1}) \tag{6.9.3}$$

或

$$R(xy^{-1})\overset{1}{T}(x)\overset{2}{T}(y)=\overset{2}{T}(y)\overset{1}{T}(x)R(xy^{-1}) \tag{6.9.4}$$

涉及到边界性质。包含边界反射行为的方程已有许多讨论，例如文献[49～51]，给出：

$$\begin{cases} R(xy^{-1})\overset{1}{K}(x)\widetilde{R}(xy)\overset{2}{K}(y)=\overset{2}{K}(y)R(xy)\overset{1}{K}(x)\widetilde{R}(xy^{-1}) \\ \widetilde{R}(x)=PR(x)P \end{cases} \tag{6.9.5}$$

其中 $\overset{1}{K}=K\otimes 1$，$\overset{2}{K}=1\otimes K$，$K$ 矩阵反映了边界反射，如果 R 为 $N^2\times N^2$ 矩阵，则 K 为 $N\times N$ 矩阵。$K(x)$矩阵可以是 c 数矩阵，也可以像 RTT 关系 T 矩阵那样定义余模(co-module)代数[50, 51]。上节中用具体模型讨论了有理形式的反射方程，现在从(6.9.5)式出发讨论一般特性。在 YBE 解中有一类(如自旋 1/2 模型)R 矩阵具有很好的对称性：

$$R(x)=PR(x)P=\widetilde{R}(x) \tag{6.9.6}$$

例如(6.7.7)式即满足(6.9.6)式，那么这时(6.9.5)式即可改写为：

$$\begin{aligned}&\check{R}(xy^{-1})\overset{1}{K}(x)\check{R}(xy)\overset{1}{K}(y)\\&=\overset{1}{K}(y)\check{R}(xy)\overset{1}{K}(x)\check{R}(xy^{-1})\end{aligned} \tag{6.9.7}$$

或

$$\begin{aligned}&\check{R}(xy^{-1})\overset{2}{K}(x)\check{R}(xy)\overset{2}{K}(y)\\&=\overset{2}{K}(y)\check{R}(xy)\overset{2}{K}(x)\check{R}(xy^{-1})\end{aligned} \tag{6.9.8}$$

它们的图示见图 6.10。反射方程(6.9.8)式或(6.9.7)式有如下重

要性质：

如果 $K(x)$满足反射方程(6.9.7)式，$R(x)$矩阵满足(6.9.6)式的对称形式，并且 K 矩阵元是 c 数，那么(x_0 为一固定参数)

$$\tilde{K}(x) = T(x)K(xx_0^{1/2})\{T(x^{-1}x_0^{-1})\}^{-1} \qquad (6.9.9)$$

必满足下面的反射方程：

$$R(xy^{-1})\tilde{K}(x)R(xyx_0)\tilde{K}(y) = \tilde{K}(y)R(xyx_0)\tilde{K}(x)R(xy^{-1}) \qquad (6.9.10)$$

[证明] 考虑到 $R(x)$矩阵的性质：

幺正条件：$\check{R}(x^{-1}) = \rho(x)(\check{R}(x))^{-1}$

$$R(x^{-1}) = \rho(x)R(x)^{-1}$$

归一条件：$\check{R}(x=1) = 常数 \cdot I$，$R(x=1) = 常数 \cdot P$

渐近行为：$\check{R}(x = e^u \to \infty) = S$，$\check{R}(x = e^u \to 0) = S^{-1}$ (6.9.11)

其中 $\rho(x)$为归一标量函数，则有

$$\{R(xy^{-1})\}^{-1} = \{\rho(xy^{-1})\}^{-1}R(x^{-1}y)$$

并将 $x \to x^{-1}x_0^{-1}$，则由(6.9.4)式的变形

$$\begin{aligned}&(\overset{1}{T}(x))^{-1}\{R(xy^{-1})\}^{-1}\overset{2}{T}(y)\\&= \overset{2}{T}(y)\{R(xy^{-1})\}^{-1}(\overset{1}{T}(x))^{-1}\end{aligned} \qquad (6.9.12)$$

可以写为

$$\begin{aligned}&\{\overset{1}{T}(x^{-1}x_0^{-1})\}^{-1}R(xyx_0)\overset{2}{T}(y)\\&= \overset{2}{T}(y)R(xyx_0)\{\overset{1}{T}(x^{-1}x_0^{-1})\}^{-1}\end{aligned} \qquad (6.9.13)$$

从而有

$$R(xy^{-1})\overset{1}{\tilde{K}}(x)R(xyx_0)\overset{2}{\tilde{K}}(y)$$

$$= R(xy^{-1})\overset{1}{T}(x)\overset{1}{K}(xx_0^{1/2})\{T(x^{-1}x_0^{-1})^{-1}R(xyx_0)\overset{2}{T}(y)\}$$

$$\cdot \overset{2}{K}(yx_0^{1/2})\{\overset{2}{T}(y^{-1}x_0^{-1})\}^{-1}$$

$$= R(xy^{-1})\overset{1}{T}(x)\overset{1}{K}(xx_0^{1/2})\overset{2}{T}(y)R(xyx_0)\{\overset{1}{T}(x^{-1}x_0^{-1})\}^{-1}$$

$$\cdot \overset{2}{K}(yx_0^{1/2})\{\overset{2}{T}(y^{-1}x_0^{-1})\}^{-1}$$

$$= \{R(xy^{-1})\overset{1}{T}(x)\overset{2}{T}(y)\}\overset{1}{K}(xx_0^{1/2})R(xyx_0)\overset{2}{K}(yx_0^{1/2})$$

$$\cdot \{\overset{1}{T}(x^{-1}x_0^{-1})\}^{-1}\{\overset{2}{T}(y^{-1}x_0^{-1})\}^{-1}$$

$$= \overset{2}{T}(y)\overset{1}{T}(x)\{R(xy^{-1})\overset{1}{K}(xx_0^{1/2})R(xyx_0)\overset{2}{K}(yx_0^{1/2})\}$$

$$\cdot \{\overset{1}{T}(x^{-1}x_0^{-1})\}^{-1}\{\overset{2}{T}(y^{-1}x_0^{-1})\}^{-1}$$

将(6.9.5)式中 $x \to xx_0^{1/2}$, $y \to yx_0^{1/2}$，则上式第一个大括号内用(6.9.5)式右端代替，得

$$R(xy^{-1})\overset{1}{\tilde{K}}(x)R(xyx_0)\overset{2}{\tilde{K}}(y)$$

$$= \overset{2}{T}(y)\overset{1}{T}(x)\overset{2}{K}(yx_0^{1/2})R(xyx_0)\overset{1}{K}(xx_0^{1/2})R(xy^{-1})$$

$$\cdot \{\overset{1}{T}(x^{-1}x_0^{-1})\}^{-1}\{\overset{2}{T}(y^{-1}x_0^{-1})\}^{-1}$$

再利用(6.9.13)式的变形

$$R(x^{-1}y)\{\overset{1}{T}(x)\}^{-1}\{\overset{2}{T}(y)\}^{-1} = \{\overset{2}{T}(y)\}^{-1}\{\overset{1}{T}(x)\}^{-1}R(x^{-1}y)$$

并将其中 $x \to x^{-1}x_0$, $y \to y^{-1}x_0^{-1}$，则有

$$R(xy^{-1})\overset{1}{\tilde{K}}(x)R(xyx_0)\overset{2}{\tilde{K}}(y)$$

$$= \overset{2}{T}(y)\overset{2}{K}(yx_0^{1/2})\overset{1}{T}(x)R(xyx_0)$$

$$\cdot \overset{1}{K}(xx_0^{1/2})\{\overset{2}{T}(y^{-1}x_0^{-1})\}^{-1}\{\overset{1}{T}(x^{-1}x_0^{-1})\}^{-1}R(xy^{-1})$$

$$= \overset{2}{T}(y)\overset{2}{K}(yx_0^{1/2})\{\overset{2}{T}(y^{-1}x_0^{-1})\}^{-1}R(xyx_0)\overset{1}{T}(x)$$

$$\cdot \overset{1}{K}(xx_0^{1/2})\{\overset{1}{T}(x^{-1}x_0^{-1})\}^{-1}R(xy^{-1})$$

$$= \overset{2}{\tilde{K}}(y)R(xyx_0)\overset{1}{\tilde{K}}(x)R(xy^{-1})$$

于是(6.9.10)式得证。上面稍微详细地给出了推导,因为这类运算是有反射矩阵 K 时的典型运算。当 $x_0 = 1$ 时,(6.9.10)式说明当 $K(x)$满足(6.9.5)式,则$\tilde{K}(x)$必定满足(6.9.5)式。在这个性质的基础上,可证明以下定理[52]。

定理:如果

$$\begin{cases} R(x)^{t_1t_2} = R(x), \text{ 即 } R(x)_{cd}^{ab} = R(x)_{ab}^{cd} \\ R(x^{-1})^{t_2}R(xx_0)^{t_1} = g(x, x_0)I \end{cases} \tag{6.9.14}$$

其中 $g(x, x_0)$为任意函数,t_1 与 t_2 分别表示对 1 空间与 2 空间的矩阵转置,同时 $K(x)$是 c 数矩阵,则

$$\tau(x) = \mathrm{tr}\{K(x)^{-1}\tilde{K}(x)\}$$

$$= \mathrm{tr}\{K(x)^{-1}T(x)K(xx_0^{1/2})T(x^{-1}x_0^{-1})^{-1}\} \tag{6.9.15}$$

满足对易关系

$$[\tau(x), \tau(y)] = 0 \tag{6.9.16}$$

为证明这个重要关系式,它引出了有反射时的守恒量族,首先给出要用到的关系式。对反射方程(6.9.5)两端取逆,有

$$R(xy^{-1})^{-1}\overset{1}{K}(x)^{-1}R(xy)^{-1}\overset{2}{K}(y)^{-1}$$

$$= \overset{2}{K}(y)^{-1}R(xy)^{-1}\overset{1}{K}(x)^{-1}R(xy)$$

再利用幺正性及(6.9.6)式,上式变为

$$R(x^{-1}y)\overset{1}{K}(x)^{-1}R(x^{-1}y^{-1})\overset{2}{K}(y)^{-1}$$

$$=\overset{2}{K}(y)^{-1}R(x^{-1}y^{-1})\overset{1}{K}(x)^{-1}R(x^{-1}y)$$

再对 1，2 空间取转置，注意到(6.9.15)式，有

$$R(x^{-1}y)\{\overset{1}{K}(x)^{-1}\}^{t_1}R(x^{-1}y^{-1})\{\overset{2}{K}(y)^{-1}\}^{t_2}$$

$$=\{\overset{2}{K}(y)^{-1}\}^{t_2}R(x^{-1}y^{-1})\{\overset{1}{K}(x)^{-1}\}^{t_1}R(x^{-1}y)$$

注意到，对矩阵 A，B 有

$$\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(A^tB^t),\ \mathrm{tr}_{12}(A^{t_2}B^{t_1})=t_{12}(A^{t_1t_2}B)$$

利用以上关系式，得

$$\tau(x)\tau(y)$$

$$=\mathrm{tr}_1\{(\overset{1}{K}(x)^{-1})^{t_1}(\overset{1}{\tilde{K}}(x))^{t_1}\}\mathrm{tr}_2\{(\overset{2}{K}(y)^{-1})\tilde{K}(y)\}$$

$$=\mathrm{tr}_{12}\{(\overset{1}{K}(x)^{-1})^{t_1}\overset{2}{K}(y)^{-1}(\overset{1}{\tilde{K}}(x))^{t_1}\overset{2}{\tilde{K}}(y)\}$$

$$=\mathrm{tr}_{12}\{(\overset{1}{K}(x)^{-1})^{t_1}\overset{2}{K}(y)^{-1}g(xy,x_0)^{-1}$$

$$\cdot R(x^{-1}y^{-1})^{t_2}R(xyx_0)^{t_1}(\overset{1}{\tilde{K}}(x))^{t_1}\overset{2}{\tilde{K}}(y)\}$$

$$=g(xy,x_0)^{-1}\mathrm{tr}_{12}\{(\overset{1}{K}(x)^{-1})^{t_1}R(x^{-1}y^{-1})$$

$$\cdot[(\overset{2}{K}(y)^{-1})^{t_2}]^{t_2}[\overset{1}{\tilde{K}}(x)R(xyx_0)\overset{2}{\tilde{K}}(y)]^{t_1}\}$$

$$=g(xy,x_0)^{-1}\mathrm{tr}_{12}\{(\overset{1}{K}(x)^{-1})^{t_1}R(x^{-1}y^{-1})$$

$$\cdot[(\overset{2}{K}(y)^{-1})^{t_2}]^{t_1t_2}\overset{1}{\tilde{K}}(x)R(xyx_0)\overset{2}{\tilde{K}}(y)\}$$

$$=g(xy,x_0)^{-1}\rho(xy^{-1})^{-1}\mathrm{tr}_{12}\{R(x^{-1}y)(\hat{K}(x)^{-1})^{t_1}$$

$$\cdot R(x^{-1}y^{-1})[(\overset{2}{K}(y)^{-1})^{t_2}]^{t_1t_2}$$

$$\cdot R(xy^{-1})\overset{1}{\tilde{K}}(x)R(xyx_0)\overset{2}{\tilde{K}}(y)\}$$

$$= g(xy,\ x_0)^{-1}\rho(xy^{-1})^{-1}\mathrm{tr}_{12}\{(\overset{2}{K}(y^{-1}))^{t_2}R(x^{-1}y^{-1})$$

$$\cdot(\overset{1}{K}(x)^{-1})^{t_1}R(x^{-1}y)^{t_1t_2}$$

$$\cdot\overset{2}{\tilde{K}}(y)R(xyx_0)\overset{1}{\tilde{K}}(x)R(xy^{-1})\}$$

$$= g(xy,\ x_0)^{-1}\rho(xy^{-1})^{-1}\mathrm{tr}_{12}\{(\overset{2}{K}(y)^{-1})^{t_2}R(x^{-1}y^{-1})$$

$$\cdot(\overset{1}{K}(x)^{-1})^{t_1}R(x^{-1}y)$$

$$\cdot[\overset{2}{\tilde{K}}(y)R(xyx_0)\overset{1}{\tilde{K}}(x)R(xy^{-1})]^{t_1t_2}\}$$

$$= g(xy,\ x_0)^{-1}\mathrm{tr}_{12}\{(\overset{2}{K}(y)^{-1})^{t_2}R(x^{-1}y^{-1})(\overset{1}{K}(x)^{-1})^{t_1}$$

$$\cdot\rho(xy^{-1})^{-1}R(x^{-1}y)R(xy^{-1})$$

$$\cdot[\overset{2}{\tilde{K}}(y)R(xyx_0)\overset{1}{\tilde{K}}(x)]^{t_1t_2}\}$$

$$= g(xy,\ x_0)^{-1}\mathrm{tr}_{12}\{(\overset{2}{K}(y)^{-1})^{t_2}R(x^{-1}y^{-1})(\overset{1}{K}(x)^{-1})^{t_1}$$

$$\cdot[\overset{2}{\tilde{K}}(y)R(xyx_0)\overset{1}{\tilde{K}}(x)]^{t_2}\}$$

$$= \mathrm{tr}_{12}\{(\overset{2}{K}(y)^{-1})^{t_2}\hat{K}(x)^{-1}g(xy,\ x_0)^{-1}$$

$$\cdot R(x^{-1}y^{-1})^{t_2}R(xyx_0)^{t_1}(\overset{2}{\tilde{K}}(y))^{t_2}\overset{1}{\tilde{K}}(x)$$

$$= \mathrm{tr}_{12}\{(\overset{2}{K}(y)^{-1})^{t_2}(\overset{2}{\tilde{K}}(y))^{t_2}\overset{1}{K}(x)^{-1}\overset{1}{\tilde{K}}(x)\}$$

$$= \mathrm{tr}_{2}\{(\overset{2}{K}(y)^{-1})^{t_2}(\overset{2}{\tilde{K}}(y))^{t_2}\}\mathrm{tr}_{1}\{\overset{1}{K}(x)^{-1}\overset{1}{\tilde{K}}(x)\}$$

$$= \tau(y)\tau(x)$$

(6.9.16)式得证。上面有意写得特别详细，因为一般文献中不易看得很清楚。(6.9.16)式表示，选 x_0 使得(6.9.14)式被满足，且 $T(x)$满足(6.9.4)式，则

$$\tau(x) = \mathrm{tr}\{T(x^{-1}x_0^{-1})^{-1}K(x)^{-1}T(x)K(xx_0^{1/2})\} \tag{6.9.17}$$

对 x 的展开式是守恒量，其中 K 为满足(6.9.5)式的 c 数解。

$$\tau(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^n J^{(n)} \tag{6.9.18}$$

中 $J^{(n)}$可作为守恒量，但(6.9.6)式是个比较严的限制，如何去掉(6.9.6)式的限制又能构造出 $\tau(x)$来，是个有兴趣的问题。

现在以自旋 1/2 链为例。取(6.7.7)式为$\check{R}(x)$，即

$$R(x) = \begin{pmatrix} xq - x^{-1}q^{-1} & & & \\ & x - x^{-1} & w & \\ & w & x - x^{-1} & \\ & & & xq - x^{-1}q^{-1} \end{pmatrix}$$

$$(w = q - q^{-1}) \tag{6.9.19}$$

它满足(6.9.6)式，且由(6.9.14)式

$$R_{ib}^{aj}(x^{-1})R_{id}^{cj}(xx_0) = g(x,\ x_0)\delta_{ac}\delta_{bd}$$

确定出

$$x_0 = q^{-2}$$

同时解反射方程(6.9.5)式，得到 $K(x)$的 c 数解[50~52]：

$$K(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} \tag{6.9.20}$$

注意到

$$T(x)^{-1} = \{\det_q T(x)\}^{-1} \begin{pmatrix} T_{22}(q^{-1}x) & -T_{12}(q^{-1}x) \\ -T_{21}(q^{-1}x) & T_{11}(q^{-1}x) \end{pmatrix} \tag{6.9.21}$$

其中

$$\det_q T(x) = T_{11}(x)T_{22}(q^{-1}x) - T_{12}(x)T_{21}(q^{-1}x) \tag{6.9.22}$$

$\det_q T(x)$与 $T(y)_{ab}$都对易:

$$[\det_q T(x), T(y)_{ab}] = 0 \tag{6.9.23}$$

亦即 $\det_q T(x)$为中心,所以在定义 $\tau(x)$时可以把它省略掉,而仍满足(6.9.16)式。引入

$$\begin{aligned} \tilde{T}(x^{-1}q) &= \det_q T(x^{-1}x_0^{-1})\{T(x^{-1}x_0^{-1})\}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} T(qx^{-1})_{22} & -T(qx^{-1})_{12} \\ -T(qx^{-1})_{21} & T(qx^{-1})_{11} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{6.9.24}$$

易验证

$$\tilde{T}(x^{-1}q) = \sigma_2 T(x^{-1}q)\sigma_2$$

于是得到:

$$\tau(x) = \mathrm{tr}\{K(x)^{-1}T(x)K(xq^{-1})\tilde{T}(x^{-1}q)^{-1}\} \tag{6.9.25}$$

将其中 $x \to xq^{1/2}$,仍记 $T(xq^{1/2})$为 $T(x)$便得到

$$\tau(x) = \mathrm{tr}\{K(xq^{1/2})^{-1}T(x)K(xq^{-1/2})\tilde{T}(x^{-1})\} \tag{6.9.26}$$

这正是文献[52]中给出的结果。因此(6.9.19)式给出的 XXZ 模型,在周期性边界条件或无穷长链情况下,其哈密顿量是由 $\mathrm{tr}T(x)$展开式生成的。但在有边界反射情况下,除 YBE 的(6.9.1)式外,还有边界方程(6.9.5),矩阵 $K(x)$反映了格点长度为 N 的 XXZ 模型,需要考虑格点 $n=1$ 与 N 处的影响,即如(6.9.26)

式所示的哈密顿量，由于 $q=e^{\lambda}$，即

$$H=\sum_{n=1}^{N-1}\left(\sigma_n^1\sigma_{n+1}^1+\sigma_n^2\sigma_{n+1}^2-\frac{q+q^{-1}}{2}\sigma_n^3\sigma_{n+1}^3\right)+\left(\frac{q-q^{-1}}{2}\right)(\sigma_1^3-\sigma_N^3) \tag{6.9.27}$$

用量子逆散射方法可以确定 $\tau(u)$ 的本征值[52, 53]。当 q 为单位根时参阅文献[14]的讨论，不再赘述。

(2) 反射方程的 YB 化

正如同 YBE 的解 $\check{R}(x)$ 与 BGR $\check{R}\equiv S=\lim\limits_{x\to\infty}\check{R}(x)$ 一样，反射方程(6.9.5)也可以取谱参数的极限，当 $x,y\to\infty$ $(x=e^u)$，且 $xy^{-1}\to\infty$ 时，与 S 相应有

$$R=\lim_{x\to\infty}R(x)=PS,\quad \check{R}(x)=PR(x) \tag{6.9.28}$$

$$K=\lim_{x\to\infty}K(x),\quad \tilde{R}=PRP=SP$$

(6.9.5)式变为

$$R\overset{1}{K}\tilde{R}\overset{2}{K}=\overset{2}{K}R\overset{1}{K}\tilde{R} \tag{6.9.29}$$

由于 P 为置换算符，知道 BGR 解便可以知道 R 与 $\tilde{R}$，这样解(6.9.5)式变成已知 BGR 求解矩阵 K 的问题。已知(6.9.29)式中 K 的解，得到满足依赖于谱参数的反射方程(6.9.5)的过程称为反射方程的 YB 化，为了方便，先把(6.9.29)式变为 BGR 形式，容易用分量形式证明(6.9.29)式与(6.9.5)式可写为：

$$\check{R}\overset{1}{K}\check{R}\overset{1}{K}=\overset{1}{K}\check{R}\overset{1}{K}\check{R} \tag{6.9.30}$$

$$\check{R}(xy^{-1})\overset{1}{K}(x)\check{R}(xy)\overset{1}{K}(y)=\overset{1}{K}(y)\check{R}(xy)\overset{1}{K}(x)\check{R}(xy^{-1}) \tag{6.9.31}$$

为了简单，取 $\check{R}$ 为(6.2.16)形式，问：第一步如何得到 K，第二

步如何得到 $K(x)$?

第一步是直接解(6.9.30)式。令

$$K = \begin{pmatrix} Z & Y \\ X & U \end{pmatrix} \tag{6.9.32}$$

将(6.9.32)式代入(6.9.30)式得到 X, Y, Z 与 U 应当满足的对易关系:

$$\begin{cases} UX = q^{-2}XU, \quad UY = q^2YU \\ [U, Z] = 0, \quad [X, Z] = -q^{-1}wUX \\ [X, Y] = q^{-1}w(UZ - U^2) \\ [Y, Z] = q^{-1}wYU, \quad w = q - q^{-1} \end{cases} \tag{6.9.33}$$

它们也组成一个代数,有两个 Casimir(中心元素):

$$c_1 = U + q^2Z, \; c_2 = \det{}_qK = UZ - q^2YX \tag{6.9.34}$$

可证明 K 的逆为

$$K^{-1} = c_2^{-1}(c_1I - q^2K) \tag{6.9.35}$$

由于

$$-q^2K^2 + c_1K = c_2$$

$$K^{-2} = c_2^{-2}\left(c_1^2I - 2c_1q^2K_1 + q^4K^2\right)$$

可证:

$$c_2^2[R, K_1^{-2}] + q^4[R, K_1^2] = 0 \tag{6.9.36}$$

它对以后计算有用。

由于 $\check{R}$ 具有本征值 q 与 $-q^{-1}$,取 $\check{R}$ 的 YB 化

$$\check{R}(x) = x\check{R} - x^{-1}\check{R}^{-1}$$

并设

$$K(x) = K + \alpha(x)c_2K^{-1} \tag{6.9.37}$$

将它们代入(6.9.31)式可决定出

$$\alpha(x)=\pm q^{-2}x^{-2} \tag{6.9.38}$$

因为 $K(x)$ 可差任意公因子,故可取

$$\begin{cases}K(x)=xK+\alpha c_2x^{-1}K^{-1}\\ \alpha=\pm q^{-2}\end{cases} \tag{6.9.39}$$

同理,如取 $\check{R}$ 满足(6.2.18)即非标准解,则得

$$K(x)=(x-x^{-1})K-q^{-2}xc_1I \tag{6.9.40}$$

对于任何具有两个分立本征值的 $\check{R}$,K 可以作更广泛的 YB 化,可参阅文献[51]。当讨论常数解时,$\check{R}$ 标准解(6.2.16)式决定的 $K(x)$ 正是(6.9.39)式。

上述的作法还可以推广到更多的顶角形式的 BGR,基本计算的精神都是与以上处理类似的。

最后要指出,由§6.8业已看到,有理形式的 B_n 类型万花筒散射,正是 A_n 类型的 YBE 加上反射方程(6.9.16)。这个现象说明有时为了考虑反射(边界)效应,最简单的方案是扩大通常 A_n 代数到 B_n 代数,这样相当于考虑了 A_n 的反射问题。而一条线上 N 个点的置换正是 A_N 的 Weyl 群,其简单的物理模型就是 N 个 δ 函数作用势。与 B_n 相应的物理模型已在§5.4中讨论过,(5.4.24)式正是 δ 函数作用势具有边界反射的推广。至于有反射情况的 YBE 型的解的物理应用,以后还会有讨论。

参 考 文 献

1. Baxter R J. Exactly solved models in statistical mechanics. London: Academic Press, 1982, 及所列文献
2. Jimbo M. Introduction to the Yang-Baxter Equation. In: Yang C N, Ge M L, eds. Braid Groups, Knot Theory and Statistical Mechanics. Singapore: World

Scientific Publ Co Ltd, 1989.111, 及所列文献

3. Baxter R J, Perk J H H, Au-Yang H. Phys Lett, 1988, A128:138
4. Au-Yang H, McCoy B M, Perk J H H, Tang S, Yan M L. Phys Lett, 1987, A123:219

   McCoy B M, Perk J H H, Tang S, Sah C H. Phys Lett, 1987, A125:9
5. Bazhanov V V, Stroganov Yu G. Chiral Potts Model as a Desendant of The Six-Vertex Model. In: Jimbo M, ed. Yang-Baxter Equation in Integrable Systems. Singapore: World Scientific Publ Co Ltd, 1989. 673
6. Faddeev L D, Reshetihin N Yu, Takhtajan L A. Algebraic Analysis, 1988, 1:178 (in Russia)
7. Reshetihin N Yu. Quantum Universal Enveloping Algebras I and II. Leningrad: Steklov Institute Preprint (E-4-87 and E-17-87), 1987
8. Sogo K, Vchinami M, Akutsu Y, Wadati M. Prog Theor Phys, 1982, 68:508
9. Lee H C, Coutour M, Schmeing N C. Preprint CRNL-TP-88-1125. 1988
10. Jing N H, Ge M L, Wu Y S. Lett Math Phys, 1991, 21:193
11. Sun C P, Ge M L. q-Boson Realization Theory of Quantum Algebra and Its Applications to Yang-Baxter Equation. In: Ge ML, ed. Quantum Group and Quantum Integrable Systems, Nankai Lectures on Mathematical Physics. Singapore: World Scientific Publ Co Ltd, 1992. 136
12. Song X C. J Phys, 1990, A23:L821
13. 李有泉. 权守恒与辫子群表示:[博士论文]. 兰州:兰州大学物理系,1989

    Ge M L, Wang L Y, Xue K, Wu Y S. Int J Mod Phys, 1989, 4:3351

    Ge M L, Li Y Q, Xue K. J Phys, 1990, A23:619

    Ge M L, Li Y Q, Wang L Y, Xue K. J Phys, 1990, A23:605

    Ge M L, Sun C P, Wang L Y, Xue K. J Phys, 1990, A23:L64
14. 马中骐. 杨-巴克斯特方程和量子包络代数. 北京:科学出版社,1993

    Hou B Y, Hou B Y, Ma Z Q. Commun Theor Phys, 1990, 13:181 and 341; J Phys, 1992, A25:1211
15. Kauffman L H. Knots and Physics. Singapore: World Scientific Publ Co Ltd, 1991
16. Ge M L, Wu Y S, Xue K. Int J Mod Phys, 1991, 6A:3735

    Ge M L, Wu Y S, Xue K. Akutsu-Wadati Polynomial and Feymann-Kauffman Diagrams. In: Yang C N, Ge M L, eds. Braid Group, Knot Theory and Statistical

Mechanics. Singapore: World Scientific publ Co Ltd, 1989. 201

17. Ge M L, Xue K. J Math Phys, 1991, 32:1301; Exotic Solutions of Yang-Baxter Equation, Quantum Group. In: Curtright T, Fairlie D, Zachos C, eds. Quantum Group. Singapore: World Scientific Publ Co Ltd, 1991. 97; New Solut: Ons of YBE and Quantum Group Structures. In: Kulish P P, ed. Lecture Notes in Math (Vol. 1510). Berlin: Springer-Verlag, 1992. 245
18. Jimbo M. Commun Math Phys, 1986, 102:537; Lett Math Phys, 1985, 10:63 and 1986, 11:247

    Bazhanov V V. Phys Lett 1985, B159:321
19. Akutsu Y, Deguchi T, Wadati M. The Yang-Baxter Relation: A New Tool for Knot Theory. In: Yang C N, Ge M L, eds. Braid Group, Knot Theory and Statistical Mechanics. Singapore: World Scientific Publ Co Ltd, 1989. 151
20. Cheng Y, Ge M L, Xue K. Commun Math Phys, 1991, 136:195
21. Cheng Y, Ge M L, Liu G C, Xue K. J Knot Theor Ramif, 1992, 1:31

    Ge M L, Gwa L H, Piao F, Xue K. J Phys, 1990, A23:2273

    有关高维标准解情况计算方案见本章引文[14]. 一般理论见 Kirillov A, Reshetikhin N Yu. Commun Math Phys, 1990, 134:421
22. Drinfeld V G. Quantum group. In: Proceedings of ICM, California (Berkeley): Academic Press, 1986. 798

    Rosso M. Commun Math Phys, 1988, 117:881; 1989, 124:307

    Biedenharn L C. An Review of Quantum Groups. Moscow: X VIII-th ICGIMP, 1990
23. Akutsu Y, Wakati M. J Phys Soc Japan, 1987, 56:839, 3039
24. Ge M L, Wu A C T. J Phys, 1991, A24:L725
25. Ge M L, Liu G C, Xue K. Mod Phys Lett, 1991, A6:1173

    Ge M L, Wu A C T. J Phys, 1992, A25:L807

    葛墨林,王义文. 中国科学,1993, A23:955
26. Couture M, Ge M L, Lee H C. J Phys, 1990, A23:4765 and 4751

    Ge M L, Liu X F, Sun C P. Lett Math Phys, 1991, 23:169; Phys Lett, 1991, A155:137
27. Ge M L, Gwa L H, Zhao H K. J Phys, 1990, A23:L795

    Ge M L, Xue K, Zhao H K. Phys Lett, 1990, A 151:145
28. Murakami J. A State Model of the Multi-Variable Alexander Polynomial. Usaka

Preprint, 1990; In: Kulish P P, ed. Lecture Notes in Math (Vol. 1510). Berlin: Springer-Verlag, 1992

29. Ge M L, Xue K. J Phys, 1991, A24:L895; 1993, A26:281, 1865
葛墨林,王磊,薛康. 中国科学,1992, A8:838
30. Ge M L, Liu G C, Wang Y W. J Phys, 1993, A26:4607
Ge M L, Wang Y W. J Phys, 1993, A26:443
31. Ge M L, Oh C H, Wang Y W, Xue K. J Phys, 1993, A26:4723
32. Ge M L, Liu X F, Sun C P, Xue K. J Phys, 1991, A24:4955
Ge M L, Li W, Xue K. Commun Theor Phys, 1992, 18:147
33. Kirillov A N, Reshetikhin N Yu. Representations of the Algebra $v_q(sl(2))$, q Orthogonal Polynomials and Invariants of Links. In: Kac V G, ed. Singapore: World Scientific Publ Co Ltd, 1989. 285
34. 葛墨林,赵宏康,薛康. 科学通报,1991, 36:268
Ge M L, Jing N H, Liu G C. J Phys, 1992, A25:L799
不与 BGR 相联系的具有 E_N 对称性的 YBE 解早由如下文献给出:Faddeev V A, Zamolodchikov A B. Phys Lett, 1982, A92:37
35. Witten E. Quantum Field Theory and the Jones Polynomial. In: Yang C N, Ge M L, eds. Braid Group, Knot Theory and Statistical Mechanics. Singapore: World Scientific Publ Co Ltd, 1989. 361
36. Drinfeld V G. Soviet Math Dokl, 1985, 32:254; 1988, 36:212
37. Kuniba A. J Phys, 1990, A23:1349
Ma Z Q. J Phys, 1991, A24:4415; 1990, A23:5513
Ge M L, Wang L Y, Kong X P. J Phys, 1991, A24:569
38. Jones V F R. Commun Math Phys, 1987, 125:459
39. Ge M L, Wu Y S, Xue K. Int J Mod Phys, 1991, A6:3735
Ge M L, Xue K. J Phys, 1993, A26:281
40. Ge M L, Xue K, Wu Y S. Yang-Baxterization and Algebraic Structures. In: Yang C N, Ge M L, eds. Braid Group, Knot Theory and Statistical Mechanics II. Singapore: World Scientific Publ Co Ltd, 1994. 130
41. Briman J, Wenzl H. Trans Amer Math Soc, 1989, 313:249
42. Pasquier V, Saleur H. Nucl Phys, 1990, B330:523
43. Abdalla E, Abdalla M C B, Lima-santos A. Phys Lett, 1984, B140:71
44. Cherednik I V. Soviet Math Dokl, 1986, 33:507

45. Ge M L, Xue K. Phys Lett, 1991, A152:266

46. Sutherland B. J Math Phys, 1980, 21:1770
Gaudin M. La Fonetion *d'* onde de Bethe. Paris: Masson, 1983. Chapter 5 (俄译本:Kulish P P; Sklyanin E K 译. Moscow: MIR, 1987)

47. 万哲先. 李代数. 北京:科学出版社,1964

48. Ge M L, Zhao Q, Zhang Y J. Phys Lett, 1993, A175:199

49. Cherednik I V. Theor Math Phys, 1984, 61:55

50. Kulish P P, Sklyanin E K. J Phys, 1991, A24:L435; Preprint YITP/K-980, 1992
Kulish P P, Sasaki R, Schwiebent C. Preprint YITP/U-92-07, 1992

51. Fu H C, Xue K, Ge M L. J Phys, 1993, A26:L847 and 5953
Fu H C, Ge M L. Phys Lett, 1993, A179:275
傅洪忱,葛墨林. 科学通报,1993, 38:497

52. Kulish P P, Sklyanin E K. 在第三届南开国际工作会议上的讲座. 天津:南开数学所理论物理研究室,1991
Kulish P P. Quantum Algebras, *q*-Deformed Oscillators and Related Topics. In: Ge ML, ed. Quantum Group and Quantum Integrale Systems, Nankai Lecture on Mathematical Physics. Singapore: World Scientific Publ Co Ltd, 1992. 99

53. Hou B Y, Hou B Y, Ma Z Q. J Phys, 1991, A24:2847

54. 韩其智,孙洪洲. 群论. 北京:北京大学出版社,1987

第七章

量子代数及玻色实现

当给定 YBE 的某个三角解时，即$\check{R}(x)$可以用 x 的多项式表示时，满足 RTT 关系的 $T(x)$矩阵可展开为：

$$T(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x^nT^{(n)},\ T^{(n)}=\|T_{ab}^{(n)}\|$$

一般说，如果不考虑仿射代数，用 BGR 经过 YB 化得到$\check{R}(x)$时，含 x 的幂次并不高，甚至只是 x 的线性函数（$SU(2)$、$SU(N)$，$N>2$ 的基本表示），但 $T(x)$却含有无穷次幂（而 Yangian 只含 u 的负幂次，谱参数为 u，现在 $x=e^u$ 或 $x=e^{-u}$）。在 $T(x)$中包含一个子集，它大体相当于 $R(x)$展开的幂次。在 Yangian 中含有一个子集，就是经典李代数，现在 $T(x)$中的子集就是 q 变形的李代数，与 Yangian 中$\{J_\lambda\}$部分对应的 $T(x)$的其余部分实际对应变形 Kac-Moody 代数[1~3]。描述数学物理中的量子代数方面已有不少著作。本书将从不同的角度，即 FRT（Faddeev-Reshetikhin-Takhtajan）方案得到量子代数[4]。这样做的优点是便于和物理模型联系，因为哈密顿量来源于 $T(x)$矩阵，而量子代数由 T_{ab}对易关系决定，RTT 关系又自动保证 Serre 关系。在计算之前，要指出的是，虽然$\check{R}$矩阵依赖于表示，但 $T_{ab}(x)$的子集中每个元素皆为量子空间中的算符，这些算符间的对易关系却是与表示无关的。因而，比较方便的是从$\check{R}$矩阵简单的表示出发，决定量子代数结构。

为了记号方便，以后用 $L(x)$ 表示 $T(x)$ 中的某一个对 x 展开为有限幂次的子集。

另外有关霍普夫代数的基本介绍已在文献[1～5]中给出，本书不再多作介绍。

§7.1 由 RTT 的渐近行为决定量子代数

RTT 关系熟知为

$$\check{R}(xy^{-1})T(x)\otimes T(y)=T(y)\otimes T(x)\check{R}(xy^{-1}) \tag{7.1.1}$$

其中 $x=e^u$, $y=e^v$ 为谱参数。已知：当 $u\to\infty$, $v\to\infty$, $u-v\to\infty$ 时

$$\check{R}(x\to\infty)=S,\ \check{R}(x=1)=I \tag{7.1.2}$$

其中 S 为 BGR。如果 $T(x)$ 存在极限

$$\lim_{x\to\infty}T(x)=T=\|T_{ab}\| \tag{7.1.3}$$

那么(7.1.1)式的渐近行为变为

$$S(T\otimes T)=(T\otimes T)S \tag{7.1.4}$$

或用

$$R=PS$$

表示。

$$R\overset{(1)}{T}\overset{(2)}{T}=\overset{(2)}{T}\overset{(1)}{T}R \tag{7.1.5}$$

因此，给定 BGR，即决定了诸矩阵元 T_{ab} 间的量子对易关系：

$$S_{ij,mn}(T\otimes T)_{mn,kl}=(T\otimes T)_{ij,mn}S_{mn,kl}$$

即

$$S_{ij,mn}T_{mk}T_{nl}=T_{im}T_{jn}S_{mn,kl} \tag{7.1.6}$$

其中 $i, j, \cdots = 1, 2, \cdots, N$，为 $N^2 \times N^2$ BGR S 的标号。例如自旋 1/2 系统，S 由(6.2.7)式(标准解)给出。这时 T_{mk} 为 2×2 矩阵，设为：

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}$$

将(7.1.6)式中 S 的 $(i, j, \cdots = 1, 2)$ 各个元代入，其中 $S_{ij,mn}$ 编号为(见第六章(6.2.17)式)

$$S = \begin{array}{c} \\ 11 \\ 12 \\ 21 \\ 22 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 11 & 12 & 21 & 22 \end{array} \\ \begin{pmatrix} q & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & q - q^{-1} & \\ & & & q \end{pmatrix} \end{array}$$

例如，$S_{ij,mn}T_{mk}T_{nl} = T_{im}T_{jn}S_{mn,kl}$，$i = 1$，$j = 2$，$k = l = 1$。则左端只有 $S_{12,21} = 1$，右端只有 $S_{11,11} = q$。遂有 $m = 2$，$n = 1$。$T_{21}T_{11} = T_{11}T_{21}q$，即 $ac = q^{-1}ca$，等等，列出所有的关系为

$$\begin{cases} ab = q^{-1}ba,\ ac = q^{-1}ca,\ bc = cb \\ bd = q^{-1}db,\ cd = q^{-1}dc \\ ad - da = (q^{-1} - q)bc \end{cases} \tag{7.1.7}$$

上面最后的关系式可表示为

$$ad - q^{-1}bc = da - qbc = \det_q T$$

即 T 的 q 变形的行列式，当 $q = 1$ 时，它回到通常的行列式定义。$\det_q T$ 的一个重要性质是

$$[\det_q T, A] = 0, \quad A = a, b, c, d$$

即与任意元素 $a, b, \cdots$ 对易，所以它是 $a, b, \cdots$ 组成的集合的中

心。事实上有

$$bca = q^2 abc,\ ad = q^{-1}bc + da - qbc$$

将它们代入后，易知：

$$[(ad - q^{-1}bc),\ a] = 0$$

同理可证其他关系，遂有：

$$T^{-1} = (\det{}_q T)^{-1}\begin{pmatrix} d & -qb \\ -q^{-1}c & a \end{pmatrix} \tag{7.1.8}$$

由于历史原因，不少文献将 $T = \{a,\ b,\ c,\ d\}$ 这个集合称为量子群。当然，它并不满足通常群论的性质，因而量子群不是群[6,7]。为了理解自旋 1/2 系统的量子对易关系的物理含义，可做以下练习。在通常量子力学中，常常引入

$$\begin{pmatrix} A \\ A^+ \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ -\mathrm{i}p \end{pmatrix}$$

由 $[x,\ p] = \mathrm{i}$，导致$[A,\ A^+] = 1$。其实单从对易关系角度(如果不考虑谐振子的哈密顿量形式)，上式只是 Bogoliubov 类型变换的特殊形式

$$\begin{pmatrix} A \\ \tilde{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ -\mathrm{i}p \end{pmatrix}$$

仍有 $A\tilde{A} - \tilde{A}A = 1$。现在假设 $\begin{pmatrix} x \\ -\mathrm{i}p \end{pmatrix}$ 作以下“转动”：

$$\begin{pmatrix} A \\ \tilde{A} \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x \\ -\mathrm{i}p \end{pmatrix},\quad T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

其中 T 的各个元素是算符，且满足自旋 1/2 系统的量子对易关系(7.1.7)式，并要求 $\det_q T = 1$，经简单的计算可得：

$$A\tilde{A}-q^{-1}\tilde{A}A=(-\mathrm{i})(\det_q T)(xp-qpx)$$

$$=(-\mathrm{i})(xp-qpx)$$

也就是说，T 是由$(x,\ -\mathrm{i}p)$组成的一个新型平面的转动变换。特点是，这个转动变换的矩阵元是不可对易的，也即相当于“转动角”的各个元素不再是对易的。但允许这种“量子转动”要付出一个代价，就是 x 与 p 应满足 q 变形的对易关系。上述“平面”仅是一般量子平面的极特殊情况。所谓“平面”不过由于 T 是 2×2 矩阵，一般说当 BGR 为 $N^2\times N^2$ 矩阵表示时，T 则为 $N\times N$ 矩阵，这时“平面”应理解为量子超曲面。量子平面的概念首先是由 Manin 引入的[8]。可以想到在这个平面上所有的微积分计算要重新定义，因而表现为不可对易几何。这个理论 Wess-Zumino 等认真研究过[9, 10]。

当 BGRS 为任意时，就可得到 T_{ab}间的对易关系 $(a,\ b=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$。本节不再赘述。

1）平移算符与 q 变形对易关系

上面遇到了 $AB=qBA$ 这种类型的对易关系。乍一看似乎不易接受，但事实上，这只是初等量子力学的结果。为说明这个问题，令算符

$$B=\mathrm{e}^{x},\ C=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma p}$$

且 $[x,\ p]=\mathrm{i}$，即满足海森伯关系，γ 为参数，则由

$$BC=\mathrm{e}^{x-\mathrm{i}\gamma p+\frac{1}{2}\gamma}=\mathrm{e}^{\frac{\gamma}{2}}\mathrm{e}^{x-\mathrm{i}\gamma p}$$

$$CB=\mathrm{e}^{x-\mathrm{i}\gamma p-\frac{1}{2}\gamma}=\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}}\mathrm{e}^{x-\mathrm{i}\gamma p}$$

即有

$$BC=qCB \tag{7.1.9}$$

形如(7.1.9)式关系称为海森伯-外尔(Heisenberg-Weyl)代数关

系。这个例子中，x 可视为坐标算符，p 为平移的无穷小生成元，而 e^{x} 与 $e^{-i\gamma p}$ 为它们的指数映射，亦即为群元。所以(7.1.9)式类型对易关系反映了某种变换的群元的交换关系。换言之，人们非常熟悉量子力学中的算符(李群无穷小算符)，并熟练地使用它。实际上，群元素是更本质的，如果使用整体变换语言描述量子力学，就必须面对(7.1.9)式类型的关系。而非线性相互作用的严格理论一般不能用微扰论处理，(7.1.9)式类型的对易关系则是不可避免的。

(7.1.9)式最好的说明是电子在垂直于二维平面恒磁场中的运动(朗道能级)。由于在二维平面中，当磁场 $\boldsymbol{B} = B_0\boldsymbol{e}_z$ 时，其力学动量为：

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{p} + e\boldsymbol{A}$$

其中 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(x, y)$ 为矢势，$\boldsymbol{p} = (p_1, p_2)$，引入 $\pi^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi_1 \pm i\pi_2)$，则由于

$$[\pi^-, \pi^+] = eB_0$$

易知

$$e^{\pi^-}e^{\pi^+} = e^{eB_0}e^{\pi^+}e^{\pi^-}\ (q = e^{eB_0})$$

这里 $e^{\pi^{\pm}}$ 就是通常的平移算符。因此在物理中广泛使用的平移算符，其实就是最简单的量子群算符。以后在讨论物理应用时，还会回到这个问题。类似的形式，可以推广到超对称量子力学，在引入反对易 c 数后，甚至可以推广到三维空间。在(7.1.9)式例子中，如果 q 为任意的，(7.1.9)式不会告诉比 $[x, p] = i$ 更多的结果，但是如果 q 是 1 的某阶次的根，那么(7.1.9)式便有独立的意义，因为这时已经不属于李代数了。

2) 如果 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 为平面上位移矢量，$u(\boldsymbol{\alpha}) = e^{i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi}}$

$$e^{i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi}}e^{i\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\pi}} = e^{i2\Phi}e^{i\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\pi}}e^{i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\pi}}$$

即有

$$u(\alpha)u(\beta) = q^2 u(\beta)u(\alpha)$$

$$q = e^{i\Phi}$$

其中 Φ 为穿过面积 $|\alpha \times \beta|$ 的磁通量。由此很清楚地了解 q 参数的本质。当 Φ 为任意时，q 可为任意，当磁通量量子化时，即 Φ 为两个互质素数之比时 q 为单位根。可以想到，这两种情况将有极大的不同。

这里需要指出的是，因为通常量子力学中只有李代数和它的指数映射——李群，所以用熟悉的算符去实现量子群必须通过指数形式。但量子群一般形式不能表为指数映射，这表明，非线性相互作用中有某些部分有可能不能通过熟知的量子力学的算符的指数形式表达。有关海森伯-外尔代数与量子代数的联系可参阅文献[11～13]。

§7.2 简单的量子代数

由于 $\check{R}(x)$ 矩阵的三角解一般可写成谱参数的多项式，可以想到，也可以利用将 $T(x)$ 展开成 x 幂次形式求解 RTT 关系。先考虑 BGR 有两个本征值的情况，这时为了区别，用 $L(x)$ 代替 $T(x)$。

(1)

$$\check{R}(x) = x\check{R}_+ + x^{-1}\check{R}_- \tag{7.2.1}$$

亦即，如令 BGR 为 S，则 $\check{R}_+ = S$，$\check{R}_- = -S^{-1}$。相应地，$L(x)$ 满足：

$$\check{R}(xy^{-1})(L(x)\otimes L(y)) = (L(y)\otimes L(x))\check{R}(xy^{-1})$$

并令

$$L(x) = xL_+ + xL_- \tag{7.2.2}$$

将(7.2.1)式与(7.2.2)式代入(6.9.3)式中,由于 $SS^{-1}=I(\check{R}_+\check{R}_-=-I)$,只有以下关系式是独立的:

$$S(L_\pm\otimes L_\pm)=(L_\pm\otimes L_\pm)S \tag{7.2.3}$$

$$S(L_+\otimes L_-)=(L_-\otimes L_+)S \tag{7.2.4}$$

在得到上式时,用到 S 为与 $\check{R}(x)$ 相应的具有两个独立本征值的 BGR。然而要强调的是,FRT 证明,(7.2.3)、(7.2.4)式对任意本征值的 S 都是对的[4],当然它们只是充分的最简单形式。

1) 先考虑最简单的情况

S 满足(6.2.7)式,即自旋 1/2 模型。将(6.2.7)式代入(7.2.3)式与(7.2.4)式,按(6.2.7)式的标号写出所有的关系,当中有一些是不独立的,稍做化简后,得到以下关系式:

$$L_\sigma=\|L_{ij}\|$$

$$\sigma=\pm 1,\ i,\ j=1,\ 2\ (\text{对 } \sigma,\ i,\ j \text{ 相重不求和})$$

$$L_{12}^\sigma L_{21}^\sigma=0 \tag{7.2.5}$$

$$[L_{ii}^\sigma,\ L_{jj}^\sigma]=0\ (i,\ j=1,\ 2\quad \sigma=\pm 1) \tag{7.2.6}$$

$$\begin{cases} L_{ii}^\sigma L_{12}^+=q^{+\sigma\varepsilon(i)}L_{12}^+L_{ii}^\sigma \\ L_{ii}^\sigma L_{21}^-=q^{-\sigma\varepsilon(i)}L_{21}^-L_{ii}^\sigma \end{cases} \tag{7.2.7}$$

$$[L_{12}^+,\ L_{21}^-]=(q-q^{-1})(L_{22}^-L_{11}^+-L_{22}^+L_{11}^-) \tag{7.2.8}$$

$$\varepsilon(1)=-1,\ \varepsilon(2)=+1$$

(7.2.5)式表明

$$L^+=\begin{pmatrix} L_{11}^+ & L_{12}^+ \\ 0 & L_{22}^+ \end{pmatrix},\ L^-=\begin{pmatrix} L_{11}^- & 0 \\ L_{21}^- & L_{22}^- \end{pmatrix} \tag{7.2.9}$$

(7.2.6)式表明 $L^\pm$ 中对角元间都是对易的。满足(7.2.5)式～(7.2.9)式的简单形式,可 (令 $Q=q^{-1}$) 记 $L^\pm$ 为

$$L^{+}=\begin{pmatrix} K & (Q-Q^{-1})X^{+} \\ 0 & K^{-1} \end{pmatrix}, \quad L^{-}=\begin{pmatrix} K^{-1} & 0 \\ -(Q-Q^{-1})X^{-} & K \end{pmatrix} \tag{7.2.10}$$

则(7.2.5)式～(7.2.9)式简化为

$$\begin{cases} KX^{\pm}K^{-1}=Q^{\pm 1}X^{\pm} \\ [X^{+},X^{-}]=\dfrac{K^{2}-K^{-2}}{Q-Q^{-1}} \end{cases} \tag{7.2.11}$$

这个对易关系是通常 $SL(2)$ 的推广：当 $Q\to 1$ 时，取 $K=q^{X_3}=e^{i\gamma X_3}$，它回到通常的 $SL(2)$ 对易关系。这种类似关系始于文献[14]，并由 Jimbo 建立了一般数学理论。(7.2.11)式所示的对易关系，连用以下定义的运算。

Δ 余乘法(co-product)：

$$\begin{cases} \Delta(K)=1\otimes K+K\otimes 1 \\ \Delta(X^{\pm})=X^{\pm}\otimes K+K^{-1}\otimes X^{\pm} \end{cases} \tag{7.2.12}$$

S(antipode)：

$$S(1)=1,\ S(K)=K^{-1},\ S(X^{\pm})=-q^{\pm 1}X^{\pm} \tag{7.2.13}$$

ε(co-unit)：

$$\varepsilon(1)=1,\ \varepsilon(K)=\varepsilon(X^{\pm})=0 \tag{7.2.14}$$

组成了量子代数 $U_q(SL(2))$。这种形式的量子代数是 Jimbo 等首先提出来的[6]。由于本书主要关心从比较物理的角度理解量子代数，较为数学化的东西将放在以后处理。有关(7.2.12)式～(7.2.14)式也放在以后讨论。现在关心的是：(7.2.11)式只不过是 RTT 关系式(7.2.5)～(7.2.9)形式上的简化，并没有用更基本的算符把这些关系实现出来。现在寻找(7.2.5)式～(7.2.9)式的一

般形式解[15]：

$$\begin{cases} L^{+}=\begin{pmatrix} L_{11}^{+} & L_{12}^{+} \\ 0 & L_{22}^{+} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d_{+}A & (g_{+}B+g_{-}A)C \\ 0 & f_{+}B \end{pmatrix} \\ L^{-}=\begin{pmatrix} L_{11}^{-} & 0 \\ L_{12}^{-} & L_{22}^{-} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d_{-}B & 0 \\ (h_{+}B+h_{-}A)C^{-1} & f_{-}A \end{pmatrix} \end{cases} \tag{7.2.15}$$

其中 $d_{\pm}$，$g_{\pm}$，$h_{\pm}$，$f_{\pm}$ 为待定参数，A，B，C 为对易关系待定的量子空间算符，它们由 RTT 关系决定，将(7.2.15)式代入(7.2.5)式～(7.2.9)式，得到：

$$\begin{cases} [A, B]=0,\ AC=q^{-1}CA,\ BC=qCB \\ g_{-}h_{-}=f_{-}d_{+},\ g_{+}h_{+}=f_{+}d_{-} \end{cases} \tag{7.2.16}$$

特殊地选择 $B=A^{-1}$，诸系数皆为 1 时，整个对易关系(7.2.5)式～(7.2.9)式可以用两个独立算符 A 与 C 表示出来。选择 L^{+} 与 L^{-} 如(7.2.15)式所示，则满足了量子代数的对易关系。换言之，量子力学空间中的海森伯-外尔代数是量子代数关系（当 $q^{N}=1$）(7.2.10)式、(7.2.11)式最简单的实现。这与在通常量子力学中，许多算符的对易关系可以用动量与坐标实现相类似。不过现在是用群元素来表示的。(7.2.16)式在手征 Potts 模型中的应用参见文献[15]。作为 $B=A^{-1}$ 的例子，由于电荷算符 Q 与相位算符 $\hat{\phi}$ 组成共轭量，可有

$$[Q, \phi]=\mathrm{i}\tilde{Q}\ (\tilde{Q}\text{为电荷}) \tag{7.2.17}$$

（在 Cooper 对时，$\tilde{Q}\rightarrow 2\tilde{Q}$），引入指数算符，则有

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}Q}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(Q+\phi)}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\tilde{Q}} \tag{7.2.18}$$

令 $A=\mathrm{e}^{\mathrm{i}Q}$，$C=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$，$q=\mathrm{e}^{\tilde{Q}}$，则有 $AC=q^{-1}CA$。它们也是满足(7.2.5)～(7.2.9)式的 RTT 关系的量子力学算符的实现。

上面只讨论了与 $SL(2)$ 相应的量子代数。给出了复杂一些的

$\check{R}(x)$矩阵，当它只有两个分立本征值时，对相应的 BGR S 解(6.2.17)式就得出了 L_{ij}的对易关系式，从而决定了相应的量子代数的结构。

2）由$\check{R}^{1\frac{1}{2}}$计算量子代数

由(6.4.12)式、(6.4.13)式知道，由自旋 1 与 1/2 构成的 BGR 标准解为：

$$S^{1\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} q & & & & & \\ & 0 & q^{-2}Q & & & \\ & 1 & q_1 & & & \\ & & & 0 & q^{-1}Q & \\ & & & q^{-1} & q_2 & \\ & & & & & Q \end{pmatrix} \tag{7.2.19}$$

$$S^{\frac{1}{2}1} = \begin{pmatrix} p & & & & & \\ & 0 & q^{-1}Q & & & \\ & q^{-1} & q_1 & & & \\ & & & 0 & q^{-2}Q & \\ & & & 1 & q_2 & \\ & & & & & Q \end{pmatrix} \tag{7.2.20}$$

其中

$$q_1 q_2 = Qw(1-q^{-4}) \quad (w = q - q^{-1}) \tag{7.2.21}$$

当 $q_1 = q_2$, $Q = q$ 时，上述解回到通常的聚合(fusion)规则所给出的结果。它的 YB 化由下式给出[16]：

$$\begin{cases} \check{R}^{1\frac{1}{2}}(x) = xA_1\left(\check{R}^{\frac{1}{2}1}\right)^{-1} + A_2\,\check{R}^{1\frac{1}{2}} \\ \check{R}^{\frac{1}{2}1}(x) = xA_1\left(\check{R}^{1\frac{1}{2}}\right)^{-1} + A_2\,\check{R}^{\frac{1}{2}1} \end{cases} \tag{7.2.22}$$

其中

$$A_1 = q, \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 = q^4 Q^{-2} \tag{7.2.23}$$

当选择任意 q_1 与 q_2 时，Q 由(7.2.21)式决定，这时解依赖于三个参数，它不能由通常的聚合规则构成。然而，由(7.2.19)式它们仍属于两个本征值问题。此时 RTT 关系变为：

$$\check{R}^{1\frac{1}{2}}(xy^{-1})L^{\frac{1}{2}}(x) \otimes L^1(y) = L^1(y) \otimes L^{\frac{1}{2}}(x)\,\check{R}^{1\frac{1}{2}}(xy^{-1}) \tag{7.2.24}$$

$$L^\sigma(x) = xL^\sigma_- + x^{-1}L^\sigma_+ \quad \left(\sigma = 1, \frac{1}{2}\right) \tag{7.2.25}$$

将(7.2.22)式代入(7.2.24)式得到：

$$\begin{cases} \check{R}^{1\frac{1}{2}}\left(L^{\frac{1}{2}}_{\pm} \otimes L^1_{\pm}\right) = \left(L^1_{\pm} \otimes L^{\frac{1}{2}}_{\pm}\right)\check{R}^{1\frac{1}{2}} \\ \check{R}^{1\frac{1}{2}}\left(L^{\frac{1}{2}}_{+} \otimes L^1_{-}\right) = \left(L^1_{-} \otimes L^{\frac{1}{2}}_{+}\right)\check{R}^{1\frac{1}{2}} \\ \check{R}^{\frac{1}{2}1}\left(L^1_{\pm} \otimes L^{\frac{1}{2}}_{\pm}\right) = \left(L^{\frac{1}{2}}_{\pm} \otimes L^1_{\pm}\right)\check{R}^{\frac{1}{2}1} \\ \check{R}^{\frac{1}{2}1}\left(L^1_{+} \otimes L^{\frac{1}{2}}_{-}\right) = \left(L^{\frac{1}{2}}_{-} \otimes L^1_{+}\right)\check{R}^{\frac{1}{2}1} \end{cases} \tag{7.2.26}$$

其中

$$\begin{cases} L^1_+ = \begin{pmatrix} L^+_{11} & L^+_{10} & L^+_{1-1} \\ 0 & L^+_{00} & L^+_{0-1} \\ 0 & 0 & L^+_{-1-1} \end{pmatrix}, \quad L^1_- = \begin{pmatrix} L^-_{11} & 0 & 0 \\ L^-_{01} & L^-_{00} & 0 \\ L^-_{-11} & L^-_{-10} & L^-_{-1-1} \end{pmatrix} \\ L^{\frac{1}{2}}_+ = \begin{pmatrix} L^+_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} & L^+_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \\ 0 & L^+_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad L^{\frac{1}{2}}_- = \begin{pmatrix} L^-_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} & 0 \\ L^-_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}} & L^-_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \end{cases} \tag{7.2.27}$$

将(7.2.27)式代入(7.2.26)式，经过相当的计算，得到以下解（为与文献[16]一致，令 $q_1 \equiv w_1$，$q_2 \equiv w_2$，$Q \equiv p$）：

$$\begin{cases} L_+^1 = \begin{pmatrix} K_1^{-2} & \left(\dfrac{w_2 q}{w_1}\right) X^+ & q^{-1} K_1^2 (X^+)^2 \\ 0 & K_2^{-2} & \left(\dfrac{w_1}{w}\right) K_1^2 K_2^{-2} X^+ \\ 0 & 0 & K_1^2 K_2^{-4} \end{pmatrix} \\ L_-^1 = \begin{pmatrix} K_1^2 K_2^{-4} & 0 & 0 \\ \left(\dfrac{w_1 q^2}{pw}\right) X^- & K_2^{-2} & 0 \\ q^{-1} K_1^{-2} K_2^4 (X^-)^2 & \left(\dfrac{w_2 q}{pw}\right) K_1^{-2} K_2^2 X^- & K_1^{-2} \end{pmatrix} \end{cases} \tag{7.2.28}$$

$$\begin{aligned} L_+^{\frac{1}{2}} &= \begin{pmatrix} K_1^{-1} K_2 & K_1 K_2 X^+ \\ 0 & K_1 K_2^{-1} \end{pmatrix} \\ L_-^{\frac{1}{2}} &= \begin{pmatrix} K_1 K_2^{-1} & 0 \\ K_1^{-1} K_2^3 X^- & K_1^{-1} K_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{7.2.29}$$

诸算符满足以下对易关系：

$$\begin{cases} K_1 X^\pm K_1^{-1} = (pq)^{\pm\frac{1}{2}} X^\pm \\ K_2 X^\pm K_2^{-1} = (pq^{-1})^{\pm\frac{1}{2}} X^\pm \\ (qp^{-1}) X^+ X^- - (q^{-1} p) X^- X^+ \\ \qquad = q^{-1}(q - q^{-1}) K_2^{-4} (K_1^{-2} K_2^2 - K_1^2 K_2^{-2}) \\ K_1 K_2 = K_2 K_1, \ (X^\pm)^2 = 0 \end{cases} \tag{7.2.30}$$

相应的 co-product，co-unit 与 antipode 为

$$\begin{cases}\Delta(K_1) = K_1 \otimes K_1, \ \Delta(K_2) = K_2 \otimes K_2 \\ \Delta(X^+) = K_1^{-2} \otimes X^+ + X^+ \otimes K_2^{-2} \\ \Delta(X^-) = X^- \otimes K_1^2 K_2^{-4} + K_2^{-2} \otimes X^- \\ \varepsilon(X^\pm) = 0, \ \varepsilon(K_1) = \varepsilon(K_2) = 1 \\ S(X^+) = - p^2 q K_1^2 K_2^2 X^+ \\ S(X^-) = - p q^{-3} K_2^{-2} X^- \\ S(K_1) = K_1^{-1}, \ S(K_2) = K_2^{-1}\end{cases} \tag{7.2.31}$$

当 $p = q$, $w_1 = w_2$,则 $K_2 = I$,它们回到标准解。$(X^\pm)^2 = 0$ 表示只允许二维表示。

实际上按 FRT 理论[4],已知 L(包括 $L^\pm$),量子代数的 co-product 为:

$$\Delta(L) = L \dot{\otimes} L, \quad 即\ \Delta(L_{ij}) = \sum_k L_{ik} \otimes L_{kj} \tag{7.2.32}$$

co-unit 为 $\varepsilon(L) = 1$,而 antipode 由 C 的存在性

$$S(L) = CL^+ C^{-1} \tag{7.2.33}$$

定义,C 满足:

$$LCL^t C^{-1} = CL^t C^{-1} L = I \tag{7.2.34}$$

其中 t 代表转置。在本问题中,C 矩阵的矩阵元为

$$C_j^i = (-q)^i \delta_{-j}^i, \quad i, j = \pm \frac{1}{2}, \pm 1, 0$$

(7.2.30)式可以简化,引入

$$\tilde{X}^\pm = X^\pm K_2^2, \quad K = K_1^{-1} K_2$$

则它可化为:

$$\begin{cases} K\tilde{X}^{\pm}K^{-1} = q^{\mp 1}\tilde{X}^{\pm} \\ K_2\tilde{X}^{\pm}K_2^{-1} = (pq^{-1})^{\pm 1/2}\tilde{X}^{\pm} \\ [\tilde{X}^{+}, \tilde{X}^{-}] = q^{-1}(q-q^{-1})(K^2-K^{-2}) \end{cases} \tag{7.2.35}$$

它们在重新标度 $\tilde{X}^{\pm} \to q^{-1/2}(q-q^{-1})$ 后，正是(7.2.11)式的推广，当 $p=q=Q$，即 $K_2=I$ 时，回到(7.2.11)式。

满足(7.2.30)式的简单表示可选为：

$$\begin{cases} K_1 = \begin{pmatrix} (pq)^{1/4} & 0 \\ 0 & (pq)^{-1/4} \end{pmatrix}, \quad K_2 = \begin{pmatrix} (pq^{-1})^{1/4} & 0 \\ 0 & (pq^{-1})^{-1/4} \end{pmatrix} \\ X^{+} = \begin{pmatrix} 0 & q^{-1}(q-q^{-1}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X^{-} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -(q-q^{-1}) & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \tag{7.2.36}$$

本节的具体计算参阅文献[16]。我们看到标准解时给出的代数就是 D-J(Drinfeld-Jimbo)结构。

(2) A_n 量子代数

虽然给定 BGR 矩阵，使用 RTT 关系决定量子代数时，应用了 BGR $\check{R}$ 的具体表示，但得到的是算符的对易关系，它们是不依赖于表示的。因此，最方便的是从基本表示对应的 BGR 出发，对于 A_n 代数，BGR 有两个独立的本征值，因而可以用本节的方式求相应的量子代数的对易关系。已知 A_n 基本表示相应的 $\check{R}(x)$ 为：

$$\begin{aligned} \check{R}(x) &= xS - x^{-1}S^{-1} \\ &= \sum_{\alpha}(xu_{\alpha} - x^{-1}u_{\alpha}^{-1})E_{\alpha\alpha} \otimes E_{\alpha\alpha} \\ &\quad + (x - x^{-1})\sum_{\alpha \neq \beta} E_{\alpha\beta} \otimes E_{\beta\alpha} \end{aligned}$$

$$+\left(xw\sum_{\alpha>\beta}+x^{-1}w\sum_{\alpha<\beta}\right)E_{\alpha\alpha}\otimes E_{\beta\beta} \tag{7.2.37}$$

其中$\check{R}(x)$满足 YBE。在(3.1.13)式中，当取T的矩阵元为$\check{R}$元素时它就是 YBE，也就是说，取

$$(t\underset{\alpha\beta}{(x)})_{ij}=\check{R}^{\beta j}_{i\alpha}(x) \tag{7.2.38}$$

一定是RTT关系的解，因为这时RTT关系就是YBE自己。故当已知YBE的解时，利用$\check{R}(x)$矩阵，就可以立即读出相应的$T(x)$矩阵的矩阵元来[17]。由(7.2.38)式知，当$x\to\infty$或$x^{-1}\to 0$时，$L(x)$的极限分别为L_-与L_+。因为此时RTT关系就是YBE自己，故由(7.2.38)式取极限就可以决定出$L_{ij}(i, j=1, 2, \cdots, N)$的矩阵形式。简单的计算给出：

$$\begin{cases}L_{ii}|_{x^{-1}\to 0}=xK_i, & L_{ii}|_{x\to 0}=-xK_i^{-1}\\ L_{ii+1}|_{x\to 0}=x^{-1}wX_i^-, & L_{ii+1}|_{x^{-1}\to 0}=xwX_i^+\end{cases} \tag{7.2.39}$$

其中

$$(K_i)_{ab}=u_a\delta_{ab}\delta_{ai}+\delta_{ab}(1-\delta_{ai})$$

$$(K_i^{-1})_{ab}=u_a^{-1}\delta_{ab}\delta_{ai}+\delta_{ab}(1-\delta_{ai})$$

$$X_i^{-1}=E_{i+1,i},\quad X_i^+=E_{i,i+1},\quad (E_{ij})_{ab}=\delta_{ia}\delta_{jb}$$

上式i指标相重不代表求和。由于$\check{R}(x)$满足 YBE，因而L_{ij}满足 RTT 关系：

$$\check{R}(xy^{-1})(L(x)\otimes L(y))=(L(y)\otimes L(x))\check{R}(xy^{-1}) \tag{7.2.40}$$

其中$\check{R}(x)$由(7.2.37)式给出。将(7.2.39)式代入(7.2.40)式，并

利用记号

$$K_i^+ = K_i K_{i+1}^{-1},\ K_i^{-1} = K_i^{-1} K_{i+1}$$

则得到算符 $K_i^{\pm}$，$X_i^{\pm}$ 的对易关系 ($i,j=1,2,\cdots,N$; $N=n+1$)：

$$\begin{cases} K_i^{\pm}K_j^{\pm} = K_j^{\pm}K_i^{\pm},\ (X_j^{\pm})^2 = 0 \\ K_j^{+}X_j^{\pm}K_j^{-} = (u_j u_{j+1})^{\pm 1}X_j^{\pm} \\ K_j^{+}X_j^{\pm}K_{j+1}^{-1} = (u_{j+1})^{\mp 1}X_j^{\pm} \\ K_{j-1}^{+}X_{j-1}^{\pm}K_{j-1}^{-} = (u_j)^{\mp 1}X_j^{\pm} \\ K_j^{+}X_i^{\pm}K_j^{-} = X_i^{\pm} \quad (|i-j|>1) \\ [X_i^{+},\ X_j^{-}] = \delta_{ij}\dfrac{(K_i^{+}-K_j^{-})}{q-q^{-1}} \end{cases} \tag{7.2.41}$$

由于 RTT 关系自动提供 Serre 关系，所以不必管它，在所选特殊表示下即为 $(X_j^{\pm})^2=0$。上式中任意 u_i 可选为 q 或 $-q^{-1}$（一般取 $u_1=q$）。当所有 u_i 均取为 q 时，为通常标准解，即当 $u_i=q$ ($i=1,2,\cdots,N$) 上式可大大简化：

$$\begin{cases} K_1\cdots K_N = q^{\pm 1}I \\ K_i^{+}X_j^{\pm}K_j^{-1} = q^{a_{ij}}X_j^{\pm} \quad (\text{指标相重不求和}) \\ [X_i^{-},\ X_j^{-}] = \delta_{ij}\dfrac{q^{h_i}-q^{-h_i}}{q-q^{-1}} \end{cases} \tag{7.2.42}$$

$$h_i = E_{ii} - E_{i+1,i+1},\quad K_i^{\pm}K_j^{\pm} = K_j^{\pm}K_i^{\pm}$$

其中 a_{ij} 为 A_n 群的嘉当矩阵元。这正是 D-J 量子代数构成方案的

结果。但当至少有一个中心元素 u_i 取 $-q^{-1}$ 时，情况就不是这样。例如对 $A_4(SU(5))$，如果取 $u_1 = u_3 = u_5 = q$，$u_2 = u_4 = -q^{-1}$，则代数关系变为：

$$[X_i^+, X_j^-] = \delta_{ij}\frac{K_i^+ - K_i^-}{q - q^{-1}}$$

$$K_i^+ X_i^\pm K_j^- = \omega^{\pm 1} X_i^\pm \tag{7.2.43}$$

$$K_j^+ X_k^\pm K_j^- = \begin{cases} (\omega^{-2}q)^{\pm 1} X_k^\pm, & j,k = 1, 2 \text{ 或 } j,k = 3, 4 \\ q^{\mp 1} X_k^\pm, & j,k = 2, 3 \\ X_k^\pm, & |j-k| > 1 \end{cases}$$

$$\omega^2 = 1$$

可以直接验证，这个结果与用一般计算方法算出的对易关系是一致的[18, 19]。

当取诸 $L_{ab}(x)$ 的量子空间张量积时：

$$T_{ab}(x) = \sum_{a_1, \cdots, a_{N-1}} L_{aa_1}(x) \otimes L_{a_1 a_2}(x) \otimes \cdots \otimes L_{a_{N-1} b}(x) \tag{7.2.44}$$

或
$$T(x) = L(x) \dot{\otimes} L(x) \dot{\otimes} \cdots \dot{\otimes} L(x)$$

则得到 $(w = q - q^{-1})$：

$$\begin{cases} T_{i,i+1}(x)\big|_{x\to 0} = x^{-N+1} w^{N-1} \Delta(X_i^+) \\ T_{i+1,i}(x)\big|_{x^{-1}\to 0} = x^{N-1} w^{N-1} \Delta(X_i^-) \\ T_{ii}\big|_{x\to 0} = -x^{-N+1}\Delta(K_i^{-1}) \\ T_{ii}\big|_{x^{-1}\to 0} = x^{N-1}\Delta(K_i) \end{cases} \tag{7.2.45}$$

其中 Δ 为余乘积：

$$\begin{cases}\Delta(X_i^+) = \sum_m K_{i+1} \otimes \cdots \otimes K_{i+1} \otimes X_i^+ \otimes K_i \otimes \cdots \otimes K_i \\ \Delta(X_i^-) = \sum_m K_i^{-1} \otimes \cdots \otimes K_i^{-1} \otimes X_i^- \otimes K_{i+1}^{-1} \otimes \cdots \otimes K_{i+1}^{-1} \\ \Delta(K_i^\pm) = K_i^{\pm 1} \otimes K_i^{\pm 1}\end{cases} \tag{7.2.46}$$

在标准解时，它们回到通常余乘积的定义。这里强调的是，按 Jimbo 量子代数的定义，有三个因素：一是形如(7.2.42)式的对易关系；二是 co-product，counit，antipode 等运算；三是 q-Serre 关系：

$$\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ k \end{bmatrix}_q (X_i^\pm)^{1-a_{ij}-k}(X_j^\pm)(X_i^\pm)^k = 0 \ (i \neq j) \tag{7.2.47}$$

其中 a_{ij}为嘉当矩阵元，$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_q$ 为组合系数的 q 变形，即

$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q\,!}{[m]_q\,!\,[n-m]_q\,!}$$

$$[m]_q\,! = [m]_q[m-1]_q\cdots[1], \quad [m]_q = \frac{q^m - q^{-m}}{q - q^{-1}}$$

用 RTT 关系决定量子代数关系的一大优点是，它自动保证满足了 q-Serre 关系[4]，而从单纯代数关系计算满足这个关系还是需要相当计算的。

为了说明 A_n 量子代数的一般特点，对 $SL(5)$基本表示求解(7.2.3)式与(7.2.4)式，L^+是 5×5 的上三角矩阵，而 L^-则为下三角矩阵，注意 $w = q - q^{-1}$，则解为[20]

$$L^{+}=\begin{pmatrix} K_1 & \tau\widetilde{X}_1^{+} & \tau K_2^{-1}[\widetilde{X}_1^{+},\widetilde{X}_2^{+}] & \tau K_2^{-1}K_3^{-1}[\widetilde{X}_1^{+},[\widetilde{X}_2^{+},\widetilde{X}_3^{+}]] & \tau K_2^{-1}K_3^{-1}K_4^{-1}[\widetilde{X}_1^{+},[\widetilde{X}_2^{+},[\widetilde{X}_3^{+},\widetilde{X}_4^{+}]]] \\ 0 & K_2 & \tau\widetilde{X}_2^{+} & \tau K_3^{-1}[\widetilde{X}_2^{+},\widetilde{X}_3^{+}] & \tau K_3^{-1}K_4^{-1}[\widetilde{X}_2^{+},[\widetilde{X}_3^{+},\widetilde{X}_4^{+}]] \\ 0 & 0 & K_3 & \tau\widetilde{X}_3^{+} & \tau K_4^{-1}[\widetilde{X}_3^{+},\widetilde{X}_4^{+}] \\ 0 & 0 & 0 & K_4 & \tau\widetilde{X}_4^{+} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_5 \end{pmatrix} \tag{7.2.48}$$

$$L^{-}=\begin{pmatrix} K_1^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\tau\widetilde{X}_1^{-} & K_2^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ \tau K_2[\widetilde{X}_1^{-},\widetilde{X}_2^{-}] & -\tau\widetilde{X}_2^{-} & K_3^{-1} & 0 & 0 \\ -\tau K_2K_3[\widetilde{X}_1^{-},[\widetilde{X}_2^{-},\widetilde{X}_3^{-}]] & \tau K_3[\widetilde{X}_2^{-},\widetilde{X}_3^{-}] & -\tau\widetilde{X}_3^{-} & K_4^{-1} & 0 \\ \tau K_2K_3K_4[\widetilde{X}_1^{-},[\widetilde{X}_2^{-},[\widetilde{X}_3^{-},\widetilde{X}_4^{-}]]] & -\tau K_3K_4[\widetilde{X}_2^{-},[\widetilde{X}_3^{-},\widetilde{X}_4^{-}]] & \tau K_4[\widetilde{X}_3^{-},\widetilde{X}_4^{-}] & -\tau\widetilde{X}_4^{-} & K_5^{-1} \end{pmatrix} \tag{7.2.49}$$

其中

$$K_iK_j = K_jK_i \quad (i, j = 1, 2, \cdots, N-1)$$

$$\widetilde{X}_i^{\pm} = q^{\pm\frac{(N-2)}{2N}} X_i^{\pm} (K_iK_{i+1})^{\pm 1/2}$$

$$K_i^0 = K_iK_{i+1}^{-1} = \mathscr{K}_i^2$$

现在以 $SL(5)$ 为例讨论两件事情。

形如(7.2.48)式的 L 矩阵解的根图有几何说明。观察(7.2.48)式的非对角元，以 $SU(5)$ 为例，其李代数的正根分别为 α_1，α_2，…，α_5，它表示

$$L^+ \sim \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_1+\alpha_2 & \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 & \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & \alpha_2+\alpha_3 & \alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & \alpha_3+\alpha_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.2.50}$$

而(7.2.43)式为

$$\mathscr{K}_i X_j^{\pm} \mathscr{K}_i^{-1} = q^{\pm a_{ij}/2} X_j^{\pm}$$

其中　　　$a_{ij} = -1 + 3\delta_{ij}, \ |i-j| \leqslant 1$

对 $SU(5)$，显然在(7.2.43)式例子中有：

$$a_{ii} = 2, \quad i = 1, \cdots, 4$$

$$a_{12} = a_{34} = -2 + \ln q/\ln\omega, \quad a_{23} = -\ln q/\ln\omega$$

亦即，等效而言，非标准解相当于改变了标准解中的嘉当矩阵元。

$SL(N)$ 的 q-Serre 关系：当 $|j-i| > 1$ 时，$a_{ij} = 0$，Serre 关系为：

$$\sum_{k=0}^{1}(-1)^k \begin{bmatrix}1\\k\end{bmatrix}_q (X_i^{\pm})^{1-k} X_j^{\pm} (X_i^{\pm})^k = 0$$

它与 $[X_i^{\pm}, X_j^{\pm}] = 0$，$|i-j| > 1$ 等价。

与 $a_{ij} = -1$（$|j-i| = 1$）相应，Serre 关系为

$$(X_i^{\pm})^2 X_{i+1}^{\pm} - (1+\omega) X_i^{\pm} X_{i+1}^{\pm} X_i^{\pm} - X_{i+1}^{\pm} (X_i^{\pm})^2 = 0$$

由于 $(X_i^{\pm})^2 = 0$，$\omega = -1$，故它自动满足。因此，上述 RTT 关系自动满足了 Serre 关系，实际上对任意单李代数法捷耶夫(Faddeev)等早就一般性地证明了这点。

§7.3 L算符的YB化，量子代数

(1) 非标准解情况

非标准解已由(6.2.56)式给出，其中 $\omega = e^{2\pi i/3}$。形式上，当 $t \to \omega^{-1}$ 时(6.2.56)式给出标准解。此时将 $S_{非标准}$ 代替(7.2.3)式、(7.2.4)式的 S，注意它们对三个本征值仍正确，经过计算，可得[20]

$$L^+ = \begin{pmatrix} K_1 & w\widetilde{X}^+ & i\omega^2 w^{-1} Z K_1^{-1} (\widetilde{X}^+)^2 \\ 0 & K_2 & -it^{-1} Z K_1^{-1} K_2 \widetilde{X}^+ \\ 0 & 0 & K_1^{-1} K_2^2 \end{pmatrix} \tag{7.3.1}$$

$$L^- = \begin{pmatrix} K_1^{-1} & 0 & 0 \\ -w\widetilde{X}^- & K_2^{-1} & 0 \\ i\omega^2 w^{-1} Z K_1 (\widetilde{X}^-)^2 & it^{-1} Z K_1 K_2^{-1} X^- & K_1 K_2^{-2} \end{pmatrix}$$

其中诸算符满足

$$
\begin{cases}
(\tilde{X}^{\pm})^3 = 0,\ [K_1,\ K_2] = 0 \\
K_1\tilde{X}^{\pm}K_1^{-1} = t^{\pm 1}\tilde{X}^{\pm} \\
K_2\tilde{X}^{\pm}K_2^{-1} = (\omega t)^{\pm 1}\tilde{X}^{\pm} \\
[\tilde{X}^{+},\ \tilde{X}^{-}] = w^{-1}(K_1K_2^{-1} - K_2K_1^{-1})
\end{cases}
\tag{7.3.2}
$$

引入

$$
K^2 = K_1K_2^{-1},\ \tilde{X}^{\pm} = \left(\frac{\lambda - \lambda^{-1}}{t - t^{-1}}\right)^{1/2} X^{\pm}
$$

$$
\lambda \equiv \omega^{-1/2} = e^{-\pi i/3},\ \lambda^6 = 1
$$

则(7.3.2)式变为

$$
\begin{cases}
(X^{\pm})^3 = 0,\ KX^{\pm}K^{-1} = \lambda^{\pm 1}X^{\pm} \\
[X^{+},\ X^{-}] = (K^2 - K^{-2})/(\lambda - \lambda^{-1})
\end{cases}
\tag{7.3.3}
$$

这是个有兴趣的结果，它说明，在(6.2.56)式的 BGR 解中，虽然有参数 t，但非标准解中，参数 t 并非量子代数中的参数。λ 才是真正的参数，且 λ 为单位根，$\lambda^6 = 1$。由(6.2.56)式决定的量子代数是 λ 为单位根时的 D-J 的结果。且 $(X^{\pm})^3 = 0$ 就是所谓仿射$SL(2)$的 Serre 关系式。从这个例子也可以看出，尽管 BGR 的维数增加，L_{ij}维数也随之增加，但量子代数独立生成元个数仍是由 $K^{\pm 1}$，$X^{\pm}$ 组成，即个数与表示无关。

(2) 自旋 1 模型标准解的 L 算符的 YB 化

这时有三个独立本征值，为了说明(7.2.3)式与(7.2.4)式的正确性，现在用本例子证明这一点。由于 $S_{标准}$ 可以 YB 化，得到 YBE 的解为

$$
\begin{aligned}
\check{R}(x) &= x(x-1)qS_{标准}^{-1} + (1-q)(1-q^2)xI - q^2(x-1)S_{标准} \\
&= x(x\check{R}_{+} + x^{-1}\check{R}_{-} + \check{R}_0)
\end{aligned}
\tag{7.3.4}
$$

其中

$$\check{R}_0 = (1-q)(1-q^2)I - \check{R}_+ - \check{R}_-$$

$$\check{R}_+ = qS_{标准}^{-1},\ \check{R}_- = q^2 S_{标准}$$

相应地，假设

$$T(x) = xL_+ + x^{-1}L_- + L_0 \tag{7.3.5}$$

将它们代入 RTT 关系(6.9.3)式，得到以下关系式：

$$\begin{cases} R_\pm (L_\pm \otimes L_\pm) = (L_\pm \otimes L_\pm) R_\pm \\ R_+ (L_+ \otimes L_-) = (L_- \otimes L_+) R_+ \\ R_\pm (L_\pm \otimes L_0) = (L_0 \otimes L_\pm) R_\pm \end{cases} \tag{7.3.6}$$

$$\begin{cases} R_+ (L_- \otimes L_0) - R_- (L_0 \otimes L_-) + CI(L_0 \otimes L_-) \\ \qquad = (L_0 \otimes L_-) R_+ - (L_- \otimes L_0) R_- + CI(L_- \otimes L_0) \\ R_+ (L_0 \otimes L_+) - R_- (L_+ \otimes L_0) + CI(L_+ \otimes L_0) \\ \qquad = (L_+ \otimes L_0) R_+ - (L_0 \otimes L_+) R_- + CI(L_0 \otimes L_+) \\ R_+ (L_0 \otimes L_0) - R_- (L_+ \otimes L_-) + CI(L_+ \otimes L_-) \\ \qquad = (L_0 \otimes L_0) R_+ - (L_- \otimes L_+) R_- + CI(L_- \otimes L_+) \\ R_- (L_0 \otimes L_0) - R_+ (L_- \otimes L_+) + CI(L_- \otimes L_+) \\ \qquad = (L_0 \otimes L_0) R_- - (L_+ \otimes L_-) R_+ + CI(L_+ \otimes L_-) \end{cases} \tag{7.3.7}$$

$$L_+ = \begin{pmatrix} L^+_{-1-1} & L^+_{-10} & L^+_{-11} \\ 0 & L^+_{00} & L^+_{01} \\ 0 & 0 & L^+_{11} \end{pmatrix},\ L_- = \begin{pmatrix} L^-_{-1-1} & 0 & 0 \\ L^-_{0-1} & L^-_{00} & L^-_{01} \\ L^-_{1-1} & L^-_{10} & L^-_{11} \end{pmatrix}$$

$$L_0 = \begin{pmatrix} L^0_{-1-1} & L^0_{-10} & L^0_{-1-1} \\ L^0_{0-1} & L^0_{00} & L^0_{01} \\ L^0_{1-1} & L^0_{10} & L^0_{11} \end{pmatrix}$$

经过相当的计算[21]，发现有两种解：

1）通常解

$$
\begin{cases}
L_+ = \begin{pmatrix} K & -q^{1/2}X^+ & \dfrac{-q^{1/2}}{1+q}K^{-1}(X^+)^2 \\ 0 & 1 & K^{-1}X^+ \\ 0 & 0 & K^{-1} \end{pmatrix} \\
L_- = \begin{pmatrix} K^{-1} & 0 & 0 \\ -q^{-1/2}X^{-1} & 1 & 0 \\ \dfrac{-q^{1/2}}{1+q}K(X^-)^2 & KX^- & K \end{pmatrix} \\
L_0 = \begin{pmatrix} -(1+q) & q^{1/2}K^{-1}X^+ & 0 \\ q^{1/2}KX^- & -(1+q)^{-1}X^+X^- - qK - K^{-1} & -X^+ \\ 0 & -X^- & -(1+q) \end{pmatrix}
\end{cases}
\tag{7.3.8}
$$

其中 $KX^{\pm}K^{-1} = q^{\pm 1}X^{\pm}$，$[X^+, X^-] = (1-q^2)(K^2 - K^{-2})$，在重新标度后，就是通常的 $U_q(SL(2))$（见(7.2.11)式）。这个例子说明，与 BGR 的 YB 化相应，算符 $L(x)$（即 $T(x)$）可用类似方式作 YB 化。

2) $L_0 = aL_+ + a^{-1}L_-$（a 为任意参数）解

这时(7.3.8)式满足 RTT 关系，但必须满足条件 $(X^+)^2 = (X^-)^2 = 0$，亦即依赖具体表示，但它回到 FRT 方案形式。

(3) 量子代数

B_n，C_n，D_n 李代数决定的 BGR 已在第四章中给出，在标准情况下，它们有三个分立本征值。给定相应的 BGR G，可决定出相应量子代数[4]，它们重复给出 D-J 的量子代数结构。

用 FRT 方案得到量子代数结构的优点是无论何种 BGR 结构都可得到相应的量子代数，而且不必担心 Serre 关系，它们是自动满足的。缺点是从 BGR 的具体表示出发，计算较繁。

相关于单李代数结构的量子代数在数学上属于霍普夫代数，它们

在数学上已相当成熟。现在用物理工作者较易接受的语言作简要介绍。由于本书目的不在于重复数学上这一分支的定理和结论，而在于努力将这些数学结论及其发展在物理中加以实现，所以本节只简要介绍一下基本概念，便于以后的讨论。在举例中常常以 $SL(2)$ 为例，但都可以推广到 $SL(N)$，或其他如 $SU(N)$ 等李代数情况。

1）简单的量子代数。我们知道，物理世界是由对称性支配的，而对称性则由群论描述。群本质上代表某种变换，它依赖于变换的一组参数。李代数之所以重要在于它描述了变换群的无穷小行为，而知道这个行为，求解微分方程就可以决定较大范围的行为，这就是将李代数生成元放在指数上，即可描述群元的道理。李代数空间是个向量空间，例如用泡利矩阵表示李代数生成元就是 $\boldsymbol{\sigma}$，即为三度矢量，不过不同 $\boldsymbol{\sigma}$ 分量不对易罢了。所有 2×2 矩阵都可以用单位矩阵 I 与 $\boldsymbol{\sigma}$ 展开，即任意 2×2 矩阵均可用 $\sum_{\alpha=0}^{3}x_\alpha\sigma_\alpha$ 表示，其中 $\sigma_0=I$，$\sigma_i=\boldsymbol{\sigma}(i=1,2,3)$，$x_\alpha$ 为相应“系数”，即组成代数空间。我们熟悉的量子力学是线性理论，因而用李代数这一矢量空间（及其张量积）描述已经足够。然而在非线性相互作用理论中，如果也引入“基矢量”e_α 来描述它的对称性，可以想象，当将这个基矢 e_α 用原来李代数基展开，原则上必定包含无穷多项。因为非线性的相互作用项用微扰论展开原则上必定含无穷项（当然，如果选用了具体表示，则可能为有限）。正像李代数情况那样，必须对这些基矢的运算作一些规定，这种扩展在数学上有一个成熟的分支，称为霍普夫代数。设 e_α，e_β，…为该代数的基矢，它着重强调了代数基矢 $\{e_\alpha\}$ 在它们张量空间中的运算规则：

a）乘积(multiplication)m：

$$m(e_\sigma\otimes\sigma_\rho)=m^\tau_{\rho\sigma}e_\tau\quad(\text{对 }\tau\text{ 求和})\tag{7.3.9}$$

相应由 $\{e_\sigma\}$ 构成的代数在 m 运算下即变为

$$m:(A\otimes A)\to A$$

注意，上式中 $m(e_\sigma\otimes e_\rho)$ 的意思就是通常矩阵相乘，即 $m(e_\alpha\otimes\sigma_\beta)=e_\alpha e_\beta=m_{\alpha\beta}^{\tau}e_\tau$，而矩阵相乘后仍由它自身基矢去分解。

b）余乘积(co-multiplication)：

矢量空间向张量空间的运算

$$\Delta(e_\tau)=\mu_\tau^{\rho\sigma}e_\rho\otimes e_\sigma\quad（对\ \rho,\sigma\ 求和）\tag{7.3.10}$$

从代数上看，

$$\Delta:A\to A\otimes A$$

它满足

$$\Delta(ab)=\Delta(a)\Delta(b)\tag{7.3.11}$$

其中 a，b 为 A 中的任意元素。

c）Antipode：

$$S(e_\rho)=\gamma_\rho^\tau e_\tau\tag{7.3.12}$$

即
$$S:A\to A$$

但

$$S(ab)=S(b)S(a),\ S(1)=1\tag{7.3.13}$$

d）co-unit：

$$\varepsilon(e_\sigma)=c_\sigma\quad（c_\sigma\ 为某复数）\tag{7.3.14}$$

$$\varepsilon:A\to\mathbb{C}\text{。}$$

这些运算有许多性质，有关的介绍参见文献[1～6]及所引文献。为了今后需要而仅用到它们的具体形式。引入对偶基 e^σ，它满足：

multiplication：
$$e^\sigma e^\rho=\mu_\tau^{\sigma\rho}e^\tau\tag{7.3.15}$$

co-multiplication(余乘积)：
$$\Delta(e^\sigma)=m_{\rho\tau}^{\sigma}e^\rho\otimes e^\tau\tag{7.3.16}$$

antipode：
$$S(e^\sigma)=(\gamma^{-1})_\rho^\sigma e^\rho\tag{7.3.17}$$

co-unit：
$$\varepsilon(e^{\sigma}) = c^{\sigma} \tag{7.3.18}$$

这里重要的是，对偶性质表现在 $e^{\sigma}e^{\rho}$ 的乘法矩阵元是 e_{τ} 的余乘积的系数。而 e^{σ} 的余乘积的矩阵表示是 $e_{\rho}e_{\sigma}$ 的乘法矩阵表示的转置。

2）量子代数的关系式

Drinfeld 定理：

$$\sigma \cdot \Delta(a)\mathscr{R} = \mathscr{R}\Delta(a) \tag{7.3.19}$$

其中 a 为霍普夫代数任意基矢，σ 为置换算符

$$\sigma(a \otimes b) = (b \otimes a)$$

$$\mathscr{R} = e_{\alpha} \otimes e^{\alpha} \quad \text{（相重代表求和）} \tag{7.3.20}$$

以及

$$\begin{cases} (\Delta \otimes \mathrm{id})\mathscr{R} = \mathscr{R}_{13}\mathscr{R}_{23} \\ (\mathrm{id} \otimes \Delta)\mathscr{R} = \mathscr{R}_{13}\mathscr{R}_{12} \\ (S \otimes \mathrm{id})\mathscr{R} = \mathscr{R}^{-1} \end{cases} \tag{7.3.21}$$

其中

$$\begin{cases} \mathscr{R}_{12} = e_{\alpha} \otimes e^{\alpha} \otimes I \\ \mathscr{R}_{13} = e_{\beta} \otimes I \otimes e^{\beta} \\ \mathscr{R}_{23} = I \otimes e_{\gamma} \otimes e^{\gamma} \end{cases} \tag{7.3.22}$$

由(7.3.15)式和(7.3.16)式可以推出：

$$\mu_{\tau}^{\rho\gamma} m_{\gamma\beta}^{\sigma} e_{\rho} e^{\beta} = \mu_{\tau}^{\gamma\rho} m_{\beta\gamma}^{\sigma} e^{\beta} e_{\rho} \tag{7.3.23}$$

其计算如下：

$$\begin{aligned} \text{左端} &= \sigma \cdot \Delta(e_{\tau})\mathscr{R} = \sigma \cdot \mu_{\tau}^{\rho\sigma}(e_{\rho} \otimes e_{\sigma})(e_{\beta} \otimes e^{\beta}) \\ &= \mu_{\tau}^{\rho\sigma}\sigma(e_{\rho} \otimes e_{\sigma})(e_{\beta} \otimes e^{\beta}) \end{aligned}$$

$$= \mu_\tau^{\rho\sigma}(e_\sigma \otimes e_\rho)(e_\beta \otimes e^\beta)$$

$$= \mu_\tau^{\rho\sigma} e_\sigma e_\beta \otimes e_\rho e^\beta$$

$$= \mu_\tau^{\rho\gamma} m_{\gamma\beta}^\sigma e_\sigma \otimes e_\rho e^\beta$$

$$右端 = (e_\alpha \otimes e^\alpha)\Delta(e_\tau)$$

$$= \mu_\tau^{\rho\sigma}(e_\alpha \otimes e^\alpha)(e_\rho \otimes e_\sigma)$$

$$= \mu_\tau^{\rho\sigma}(e_\alpha e_\rho \otimes e^\alpha e_\sigma)$$

$$= \mu_\tau^{\gamma\rho} m_{\rho\gamma}^\sigma e_\sigma \otimes e^\beta e_\rho$$

于是

$$\mu_\tau^{\rho\gamma} m_{\gamma\beta}^\sigma e_\rho e^\beta = \mu_\tau^{\gamma\rho} m_{\beta\gamma}^\sigma e^\beta e_\rho$$

这个定理的直接结果有：

$$\mathscr{R}_{12}\mathscr{R}_{13}\mathscr{R}_{23} = \mathscr{R}_{23}\mathscr{R}_{13}\mathscr{R}_{12} \qquad (7.3.24)$$

其中

$$\mathscr{R}_{12} = e_\alpha \otimes e^\alpha \otimes I$$

$$\mathscr{R}_{13} = e_\beta \otimes I \otimes e^\beta$$

$$\mathscr{R}_{23} = I \otimes e_\gamma \otimes e^\gamma$$ （指标相重代表求和）

证明(7.3.24)式：

$$左端 = (e_\alpha \otimes e^\alpha \otimes I)(e_\beta \otimes I \otimes e^\beta)(I \otimes e_\gamma \otimes e^\gamma)$$

$$= e_\alpha e_\beta \otimes e^\alpha e_\gamma \otimes e^\beta e^\gamma$$

$$= m_{\alpha\beta}^\tau e_\tau \otimes e^\alpha e_\gamma \otimes \mu_\sigma^{\beta\gamma} e^\sigma$$

$$= m_{\alpha\beta}^\tau \mu_\sigma^{\beta\gamma} e_\tau \otimes e^\alpha e_\gamma \otimes e^\sigma$$

$$右端 = (I \otimes e_\gamma \otimes e^\gamma)(e_\beta \otimes I \otimes e^\beta)(e_\alpha \otimes e^\alpha \otimes I)$$

$$= e_\beta e_\alpha \otimes e_\gamma e^\alpha \otimes e^\gamma e^\beta$$

$$= m^{\tau}_{\beta\alpha}\mu^{\gamma\beta}_{\sigma} e_{\tau} \otimes e_{\gamma} e^{\alpha} \otimes e^{\sigma}$$

由(7.3.23)式知，与左端相等，即(7.3.24)式成立。(7.3.24)式正是 YBE 的(3.1.24)式的渐近形式。因此，只要找到一组基$\{e_{\alpha}\}$，$\{e^{\rho}\}$就可以构造出 $\mathscr{R}$ 算符，它的矩阵元就是 R 矩阵。

通常，与李代数相联系的量子代数由生成元 $X_i^{\pm}$、$K_i^{\pm 1}$ 组成，它们满足关系：

$$\begin{cases} K_i X^{\pm} K_i^{-1} = q^{\pm a_{ij}/2} X_j^{\pm} \\ K_i K_j = K_j K_i,\ K_i K_i^{-1} = K_i^{-1} K_i = 1 \\ [X_i^{+}, X_j^{-}] = \delta_{ij} \dfrac{K_i^2 - K_i^{-2}}{q - q^{-1}} \end{cases} \tag{7.3.25}$$

连同 Serre 关系(当李代数不是 $SL(2)$时)：

$$\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1 - a_{ij} \\ k \end{bmatrix}_q (X_i^{\pm})^{1-a_{ij}-k} (X_j^{\pm})(X_i^{\pm})^k = 0 \quad (i \neq j) \tag{7.3.26}$$

其中 a_{ij}为相应李代数的嘉当矩阵元，$\begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_q$ 为 q 变形的组合系数，即等于 $\dfrac{[m]_q!}{[m-k]!k!}$，以及运算：

$$\begin{cases} \Delta(K_i) = K_i \otimes K_i \\ \Delta(X_i^{\pm}) = X_i^{\pm} \otimes K_i + K_i^{-1} \otimes X_i^{\pm} \\ S(X_i^{\pm}) = -q^{\mp 1} X_i^{\pm}, \quad S(K_i) = K_i^{-1} \\ \varepsilon(X_i^{\pm}) = 0, \quad \varepsilon(K_i) = 1 \end{cases} \tag{7.3.27}$$

作为一个演示性的矩阵表示的例子，可取[22]

$$
\begin{aligned}
e_1 &= K^{-1} = \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \\
e^1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (t^{-1}K^{-1} - tK)\frac{1}{(t^{-2} - t^2)} \\
e_2 &= K = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \\
e^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (tK^{-1} - t^{-1}K)\frac{1}{(t^{-2} - t^2)} \\
e_3 &= X_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
e^3 &= t(t^{-2} - t^2) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{7.3.28}
$$

首先，由

$$
\begin{aligned}
\Delta(e_1) &= \Delta(K^{-1}) = K^{-1} \otimes K^{-1} = e_1 \otimes e_1 \\
\Delta(e_2) &= \Delta(K) = K \otimes K = e_2 \otimes e_2 \\
\Delta(e_3) &= \Delta(X_-) = K^{-1} \otimes X_- + X_- \otimes K \\
&= e_1 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_1 \\
\Delta(e_\rho) &= \mu_\rho^{\sigma\tau} e_\sigma \otimes e_\tau
\end{aligned}
$$

得

$$\mu_1^{11} = \mu_2^{22} = \mu_3^{13} = \mu_3^{31} = 1\text{，其他为零。}$$

再如：

$$
\begin{aligned}
m(e_1 \otimes e_1) &= e_1 e_1 = m_{11}^{\sigma} e_\sigma = \begin{pmatrix} t^{-2} & 0 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{t^3 - t^{-3}}{t^2 - t^{-2}}\right) e_1 + \left(\frac{t^{-1} - t}{t^2 - t^{-2}}\right) e_2
\end{aligned}
$$

那么

$$m_{11}^1 = \frac{t^3 - t^{-3}}{t^2 - t^{-2}}, \quad m_{11}^2 = \frac{t^{-1} - t}{t^2 - t^{-2}}$$

同理有

$$m_{12}^1 = m_{12}^2 = \frac{1}{t + t^{-1}} = m_{21}^1 = m_{21}^2$$

再由

$$\Delta(e^1) = m_{\rho\sigma}^1 e^\rho \otimes e^\sigma$$

得到

$$\Delta(e^1) = \frac{1}{(t^{-2} - t^2)}[t^{-1}\Delta(K) - t\Delta(K)]$$

$$= \left(\frac{1}{t^{-2} - t^2}\right)\{t^{-1}e_1 \otimes e_1 - te_2 \otimes e_2\}$$

由于

$$e_1 = t^{-1}e^1 + te^2, \quad e_2 = te^1 + t^{-1}e^2$$

得到

$$\Delta(e^1) = \left(\frac{1}{t^{-2} - t^2}\right)\{t^{-3}e^1 \otimes e^1 + t^{-1}(e^1 \otimes e^2 + e^2 \otimes e^1) + te^2 \otimes e^2$$

$$- t^3 e^1 \otimes e^1 - t^{-1}e^2 \otimes e^2 - t(e^1 \otimes e^2 + e^2 \otimes e^1)\}$$

$$= \left(\frac{t^3 - t^{-3}}{t^2 - t^{-2}}\right)e^1 \otimes e^1 + \left(\frac{t^{-1} - t}{t^2 - t^{-2}}\right)e^2 \otimes e^2$$

$$+ \left(\frac{t^{-1} - t}{t^{-2} - t^2}\right)(e^1 \otimes e^2 + e^2 \otimes e^1)$$

亦即由(7.3.16)式有 $m_{\rho\sigma}^1$ 与从 $m(e_1 \otimes e_1)$ 等计算出的 $m_{\rho\sigma}^1$ 相符合。类似可分别计算 $\Delta(e^i)$ 与 $\Delta(e_i)$ $(i = 1, 2, 3)$，导致与(7.3.9)式相符的结果。将 $R = e_\alpha \otimes e^\alpha$（相重指标求和）用表示计算出，为

$$R = \begin{pmatrix} t^{-1} & & & \\ & t & 0 & \\ & t(t^{-2} - t^2) & t & \\ & & & t^{-1} \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} t^{-2} & & & \\ & 1 & 0 & \\ & (t^{-2} - t^2) & 1 & \\ & & & t^{-2} \end{pmatrix} \tag{7.3.29}$$

注意公因子 t 可以丢掉，令 $t^{-2}=q$，则(不管公共因子 t)

$$R=\begin{pmatrix} q & & & \\ & 1 & 0 & \\ & q-q^{-1} & 1 & \\ & & & q \end{pmatrix},\quad \check{R}=\begin{pmatrix} q & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & q-q^{-1} & \\ & & & q \end{pmatrix} \tag{7.3.30}$$

(7.3.30)式正是熟知的 $SL(2)$ 相应的 BGR 4×4 矩阵解。

事实上，由 Drinfeld 定理(7.3.19)的分量形式：

$$[\sigma\cdot\Delta(a)]_{ij,\,mn}R_{mn,\,kl}=R_{ij,\,mn}[\Delta(a)]_{mn,\,kl} \tag{7.3.31}$$

当取 a 为 $X_{\pm}$ 时，由(7.3.27)式

$$\begin{aligned}\sigma\cdot\Delta(X_{\pm})&=\sigma\cdot(X_i^{\pm}\otimes K_i+K_i^{-1}\otimes X_i^{\pm})\\&=K_i\otimes X_i^{\pm}+X_i^{\pm}\otimes K_i^{-1}\end{aligned}$$

即

$$左端=(K_i\otimes X_i^{\pm}+X_i^{\pm}\otimes K_i^{-1})_{ij,\,mn}\check{R}_{mn,\,lk}$$

$$\begin{aligned}右端&=\check{R}_{ij,\,nm}(X_i^{\pm}\otimes K_i+K_i^{-1}\otimes X_i^{\pm})_{mn,\,kl}\\&=\check{R}_{ij,\,nm}\left[(X_i^{\pm})_{mk}(K_i)_{nl}+(K_i^{-1})_{mk}(X_i^{\pm})_{nl}\right]\\&=\check{R}_{ij,\,nm}[(K_i\otimes X_i^{\mp})+(X_i^{\pm}\otimes K_i^{-1})]_{nm,\,lk}\end{aligned}$$

即有

$$[\check{R},\,(K_i\otimes X_i^{\pm}+X_i^{\pm}\otimes K_i^{-1})]=0 \tag{7.3.32}$$

同理

$$[\check{R},\,K_i\otimes K_i]=[\check{R},\,K_i^{-1}\otimes K_i^{-1}]=0 \tag{7.3.33}$$

上式右端本质上是一种 co-product(7.3.27)式，$\check{R}$ 是它的中心，当取具体表示时，$\check{R}$ 的表示即为 $\check{R}$ 矩阵。

(4) $q\neq$ 单位根时，$\check{R}$ 矩阵与 q 变形的 C-G 系数

由于一般情况 $\check{R}$ 矩阵为 $N^2\times N^2$ 非异矩阵，它可以对角化，当 q 不为单位根，q 可以是实数，因此有

$$U^T\check{R}U=\check{R}_\lambda,\ U^TU=UU^T=I$$

其中 $\check{R}_\lambda$ 为对角矩阵，其相互不等的本征值集合为 $\{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_m,\ \cdots,\ \lambda_M\}$。于是

$$\check{R}=\sum_{m=1}^{M}\lambda_m UI_mU^T \tag{7.3.34}$$

其中 I_m 为在 $\check{R}_\lambda$ 对角化方阵中，将相应的本征值 λ_m 换为 1，而 1 出现的个数为 λ_m 出现的重数。显然

$$I_mI_n=\delta_{mn}I_n\quad(\text{对 } n \text{ 不求和}) \tag{7.3.35}$$

引入

$$C_m=UI_m \tag{7.3.36}$$

则有

$$\check{R}=\sum_{m=1}^{M}\lambda_m C_mC_m^T \tag{7.3.37}$$

定义

$$P_m=C_mC_m^T=UI_mU^T \tag{7.3.38}$$

易证

$$P_mP_n=\delta_{mn}P_n\quad(\text{对 } n \text{ 不求和})$$

$$\sum_{m=1}^{M}P_m=I \tag{7.3.39}$$

亦即 P_m 是第 m 个子空间的投影算符。

试举 $U_q(SL(2))$ $\check{R}$ 矩阵标准解的例子。标准解中 $\check{R}=S$，(6.2.7)式中有三重本征值为 q，一重本征值为 $-q^{-1}$，则

$$\check{R}_\lambda = \begin{pmatrix} q & & & \\ & q & & \\ & & -q^{-1} & \\ & & & q \end{pmatrix}$$

$$= q\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} + (-q^{-1})\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$= qI_1 + (-q^{-1})I_2$$

相应地

$$U = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \frac{1}{\sqrt{1+q^2}}\begin{pmatrix} 1 & -q \\ q & 1 \end{pmatrix} & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$U^T = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \frac{1}{\sqrt{1+q^2}}\begin{pmatrix} 1 & q \\ -q & 1 \end{pmatrix} & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_1 = UI_1U^T = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \frac{1}{1+q^2}\begin{pmatrix} 1 & q \\ q & q^2 \end{pmatrix} & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \frac{1}{1+q^2}\begin{pmatrix} q^2 & -q \\ -q & 1 \end{pmatrix} & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{q^{-1/2}}{\sqrt{q+q^{-1}}} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{q^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{q+q^{-1}}} & 0 & 0 \\ 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{-q^{1/2}}{\sqrt{q+q^{-1}}} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{q^{-1/2}}{\sqrt{q+q^{-1}}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

易知，对自旋+，一基矢，有

$$C_1^T \begin{pmatrix} |++\rangle \\ |+-\rangle \\ |-+\rangle \\ |--\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |++\rangle \\ \dfrac{1}{\sqrt{q+q^{-1}}}(q^{-1/2}|+-\rangle + q^{1/2}|-+\rangle) \\ |0\quad 0\rangle \\ |--\rangle \end{pmatrix}$$

$$C_2^T \begin{pmatrix} |++\rangle \\ |+-\rangle \\ |-+\rangle \\ |--\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |0\quad 0\rangle \\ |0\quad 0\rangle \\ \dfrac{1}{\sqrt{q+q^{-1}}}(-q^{1/2}|+-\rangle + q^{-1/2}|-+\rangle \\ |0\quad 0\rangle \end{pmatrix}$$

(7.3.40)

它们在 $q=1$ 时分别对应对称态(C_1)与反对称态($-C_2$)，所以 C_1 与($-C_2$)就是 q 变形的 C-G 系数。因此，凡是与李代数分解(6.2.11)式相应的 q 变形导致的量子代数表示论与 $\check{R}$ 矩阵，都可

以用 q 变形的 C-G 系数来进行计算。这方面系统的讨论见本章文献[5]。当然，在 q 为单位根时要特别小心，因为 $\frac{1}{\sqrt{q+q^{-1}}}$ 在 $q^2=-1$ 时可以变为零，这时需要单独讨论[23, 24]，以后将着重研究 q 为单位根情况，因为恰是这种情况在物理中出现比较多。另外要强调的是，应用 q 变形 C-G 系数时，R_{ab}^{cd}满足 $a+b=c+d$，这是比较严的限制。由于 R_{ab}^{cd} 只是算符 $R=e_\alpha \otimes e^\alpha$ 的表示，原则上满足(7.3.24)式的 R 的形式并不一定必需满足每个散射道的各自权守恒关系。因为 BGR(YBE 的渐近形式)是三进三出粒子散射矩阵的因式化条件。设入射粒子的赝自旋指标为 a, b, c，出射的为 a', b', c'，事实上只需要 $a+b+c=a'+b'+c'$ 即可保证反应前后总的权守恒[25]。

最后要强调，上面只着重用矩阵表示介绍了 R 矩阵、量子代数基矢等。但这些基矢都是算符，R 也是算符，用量子代数(7.3.24)～(7.3.26)式及其表示论可以建立起整个理论框架。

(5) $SL(2)$ 相应的 $\mathscr{R}$ 算符[1]

对 $SL(2)$，相应的量子代数为 $SL_q(2)$，它由 q 变形的角动量算符构成。这时在(7.3.25)式中 $i, j=1$，故有

$$K=q^{H/2},\ x^+=J_+,\ x^-=J_-$$

$$H=J_0\equiv J_3$$

$$\begin{cases} Kx^\pm K^{-1}=q^{\pm 1}x^\pm \\ [x^+, x^-]=\dfrac{K^2-K^{-2}}{q-q^2} \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} [J_0, J_\pm]=\pm J_\pm \\ [J_+, J_-]=[2J_0]_q=\dfrac{q^{2J_0}-q^{-2J_0}}{q-q^{-1}} \end{cases} \tag{7.3.41}$$

Serre 关系(7.3.26)式恒满足，相应的各种运算为

$$
\begin{cases}
\Delta(H) = H \otimes 1 + 1 \otimes H \\
\Delta(J^{\pm}) = J^{\pm} \otimes q^{H/2} + q^{-H/2} \otimes J^{\pm} \\
S(1) = 1,\ S(H) = -H \\
S(J^{\pm}) = -q^{\pm 1} J^{\pm} \\
\varepsilon(1) = 1,\ \varepsilon(H) = \varepsilon(J^{\pm}) = 0 \\
\Delta(ab) = \Delta(a)\Delta(b) \\
\varepsilon(ab) = \varepsilon(a)\varepsilon(b) \\
S(ab) = S(b)S(a)
\end{cases}
\tag{7.3.42}
$$

这时可由 J_0，$J_{\pm}$ 构成 R 算符：

$$
R = q^{\frac{J_0 \otimes J_0}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-q^{-2})^n}{[n]_q!} q^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(q^{\frac{J_0}{2}} J_+ \otimes q^{-\frac{J_0}{2}} J_- \right)^n
\tag{7.3.43}
$$

可验证它满足(7.3.24)式。而通常 R 矩阵是 $\mathscr{R}$ 算符的矩阵元，首先由 Drinfeld 给出[1,2]。像通常角动量那样，引入态矢量 $|j, m\rangle$：

$$
\begin{cases}
J_0 |j, m\rangle = m |j, m\rangle \\
J_{\pm} |j, m\rangle = \{[j \mp m]_q [j \pm m + 1]_q\}^{\frac{1}{2}} |j, m \pm 1\rangle
\end{cases}
\tag{7.3.44}
$$

其中 $m = j, j-1, \cdots, -j$；$j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \cdots$。如果 R 的第一个空间中权为 j_1，第二个空间中权为 J_2，相应投影为 m_1 与 m_2，则

$$
\begin{aligned}
(R^{j_1 j_2})_{m_1 m_2}^{m_1' m_2'} &= \langle j_1 m_1',\ j_2 m_2' | \mathscr{R} | j_1 m_1,\ j_2 m_2 \rangle \\
&= \delta_{m_1 + m_2}^{m_1' + m_2'} q^{m_1' m_2 + m_2' m_1 - \frac{1}{2}(m_1' - m_1)(m_1' - m_1 - 1)} \times \frac{(1-q^{-2})^{m_1' - m_1}}{[m_1' - m_1]_q!}
\end{aligned}
$$

$$\cdot \left(\frac{[j_1-m_1]_q! \, [j_1+m_1']_q! \, [j_2+m_2]_q! \, [j_2-m_2']!}{[j_1+m_1]_q! \, [j_1-m_1']_q! \, [j_2-m_2]_q! \, [j_2+m_2']!} \right)^{1/2} \tag{7.3.45}$$

详细推导见文献[1, 2, 26]。当 $j_1 = j_2 = \frac{1}{2}$, m_1, m_2, m_1', $m_2' = \pm$ 时,(7.3.45)式给出(6.2.17)式中的 R 矩阵。

§7.4 $U_q(SL(2))$的玻色实现

通常自旋算符满足对易关系:

$$[S_\alpha, S_\beta] = \mathrm{i}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} S_\gamma \tag{7.4.1}$$

$$(\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3)$$

或

$$\begin{cases} [S_3, S_\pm] = \pm S_\pm \\ [S_+, S_-] = 2S_3 \end{cases} \tag{7.4.2}$$

人们熟知,自旋算符可以用玻色算符以许多种方式实现。例如最简单的方式是:

$$\begin{cases} S_+ = b_1^+ b_2, \quad S_- = b_2^+ b_1 \\ S_3 = \frac{1}{2}(b_1^+ b_1 - b_2^+ b_2) = \frac{1}{2}(N_1 - N_2) \end{cases} \tag{7.4.3}$$

其中

$$\begin{cases} [b_i, b_j^+] = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2) \\ [b_i, b_j] = [b_i^+, b_j^+] = 0 \end{cases} \tag{7.4.4}$$

引入二维 Fock 空间,称为 $F(2)$:

$$\begin{cases} b_i|0\rangle = 0, \quad N_i|0\rangle = 0 \\ |n_1, n_2\rangle = \frac{(b_1^+)^{n_1}(b_2^+)^{n_2}}{\sqrt{n_1!n_2!}}|0\rangle \quad (n_1, n_2 = 0, 1, 2, \cdots) \end{cases} \tag{7.4.5}$$

则角动量态可用(7.4.4)式展开：

$$|j, m\rangle = \{(j+m)!(j-m)!\}^{-\frac{1}{2}}(b_1^+)^{j+m}(b_2^+)^{j-m}|0\rangle \tag{7.4.6}$$

利用(7.4.3)式、(7.4.5)式与(7.4.6)式可证

$$\begin{cases} S_\pm |j, m\rangle = \{(j \mp m)(j \pm m + 1)\}^{1/2}|j, m \pm 1\rangle \\ S_3|j, m\rangle = m|j, m\rangle \end{cases} \tag{7.4.7}$$

因此，角动量的表象理论可以转化为玻色子粒子数表象问题。观察(7.2.11)式，$SL_q(2)$是$SL(2)$的q变形，很自然地将上述玻色实现向$SL(2)$推广。沿这个方向，比较公认的曾有三组学者独立达到相同的结果[27]，本节介绍的主要内容可参阅文献[27, 28, 13, 25]。

(1) $SL_q(2)$的玻色实现

设$J_\pm$, J_0满足(7.4.3)式，引入玻色算符[27]：

$$\begin{cases} J_+ = a_1^+ a_2,\ J_- = a_2^+ a_1 \\ J_0 = \dfrac{1}{2}(N_1 - N_2) = \dfrac{1}{2}(a_1^+ a_1 - a_2^+ a_2) \end{cases} \tag{7.4.8}$$

将(7.4.8)式代入(7.4.1)式，作用在Fock空间上，得到：

$$a_i a_i^+ - q^{-1} a_i^+ a_i = q^{\hat{N}_i} \quad (q\text{为任意复数，对}i\text{不求和})$$

$$\begin{cases} [\hat{N}_i, a_i^\pm] = \pm a_i^\pm \quad (a_i \equiv a_i) \\ [x_i, y_j] = 0 \quad (i \neq j;\ x, y = \hat{N}, a_i, a_i^+) \end{cases} \tag{7.4.9}$$

注意，$\hat{N}_i$与N_i不同。相应的q-Fock空间$F_q(2)$：

$$\begin{cases} |n_1, n_2\rangle = (a_1^+)^{n_1}(a_2^+)^{n_2}|0\rangle \\ a_i|0\rangle = 0,\ \hat{N}_i|0\rangle = 0 \\ (i = 1, 2;\ n_1, n_2 = 1, 2, \cdots) \end{cases} \tag{7.4.10}$$

相应地：

$$|j, m\rangle = \{[j-m]_q![j+m]_q!\}^{-\frac{1}{2}}(a_1^+)^{j+m}(a_2^+)^{j-m}|0\rangle$$
$$(m = j, j-1, \cdots, -j) \qquad (7.4.11)$$

有时为了方便，引入

$$Q^{\pm} = q^{\pm\hat{N}} \qquad (7.4.12)$$

则有

$$a_i a_i^+ - q^{-1} a_i^+ a_i = Q_i^+ \quad (i = 1, 2) \qquad (7.4.13)$$

$$\begin{cases} Q^{\pm}\ a_i^+ Q^{\mp} = q^{\pm 1} a_i^+ \\ Q^{\pm}\ a_i Q^{\mp} = q^{\mp 1} a_i \end{cases} \qquad (7.4.14)$$

$$Q^{\pm}\ Q^{\mp} = Q^{\mp}\ Q^{\mp} = 1 \qquad (7.4.15)$$

这里要强调，上述玻色化只是作用在 Fock 空间中才成立。为了独立研究算符，要定义更完整的 q 玻色代数 B_q：

$$a_i a_i^+ - q a_i^+ a_i = q^{-\hat{N}_i} \quad (i = 1, 2) \qquad (7.4.16)$$

实际上，上述概念可以推广到 l 维空间：

$$a_i^{\pm} = 1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes \underset{i}{a^{\pm}} \otimes \cdots \otimes \underset{l}{1} \qquad (7.4.17)$$

则玻色实现为

$$\begin{cases} a_i a_j^+ - q^{\mp\delta_{ij}} a_j^+ a_i = q^{\hat{N}_i \delta_{ij}} = Q_i^+ \delta_{ij} \\ [\hat{N}_i, a_j^{\pm}] = \pm\ a_j^{\pm} \delta_{ij} \end{cases} \qquad (7.4.18)$$

$$\begin{cases} Q_i^{\pm} a_j^+ Q_i^{\mp} = q^{\pm\delta_{ij}} a_j^+ \\ Q_i^{\pm} a_j Q_i^{\mp} = q^{\mp\delta_{ij}} a_j \end{cases} \qquad (7.4.19)$$

其中 $i, j = 1, 2, \cdots, l$。(7.4.18)式和(7.4.19)式称为 q 玻色代数，用 B_q 代表。以上两式还可简化为：

$$a a^+ - q^{\mp}\ a^+\ a = q^{\pm\hat{N}} \qquad (7.4.20)$$

$$\begin{cases} Q^{\pm} a^{+} Q^{\mp} = q^{\pm 1} a^{+} \\ Q^{\pm} a Q^{\mp} = q^{\mp 1} a \end{cases} \tag{7.4.21}$$

而(7.4.20)式等价于：

$$\begin{cases} a^{+} a = [\hat{N}]_q = \dfrac{q^{\hat{N}} - q^{-\hat{N}}}{q - q^{-1}} = \dfrac{Q^{+} - Q^{-}}{q - q^{-1}} \\ aa^{+} = [\hat{N} + 1]_q = \dfrac{qQ^{+} - q^{-1}Q^{-}}{q - q^{-1}} \end{cases} \tag{7.4.22}$$

q-Fock 空间有

$$\begin{cases} |n\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{[n]_q\,!}}(a^{+})^{n}|0\rangle, \quad a|0\rangle = \hat{N}\,|0\rangle = 0 \\ Q^{\pm}|0\rangle = 0 \qquad (n = 1, 2, \cdots) \end{cases} \tag{7.4.23}$$

类似于通常粒子数表象，B_q 有无穷维表示：

$$\begin{cases} a^{+}\,|n\rangle = \sqrt{[n+1]_q}\,|n+1\rangle \\ a|n\rangle = \sqrt{[n]_q}\,|n-1\rangle \\ \hat{N}\,|n\rangle = n|n\rangle \\ Q^{\pm}\,|n\rangle = q^{\pm n}|n\rangle \end{cases} \tag{7.4.24}$$

证明上式时用到了关系式

$$\begin{cases} a(a^{+})^{n} = [n]_q (a^{+})^{n-1} Q^{+} + q^{-n} (a^{-})^{n} a \\ \hat{N}\, a^{n} = (a^{+})^{n} (\hat{N} - n) \end{cases} \tag{7.4.25}$$

上面的表示当 q 不为单位根时，是不可约的。

(2) q 为单位根时的循环表示与 G. Lusztig 表示

当 $q^P = 1$（或-1）时，不失一般性可设 P 能使 $q^P = \pm 1$ 的最小正整数。这时由于当 α 为正整数时

$$[|\alpha|P]_q = \frac{q^{|\alpha|P} - q^{-|\alpha|P}}{q - q^{-1}} = 0$$

所以在(7.4.24)式中$|n\rangle$的表达式中右端分母会变为零，没有意义。这时要重新定义新的基：

$$\begin{cases} f(n) = (a^+)^n|0\rangle \\ a|0\rangle = 0,\ \hat{N}\,|0\rangle = 0 \end{cases} \tag{7.4.26}$$

它们组成 Fock 空间 F_q，而 B_q 作用在 $f(n)$上的表示则为：

$$\begin{cases} a^+ f(n) = f(n+1) \\ af(n) = [n]_q f(n-1) \\ \hat{N}\, f(n) = nf(n) \end{cases} \tag{7.4.27}$$

注意到 $[KP]_q = 0$，故 $af(KP) = 0$，所以这时表示(7.4.27)式是可约的，但是它并不能分解为若干个不变子空间。因此，当 q 为单位根时，量子代数是可约但不可分解的。有关此时的量子代数表示论，主要由 G. Lusztig 首先提出[23]，更一般的情况由 C. de Concini 与 V. G. Kac 所建立[24]。本书采用玻色化的语言加以描述，主要结果取自文献[11，26]。

当 $q^P = 1$，$(a^\pm)^P(a^- \equiv a)$ 为代数中心。

由于

$$a(a^+)^P = [P]_q(a^+)^{P-1} + q^{-P}(a^+)^P a$$

$$[P]_q = 0,\ q^{-P} = 1$$

故有

$$[a,\ (a^+)^P] = 0$$

$(a^+)^P$ 自然同 a^+对易，故当 $q^P = 1$ 时，$(a^\pm)^P$ 是该 q 玻色代数的 Casimir 算符：

$$[a,\ (a^\pm)^P] = 0$$

由 Schur 引理知道

$$(a^{\pm})^P = \xi_{\pm} I, \quad \xi_{\pm} \in \mathbb{C} \tag{7.4.28}$$

1) 循环表示。当 $q^P = 1$，$\xi_{\pm} \neq 0$ 时，可以证明这时表示的维数必严格为 P[12, 13]，这称为循环表示。这时与通常李代数表示完全不同：既没有最高权表示，也没有最低权表示，而是 $|P\rangle$ 的行为与 $|0\rangle$ 一样，只差相因子。这时 $Q^{\pm}$ 作用在真空态时为对角，可以允许出现某一相因子 η：

$$\begin{cases} q^{\pm\hat{N}}|0\rangle = Q^{\pm}\,|0\rangle = q^{\pm\eta}|0\rangle, \; \eta \in \mathbb{C} \\ |n\rangle = (a^+)^n|0\rangle, \; 0 \leqslant n \leqslant P-1 \end{cases} \tag{7.4.29}$$

这时真空态 $|0\rangle$ 称为循环真空态，且

$$Q^{\pm}\,|n\rangle = q^{\pm(n+\eta)}|n\rangle \tag{7.4.30}$$

为了使(7.4.24)式与(7.4.29)式一致，须有

$$\begin{cases} a|n\rangle = \sqrt{[n+\eta]_q}\,|n-1\rangle \\ a^+|n\rangle = \sqrt{[n+\eta+1]_q}\,|n+1\rangle \end{cases} \tag{7.4.31}$$

容易直接验证(7.4.30)、(7.4.31)式满足(7.4.20)、(7.4.21)式，但不断将 a^+ 作用在真空态上，有

$$\begin{aligned} (a^+)^P|0\rangle &= a^+\,((a^+)^{P-1}|0\rangle) \\ &= a^+\,\{[\eta+1]_q[\eta+2]_q\cdots[\eta+P-1]_q\}^{1/2}|P-1\rangle \end{aligned}$$

但是由于(7.4.28)式：

$$(a^{\pm})^P|0\rangle = \xi_{\pm}\,|0\rangle \quad (a^- \equiv a) \tag{7.4.32}$$

故必有：

$$a^-\,|P-1\rangle = \sqrt{[\eta+P]_q}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta}|0\rangle = \sqrt{[\eta]_q}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta}|0\rangle$$

$$\xi_{+} = \{[\eta]_q[\eta+1]_q\cdots[\eta+P-1]_q\}^{1/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta}$$

其中$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta}$为任意相因子。类似地，有

$$a|P-1\rangle = \sqrt{[P+\eta-1]_q}\,|P-2\rangle$$

$$a^P|P-1\rangle = a(a^{P-1}|P-1\rangle)$$

$$= \{[\eta+P-1]_q[\eta+P-2]_q\cdots$$

$$[\eta+1]_q\}^{\frac{1}{2}}a|0\rangle = \xi_{-}\ |P-1\rangle$$

故有

$$a|0\rangle = \sqrt{[\eta]_q}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta}|P-1\rangle$$

$$\xi_{-} = \xi_{+}$$

综合起来，即有：

$$\begin{cases} a|n\rangle = \sqrt{[\eta+n]_q}\,|n-1\rangle,\ n\neq 0 \\ a|0\rangle = \sqrt{[\eta]_q}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta}|P-1\rangle \\ a^{+}\ |n\rangle = \sqrt{(\eta+n+1)_q}\,|n+1\rangle,\ n\neq P-1 \\ a^{+}\ |P-1\rangle = \sqrt{[\eta]_q}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta}|0\rangle \\ q^{\hat{N}} = Q^{+},\ Q^{+}\ |n\rangle = q^{n+\eta}|n\rangle \\ q^P = 1 \end{cases} \tag{7.4.33}$$

用图表示即为当$q^P=1$，$\xi_{\pm}\neq 0$，如图 7.1 示。

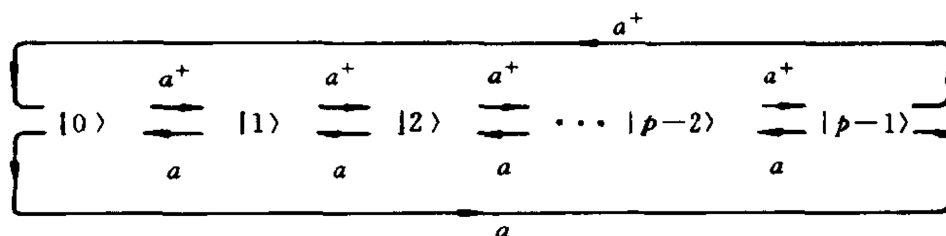


图　7.1

这个表示是量子代数所特有的。它有非常明显的物理意义，例如 $q = e^{i\Phi}$，其中 Φ 为量子化的磁通量等于两个互质素的比乘以 2π，这时循环表示与磁平移算符的性质密切相关。如果考虑量子力学中位相的量子化，那么这种循环表示是保证幺正性的 Pegg-Barnett 方案的严格描述[29]，以后还要专门研究这些物理应用。迄今为止，只有循环表示是量子代数与实际物理问题相联系的一种表示。要指出，这种表示在我们熟悉的量子力学中实际早已存在了，但由于在量子力学中人们已习惯于李代数表示论，那里必定有最高权与最低权，不允许有循环表示。然而，在磁通量子化时，不可避免地遇到循环表示。人们用磁平移算符来讨论这种情况时，常避免讨论权的特点，但实际做的事情就是具有循环表示的特点。对此以后将详加分析。

有关循环表示的 q 玻色化（包括超代数情况），可参见文献[11～13]。

2）$q^P = 1$，$\xi_\pm \neq 0$ 时量子代数表示。我们已经了解，当 q 不是单位根时，q 玻色代数只有无限维表示，而当 $q^P = 1$ 时，$(a^\pm)^P = \xi$，为 Casimir；当 $\xi_\pm = 0$ 时，只有 P 维的循环表示。现在讨论 $\xi_\pm \neq 0$ 的情况。还是以 $SL_q(2)$为例，更广泛的情况可参阅有关文献[30]，日本京都学派是最早注意循环表示在 YB 系统中作用的。现在介绍 Lusztig 表示。

从(7.4.24)式出发，将 $J_\pm$，$J_3 = J_0$ 作用在两态的 Fock 态空间 $F(2)$上面：

$$\begin{cases} |n_1, n_2\rangle = (a_1^+)^{n_1}(a_2^+)^{n_2}|0\rangle \\ n_1, n_2 = 1, 2, \cdots \\ a_i|0\rangle = \hat{N}_i|0\rangle = 0 \quad (i = 1, 2) \end{cases} \tag{7.4.34}$$

这时将量子代数算符 $J_\pm$，J_3 作用在 $|n_1, n_2\rangle$ 上得：

$$\begin{cases} J_+ |n_1, n_2\rangle = [n_2]_q |n_1+1, n_2-1\rangle \\ J_- |n_1, n_2\rangle = [n_1]_q |n_1-1, n_2+1\rangle \\ J_3 |n_1, n_2\rangle = \dfrac{1}{2}(n_1-n_2)|n_1, n_2\rangle \end{cases} \tag{7.4.35}$$

由于整个过程中总粒子数 $N = n_1 + n_2$ 始终是守恒的，可以用 $f_N(n)$ 代替 $|n_1, N-n_1\rangle$ $(n = n_1)$，于是(7.4.27)式变成：

$$\begin{cases} J_+ f_N(n) = [N-n]_q f_N(n+1) \\ J_- f_N(n) = [n]_q f_N(n-1) \\ J_3 f_N(n) = \dfrac{1}{2}(2n-N) f_N(n) \end{cases} \tag{7.4.36}$$

其中 $[n]_q = \dfrac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}$，$f(n)$ 组成 Fock 空间 $V_2^{[N]}$。当 $q \neq$ 单位根时，(7.4.36)式是不可约的。但当 $q =$ 单位根时，会出现两个矢量，它们具有如下性质：

$$\begin{cases} J_- f_N(\alpha P) = 0 \\ J_+ f_N(N-\beta P) = 0 \end{cases} \tag{7.4.37}$$

其中 α、β 为正整数，且 α、$\beta \leqslant \dfrac{N}{P}$。上式是显然的，因为 $[\alpha P]_q = [\beta P]_q = 0$。由(7.4.37)式，存在两个不变子空间：

$$\begin{cases} U_\alpha = \{f_N(\alpha P + n), \text{当 } n = 0, 1, 2, \cdots, N-\alpha P\} \\ W_\beta = \{f_N(N-\beta P-K), \text{当 } K = 0, 1, 2, \cdots, N-\beta P\} \end{cases} \tag{7.4.38}$$

当 $\alpha' > \alpha$, $\beta' > \beta$, $U_{\alpha'}$ 与 $W_{\beta'}$ 为 U_α 与 W_β 的子空间。可以证明以下三种情况，分别对应三个表示类型：

类型 I：$\alpha P - 1 > N - \beta P$，　$U_\alpha \cap W_\beta = \{0\}$　　(7.4.39)

即 U_α 与 W_β 交集为空，表示(7.4.36)式为不可分解。

类型Ⅱ：$\alpha P-1=N-\beta P$，由$f_N(\alpha P-1)=f_N(N-\beta P)$有

$$\begin{cases}J_+ f_N(\alpha P-1)=f_+ f_N(N-\beta P)=0\\ J_- f_N(\alpha P)=0\end{cases} \tag{7.4.40}$$

即
$$V_2^{[N]}=U_\alpha \oplus W_\beta,\ U_\alpha \cap W_\beta=\{0\}$$

这时整个Fock空间分解为两个子空间U_α与W_β的直和，亦即表示为完全可约的。

类型Ⅲ：当$\alpha P-1<N-\beta P$，此时U_α与U_β的交集，

$$U_\alpha \cap W_\beta=\{f_N(\alpha P),\ f_N(\alpha P+1),\ \cdots,\ f_N(N-\beta P)\} \tag{7.4.41}$$

为小一些的子空间，所以这个表示也是不可分解的。详细地用玻色实现讨论q为单位根时的量子代数表示，即把Lusztig与Concini-Kac的理论作深入的发展是件不容易的事，可参阅有关文献[30，11]。这里为了形象地了解，只举出$SL_q(2)$的一些例子。引入E_{ij}，它满足$(E_{ij})_{kl}=\delta_{ik}\delta_{jl}$，即

$$E_{i,j}=|i\rangle\langle j| \tag{7.4.42}$$

则当$P=3$，$N=3$，4，5，6时有表示：

$N=3$：

$$\begin{cases}J_+=[2]_q E_{3,2}+E_{4,3}\\ J_-=E_{1,2}+[2]_q E_{2,3}\\ J_3=-\dfrac{3}{2}E_{1,1}-\dfrac{1}{2}E_{2,2}+\dfrac{1}{2}E_{3,3}+\dfrac{3}{2}E_{4,4}\end{cases} \tag{7.4.43}$$

$N=4$：

$$\begin{cases}J_+=E_{2,1}+[2]_q E_{4,3}+E_{5,4}\\ J_-=E_{1,2}+[2]_q E_{2,3}+E_{4,5}\\ J_3=-2E_{1,1}-E_{2,2}+E_{4,4}+2E_{5,5}\end{cases} \tag{7.4.44}$$

$N=5$:

$$\begin{cases} J_+ = [2]_q E_{2,1} + E_{3,2} + [2]_q E_{5,4} + E_{6,5} \\ J_- = E_{1,2} + [2]_q E_{2,3} + E_{4,5} + [2]_q E_{5,6} \\ J_3 = -\frac{5}{2}E_{1,1} - \frac{3}{2}E_{2,2} - \frac{1}{2}E_{3,3} + \frac{1}{2}E_{4,4} + \frac{3}{2}E_{5,5} + \frac{5}{2}E_{6,6} \end{cases} \tag{7.4.45}$$

$N=6$:

$$\begin{cases} J_+ = [2]_q E_{3,2} + E_{4,3} + [2]_q E_{6,5} + E_{7,6} \\ J_- = E_{1,2} + [2]_q E_{2,3} + [2]_q E_{4,5} + E_{5,6} \\ J_3 = -3E_{1,1} - 2E_{2,2} - E_{3,3} + E_{5,5} + 2E_{6,6} + 3E_{7,7} \end{cases} \tag{7.4.46}$$

例如对 $P=3$，$N=3$，由(7.4.36)式（$q^3=1$）得

$$J_+ f_N(0) = [3]_q f_N(1) = 0$$

$$J_+ f_N(1) = [2]_q f_N(2)$$

$$J_+ f_N(2) = [1]_q f_N(3)$$

$$J_+ f_N(3) = 0$$

$$J_- f_N(0) = 0$$

$$J_- f_N(1) = [1]_q f_N(0)$$

$$J_- f_N(2) = [2]_q f_N(1)$$

$$J_- f_N(3) = 0$$

用向上与向下箭头分别代表 J_+ 与 J_- 的作用，则如图 7.2(a)所示。

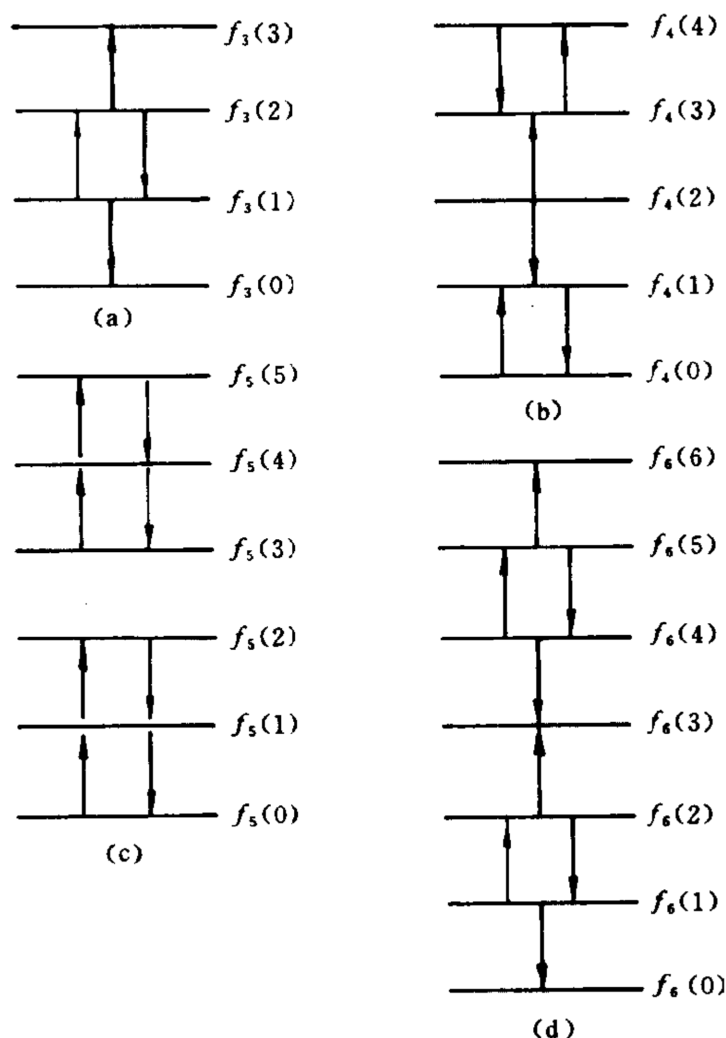


图　7.2

其他：图(b)代表 $N = 4$，图(c)为 $N = 5$，图(d)为 $N = 6$，均对应 $P = 3$。图(a)与图(b)为类型Ⅰ，图(c)为类型Ⅱ，图(d)为类型Ⅲ。它们都属于 q 为单位根的 Lusztig 表示。显然，$\xi_\pm \neq 0$ 仍对应有最高权与最低权，但 $J_\pm$，J_3 作用结果与李代数大不相同。这是 Lusztig 表示的特点。

当 $\xi_+ = 0$，$\xi_- \neq 0$，$\xi_+ \neq 0$，$\xi_- = 0$，这时可以形象地了解，或有最高权但无最低权，或有最低权而没有最高权。不再详细讨论。

简要地讲，$q^P = 1$ 时，量子代数的权有以下 4 种，如图 7.3 所示。

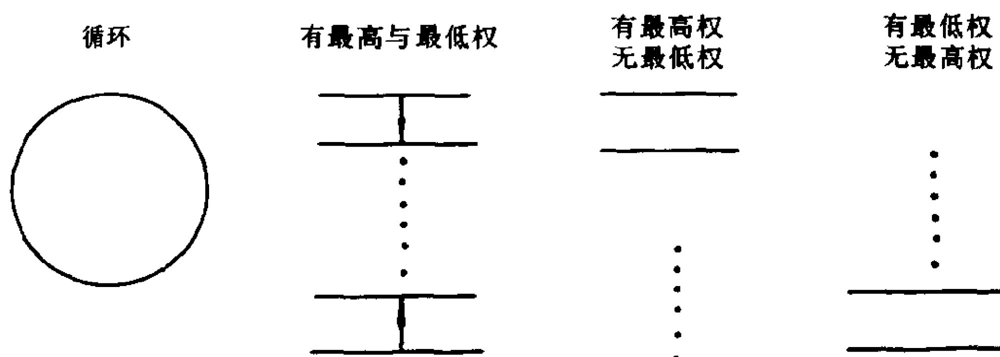


图 7.3

正如我们强调的，q 为单位根时量子代数的表示在原则上已由 Lusztig，Concini-Kac 给出。但使用玻色表示可以给出清晰的图象和许多具体的结果，尤其是对超量子代数这种方法有时可以讨论 Concini 没有述及的问题。本节只简介了 $SL_q(2)$的情况，这种处理可以推广到 $SL_q(n)$，$SU(n)$，$SO(2n)$及一些超量子代数，详见文献[13，26]。另外，要指出，玻色实现不是唯一的，可以有许多种方式将量子代数表为 q 玻色子形式，它们甚至可以带颜色，有关讨论见文献[12，26]。

(3) q 玻色算符用通常玻色算符展开[26]

通常的玻色算符 $b^{\pm}$ ($b^{-}\equiv b$) 满足(7.4.4)式，它们与 $SL(2)$ (或单李代数)相对应，而 q 玻色算符 $a^{\pm}$ ($a^{-}\equiv a$) 满足(7.4.20)、(7.4.21)式，它们与 $SL_q(2)$相对应：正像 $SL_q(2)$的生成元 $J_{\pm}$，J_3 可以用 $SL(2)$生成元 $S_{\pm}$，S_3 表达一样，$a^{\pm}$也可以用 $b^{\pm}$表达。现在令 $N_b=b^{+}b$ 代表通常玻色子粒子数算符，以后为方便将 N_b^{-1} 写成 $1/N_b$，与$\{J\}$和$\{S\}$关系相应，设

$$a^{+}=f(N_b)b^{+},\ a=bg(N_b) \tag{7.4.47}$$

则有

$$[\hat{N}]=a^{+}a=f(N_b)g(N_b)N_b$$

$$[\hat{N}+1]=aa^{+}=f(N_b+1)g(N_b+1)(N_b+1)$$

得：

$$f(N_b)g(N_b) = [\hat{N}]/N_b$$

上式有对称形式解：

$$a^+ = \sqrt{\frac{[b^+ b]}{b^+ b}}\, b^+ \tag{7.4.48}$$

$$a = b\sqrt{\frac{[b^+ b]}{b^+ b}} \tag{7.4.49}$$

$$\hat{N} = b^+ b \tag{7.4.50}$$

显然,(7.4.50)式满足 $[\hat{N}, a^\pm] = \pm a^\pm$（见(7.4.4)式）。上式的意思是说,$q$ 变形的 Fock 空间中粒子数态矢量就是通常玻色子 Fock 空间中粒子数态矢量。事实上在(7.4.24)式中已用到这个性质。(7.4.48)式～(7.4.50)式定义的 $a^\pm$ 满足$(a^\pm)^+ = a^\mp$。在(7.4.47)式中,未考虑算符的正规乘积。由

$$|n\rangle = \frac{(b^+)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle,\ b|0\rangle = 0,\ n = 1, 2, \cdots \tag{7.4.51}$$

并由

$$\begin{cases} a^+|n\rangle = \sqrt{[n+1]_q}\,|n+1\rangle \\ a|n\rangle = \sqrt{[n]_q}\,|n-1\rangle \end{cases} \tag{7.4.52}$$

于是有：

$$\begin{aligned} a^+ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{[n+1]_q}\,|n+1\rangle\langle n| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{\frac{[n+1]_q}{n!(n+1)!}}(b^+)^{n+1}|0\rangle\langle 0|b^n \end{aligned} \tag{7.4.53}$$

$$a = \sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{[n]_q}\,|n-1\rangle\langle n|$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{[n]_q}{(n-1)!n!}} (b^+)^{n-1} |0\rangle\langle 0| b^n$$

注意真空投影算符为：

$$|0\rangle\langle 0| = :e^{-b^+ b}: = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (b^-)^k b^k \quad (7.4.54)$$

即得到正规表示的形式：

$$a^{\pm} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{\frac{\left[n + \frac{1}{2}(1 \pm 1)\right]_q}{n!(n \pm 1)!}} (b^+)^{n+k\pm 1} b^{n+k} \quad (7.4.55)$$

显然，q 玻色算符包含了无穷个通常玻色算符对的分量。这是很自然的，因为非线性相互作用以线性模型的算符展开时，从微扰论角度看必定是无穷项。

(4) $SL_q(2)$生成元的费米子实现

当 $S_{\pm}$，S_3 满足通常李代数的对易关系式(7.4.1)与(7.4.2)，那么直接计算，可知由下式给出的 $\hat{J}_{\pm}$ 与 J_3 满足(7.3.41)式，即 $SL_q(2)$对易关系：

$$\begin{cases} J_{\pm} = \sum_{i=1}^{N} \underset{1}{q}^{H/2} \otimes \underset{2}{q}^{H/2} \otimes \cdots \otimes \underset{i-1}{q}^{H/2} \otimes \underset{i}{S_{\pm}} \otimes \underset{i+1}{q}^{-H/2} \otimes \cdots \otimes \underset{N}{q}^{-H/2} \\ J_3 = \sum_{i=1}^{N} \underset{1}{1} \otimes \underset{2}{1} \otimes \cdots \otimes \underset{i}{H} \otimes \cdots \otimes \underset{N}{1} \end{cases} \quad (7.4.56)$$

(7.4.56)式亦写为：

$$\begin{cases} J_{\pm} = \sum_{i=1}^{N} \left\{ \left(\prod_{j=1}^{i-1} K_j \right) S_i^{\pm} \left(\prod_{l=i+1}^{N} K_l^{-1} \right) \right\} \\ J_3 = \sum_{i=1}^{N} \left\{ \left(\prod_{j=1}^{i-1} I_j \right) H_i \left(\prod_{l=j+1}^{N} I_l \right) \right\} \end{cases} \quad (7.4.57)$$

其中 I_i 为第 i 个空间单位矩阵。

由于自旋 1/2 时 $(S_\pm)^2=0$，它们实际就是 N 维空间中的 coproduct，可以将 $S_\pm$视为费米算符，但在不同格点处满足对易关系：

$$\begin{cases}[S_i^\pm, S_j^\pm]=0\\ \{S_i^+, S_i^-\}=1\end{cases} \tag{7.4.58}$$

现在作一个幺正变换：

$$\begin{cases}S_j^\pm=\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\pi\sum\limits_{k=1}^{j-1}N_k}f_j^\pm \quad (f_i^-\equiv f_i)\\ N_k^f=f_k^+f_k\end{cases} \tag{7.4.59}$$

则得到：

$$\{f_i^+, f_j^-\}=\delta_{ij} \quad (\text{反对易关系}) \tag{7.4.60}$$

$f_j^\pm$ 即为通常的费米子算符，且满足厄米性要求。注意，在(7.4.59)式变换下，粒子数算符 N 不变。事实上，用(7.4.58)式，例如计算 $[S_j^+, S_l^-]$当 $j>l$，注意到如果

$$f_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi f_n^+f_n}=-f_n \tag{7.4.61}$$

则 $[S_j^+, S_l^-]=0$ 与$\{f_j^+, f_l^-\}=0$ 等价，而同时要求(7.4.61)式满足 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi f_n^+f_n}=1-2f_n^+f_n$，即要求$(f_n)^2=0$，正与 $f_i^\pm$ 为费米子要求等价。由于 $q=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}$，于是 $q^{H/2}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma S_3/2}$，在第 j 个空间即为

$$K_j=q^{H_j/2}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma S_j^3/2} \tag{7.4.62}$$

注意

$$S_j^3=\left(N_i^f-\frac{1}{2}\right) \quad (N_i^f=f_i^+f_i)$$

$$K_j=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma\left(N_j^f-\frac{1}{2}\right)}=\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}\gamma}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma N_j^f}$$

故有

$$\hat{J}_{\pm} = \sum_{i=1}^{N} \left(e^{\frac{i}{2}\gamma(i-1)} \prod_{j=1}^{i-1} e^{i(\gamma \pm \pi) N_j^f} \right) f_j^{\pm} \left(\prod_{l=i+1}^{N} e^{-i\gamma\left(N_l^f - \frac{1}{2} \right)} \right) \tag{7.4.63}$$

(7.4.62)式连同(7.4.63)式就是(7.3.41)式用多个费米子的表达式[26]。要强调的是，单个费米子无所谓q变形，只有多个费米子才能实现量子代数，这是由于

$$(f^{+})^2 = f^2 = 0,\ (N_f)^2 = N^f$$

故

$$q^{N^f} = 1 + (q-1)N^f \tag{7.4.64}$$

显然

$$[2N^f + 1]_q = \frac{q^{2N^f+1} - q^{-(2N^f+1)}}{q - q^{-1}}$$

$$= 2N^f + 1$$

当然，也可以把(7.4.18)式中a_1^+理解为$a^+ = C_\uparrow^+$，a_2^+理解为$b^+ = C_\downarrow^+$，则有熟知的代换关系：

$$S_+ = a^+ b = C_\uparrow^+ C_\downarrow,\ S_- = C_\downarrow^+ C_\uparrow,\ S_3 = (C_\uparrow^+ C_\uparrow - C_\downarrow^+ C_\downarrow)/2 \tag{7.4.65}$$

其中$C_\uparrow^+$与$C_\downarrow^+$分别代表自旋向上与向下的费米算符。$C_\uparrow^\pm$与$C_\downarrow^\pm$对易。$SL_q(N)$情况下可定义：

$$S_i^+ = C_{i\uparrow}^+ C_{i\downarrow},\ S_i^- = C_{i\downarrow}^+ C_{i\uparrow},\ S_i^3 = (C_{i\uparrow}^+ C_{i\uparrow} - C_{i\downarrow}^+ C_{i\downarrow})/2 \tag{7.4.66}$$

$$\{C_{i\sigma},\ C_{j\sigma}^+\} = \delta_{ij} \quad (\sigma = \uparrow,\ \downarrow)$$

$$[C_{i\downarrow}^\pm,\ C_{j\uparrow}^\pm] = 0 \quad (\text{不同自旋态对易}) \tag{7.4.67}$$

将(7.4.66)式代入(7.4.57)式，则得到量子代数用费米对表

达的形式。

我们看到，对任意 q，用费米子实现量子代数比起用玻色子实现要实用得多，因为在用 $q = e^{i\gamma}$ 的展开中，由于(7.4.64)式，所得的展开式是有限的，而不像(7.4.55)式那样具有无限项。有关用量子代数多费米子实现对角化简单的非线性模型的例子，参看文献[26]及其中引文。利用多个费米子实现的粗粒描述，可以将 RTT 的解导致的哈密顿量约化为通常凝聚态熟知的模型，例如哈伯模型，见第八章。

§7.5 量 子 偶

上一节介绍了量子代数的基本结构，它由(7.3.15)～(7.3.26)式表达。要强调的是这些 $X_i^{\pm}$，K_i，K_i^{-1} 仅仅是该量子代数的生成元。与李代数不同，量子代数是结合代数的 q 变形，它的基一般并不是这些代数的生成元，而是这些生成元的各种可能幂次的组合。这些量子代数的基一般用 a_i 表示，而它的对偶基则用 b^i 表示。例如在 $SL_q(2)$中，生成元为 $X^{\pm}$，K，K^{-1}，则它的基为

$$a_i = K^s(X^+)^m(X^-)^n \quad (s,\ m,\ n \text{ 为正整数}) \tag{7.5.1}$$

选取不同的 s，m 与 n 对应不同 i 的编号。由于对易关系(7.3.25)式、(7.3.26)式允许对 K_i 的任意幂次作变换，所以 K^s 部分常常不是重要的(对任意单李代数，K_i 与 K_j 对易)，在某些情况下，可先令 $s = 0$，然后在最后结果中再以 K 的幂次作变换得到标准形式的对易关系等。用算符表达时，(7.5.1)式原则上可展开至任意阶幂次，但当选择了具体表示时，它可以简化。例如在 $SL_q(2)$中，如选用两维表示时，由于 $(X^{\pm})^2 = 0$，而 K 可以重新标度，故此时就有 $a_1 = X^+$，$a_2 = X^-$，简单的选择是 $a_3 = K$。这种简单的表示下，基矢就可选为生成元。但一般情况下并不如此。现在我们比较形

式地研究霍普夫代数的结构，所讨论的量子代数就属于这种代数。

(1) 霍普夫代数

$$\mathscr{H} = (A, \Delta, \varepsilon, S) \tag{7.5.2}$$

其中 A 为复数域上包括 I 的结合代数(结合代数的基可由李代数生成元的各种非线性组合构成)。为方便再回忆一下霍普夫代数的性质：

Δ：co-product(余乘法)

$$\Delta^{(n-1)}: A \to \underbrace{A \otimes \cdots \otimes A}_{n} = A^{\otimes n} \tag{7.5.3}$$

当 $a \in A$

$$\Delta^{(n-1)}(a) = \sum_i a_{1i} \otimes a_{2i} \otimes \cdots \otimes a_{ni}$$

$$\equiv \sum a_{(1)} \otimes a_{(2)} \otimes \cdots \otimes a_{(n)} \tag{7.5.4}$$

$$\Delta(ab) = \Delta(a)\Delta(b) \tag{7.5.5}$$

ε：co-unit　$\varepsilon: A \to \mathbb{C}$

当 $a \in A$

$$\varepsilon(a) = \mathbb{C} \quad (I\ \text{为恒元}, \mathbb{C}\ \text{为复数}) \tag{7.5.6}$$

$$\varepsilon(ab) = \varepsilon(a)\varepsilon(b),\ \varepsilon(1) = 1 \tag{7.5.7}$$

S：Antipode　$S: A \to A$

$$S(ab) = S(b)S(a),\ S(1) = 1 \tag{7.5.8}$$

以 $\mathrm{i}d$ 表示恒元运算，则存在以下运算关系：

$$(\Delta \otimes \mathrm{i}d) \circ \Delta = (\mathrm{i}d \otimes \Delta) \circ \Delta \tag{7.5.9}$$

$$(\varepsilon \otimes \mathrm{i}d) \circ \Delta = (\mathrm{i}d \otimes \varepsilon) \circ \Delta = \mathrm{i}d \tag{7.5.10}$$

$$m(S\otimes \mathrm{id})\Delta = m(\mathrm{id}\otimes S)\Delta = \varepsilon \tag{7.5.11}$$

其中
$$m(a\otimes b) = ab \tag{7.5.12}$$

即为普通乘法运算。上述定义似较抽象，现通过一个例子加以具体说明。

考虑由以下代数及运算决定的霍普夫代数 A 与 B：

$$A:\quad KK^{-1} = K^{-1}K = 1,\ KxK^{-1} = q^2x \tag{7.5.13}$$

$$\Delta(x) = x\otimes 1 + K\otimes x,\ \Delta(K) = K\otimes K \tag{7.5.14}$$

$$\varepsilon(x) = 0,\ \varepsilon(K) = 1,\ S(x) = -K^{-1}x$$

$$S(K) = K^{-1} \tag{7.5.15}$$

$$B:\quad \overline{K}\,\overline{K}^{-1} = \overline{K}^{-1}\overline{K} = 1,\ \overline{K}y\overline{K}^{-1} = q^{-2}y \tag{7.5.16}$$

$$\Delta(y) = y\otimes \overline{K}^{-1} + 1\otimes y,\ \Delta(\overline{K}) = \overline{K}\otimes \overline{K} \tag{7.5.17}$$

$$\varepsilon(y) = 0,\ \varepsilon(K) = 1,\ S(y) = -y\overline{K}$$

$$S(\overline{K}) = \overline{K}^{-1} \tag{7.5.18}$$

现在验证 A 与 B 均满足霍普夫代数的要求。注意一个空间中的算符只作用在这个空间本身，对 A 有：

$$\begin{aligned}(\Delta\otimes \mathrm{id})\Delta(x) &= (\Delta\otimes \mathrm{id})(x\otimes 1 + K\otimes x)\\ &= \Delta(x)\otimes 1 + \Delta(K)\otimes x\\ &= x\otimes 1\otimes 1 + K\otimes x\otimes 1 + K\otimes K\otimes x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}\otimes \Delta)\Delta(x) &= (\mathrm{id}\otimes \Delta)(x\otimes 1 + K\otimes x)\\ &= x\otimes \Delta(1) + K\otimes \Delta(x)\\ &= x\otimes 1\otimes 1 + K\otimes (x\otimes 1 + K\otimes x)\end{aligned}$$

$$= x \otimes 1 \otimes 1 + K \otimes x \otimes 1 + K \otimes K \otimes x$$

故(7.5.9)式被满足。

$$\begin{aligned}(\varepsilon \otimes \mathrm{id})\Delta(x) &= (\varepsilon \otimes id)(x \otimes 1 + K \otimes x) \\ &= \varepsilon(x) \otimes 1 + \varepsilon(K) \otimes x \\ &= 1 \cdot x \\ &= x\end{aligned}$$

注意上式中，由于当 ε 作用在任何算符上后，变为失掉空间直积的意义，这就是在(7.5.6)等式右端C 后不加恒元运算 I 的原因(或 $\varepsilon: A \to C$ 而不是 $A \to A$)，否则很易误解在 $\varepsilon \otimes id$ 作用之后会有一个空间直积出现。同理，

$$\begin{aligned}(id \otimes \varepsilon)\Delta(x) &= (id \otimes \varepsilon)(x \otimes 1 + K \otimes x) \\ &= x\varepsilon(1) + K\varepsilon(x) = x\end{aligned}$$

即(7.5.10)式被满足。再看(7.5.11)式

$$\begin{aligned}m(S \otimes \mathrm{id})\Delta(x) &= m(S \otimes \mathrm{id})(x \otimes 1 + K \otimes x) \\ &= m(S(x) \otimes 1 + S(K) \otimes x) \\ &= m(-K^{-1}x \otimes 1 + K^{-1} \otimes x) \\ &= -K^{-1}x + K^{-1}x = \varepsilon(x) = 0 \\ m(\mathrm{id} \otimes S)\Delta(x) &= m(\mathrm{id} \otimes S)(x \otimes 1 + K \otimes x) \\ &= m(x \otimes S(1) + K \otimes S(x)) \\ &= m(x \otimes 1 - K \otimes K^{-1}x) \\ &= m(x - KK^{-1}x) = 0 = \varepsilon(x)\end{aligned}$$

即(7.5.11)式被满足。同理，可证明 B 也满足以上所有关系，因此

A 与 B 均为霍普夫代数。由两个霍普夫代数可以进一步构造新的霍普夫代数，称为量子偶，即由两个 q 变形霍普夫对偶的代数构成的霍普夫代数。

(2) 量子偶的构造

设 A 与 B 为霍普夫代数，定义非简并双线性型 $\langle\,,\,\rangle$，满足：

a) $$\langle a, b_1b_2\rangle = \langle \Delta(a), b_1\otimes b_2\rangle \quad (a\in A, b_1, b_2\in B) \tag{7.5.19}$$

$$\langle a_1a_2, b\rangle = \langle a_2\otimes a_1, \Delta(b)\rangle \quad (a_1, a_2\in A, b\in B) \tag{7.5.20}$$

b) $$\langle 1, b\rangle = \varepsilon(b),\ \langle a, 1\rangle = \varepsilon(a) \quad (a\in A, b\in B) \tag{7.5.21}$$

c) $$\langle S(a), S(b)\rangle = \langle a, b\rangle \quad (a\in A, b\in B) \tag{7.5.22}$$

其中 Δ, ε, S 在相应的霍普夫代数 A 与 B 中的定义已由上节给出。

定理(Drinfeld)：存在霍普夫代数 D，满足：

a) A, B 为 D 的霍普夫子代数。

b) $A\otimes B\to D$ $(a\otimes b1\to ab)$是矢量空间同态。

c) 对 $a\in A$, $b\in B$, 在 D 中有

$$ba = \sum\langle a_{(1)}, S(b_{(1)})\rangle\langle a_{(3)}, b_{(3)}\rangle a_{(2)}b_{(2)} \tag{7.5.23}$$

其中下标(1)、(2)与(3)表示直积空间的标记。

在讨论这个定理之前，要注意，这里的双线性型 $\langle\,,\,\rangle$ 只是由其中两个算符组成的一个非算符的量，与我们通常理解的平均值无关。而且a)～b)并不能确定 $\langle\,,\,\rangle$ 自身，它只给出了一些量的相对关系。现在取 A 与 B 为(7.5.2)～(7.5.12)式所示的霍普夫子代数，由这个定理构造新的霍普夫代数。将(7.5.13)～(7.5.18)式直接

代入 a)~c)，可决定出双线性型的一些性质。由

$$\langle Kx, \overline{K} \rangle = \langle x \otimes K, \Delta(\overline{K}) \rangle = \langle x \otimes K, \overline{K} \otimes \overline{K} \rangle$$

$$= \langle x, \overline{K} \rangle \langle K, \overline{K} \rangle$$

$$\langle q^2 xK, \overline{K} \rangle = q^2 \langle K \otimes x, \Delta(\overline{K}) \rangle = q^2 \langle x, \overline{K} \rangle \langle K, \overline{K} \rangle$$

由于

$$Kx = q^2 xK$$

得

$$(q^2 - 1) \langle x, \overline{K} \rangle \langle K, \overline{K} \rangle = 0$$

亦即 $q^2 \neq 1$ 时，由

$$\langle K, 1 \rangle = \varepsilon(1) = 1 = \langle K, \overline{K}\,\overline{K}^{-1} \rangle$$

$$= \langle \Delta(K), \overline{K} \otimes \overline{K}^{-1} \rangle$$

$$= \langle K, \overline{K} \rangle \langle K, \overline{K}^{-1} \rangle$$

得到

$$\langle K, \overline{K} \rangle \neq 0$$

故有

$$\langle x, \overline{K} \rangle = 0$$

同理，可证

$$\langle K, y \rangle = 0, \ \langle K, \overline{K} \rangle = q^{-2}, \ \langle x, \overline{K}^{-1} \rangle = 0$$

由

$$\Delta^{(2)}(K) = K \otimes K \otimes K$$

$$\Delta^{(2)}(y) = y \otimes \overline{K}^{-1} \otimes \overline{K}^{-1} + 1 \otimes y \otimes \overline{K}^{-1} + 1 \otimes 1 \otimes y$$

$$\Delta^{(2)}(x) = x \otimes 1 \otimes 1 + K \otimes x \otimes 1 + K \otimes K \otimes 1$$

(7.5.23)式中 $a_{(1)}$，$a_{(2)}$与 $a_{(3)}$即为相应第一空间、第二与第三空间

的算符，例如 $\Delta^{(2)}(y)$中，$a_{(1)}=y$，$a_{(2)}=1$，$a_{(3)}=\overline{K}^{-1}$。另一组依序为 1，$y$ 与$\overline{K}^{-1}\cdots$，再对这些求和，例如

$$
\begin{aligned}
yK = & \langle K, S(y)\rangle\langle K, \overline{K}^{-1}\rangle K\cdot K^{-1} \\
& + \langle K, S(1)\rangle\langle K, \overline{K}^{-1}\rangle K\cdot y \\
& + \langle K, S(1)\rangle\langle K, y\rangle K\cdot 1 \\
= & q^{-2}Ky
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
yx = & \langle x, S(y)\rangle\langle 1, \overline{K}^{-1}\rangle 1\cdot\overline{K}^{-1} \\
& + \langle K, S(y)\rangle\langle 1, \overline{K}^{-1}\rangle x\cdot\overline{K}^{-1} \\
& + \langle K, S(y)\rangle\langle x, \overline{K}^{-1}\rangle x\overline{K}^{-1} \\
& + \langle K, S(y)\rangle\langle 1, K^{-1}\rangle x\overline{K}^{-1} \\
& + \langle K, S(1)\rangle\langle 1, \overline{K}^{-1}\rangle xy \\
& + \langle K, S(1)\rangle\langle x, \overline{K}^{-1}\rangle Ky \\
& + \langle K, S(y)\rangle\langle x, \overline{K}^{-1}\rangle K\overline{K}^{-1} \\
& + \langle K, S(1)\rangle\langle 1, y\rangle x\cdot 1 \\
& + \langle K, S(1)\rangle\langle x, y\rangle K
\end{aligned}
$$

由上面计算可知(7.5.23)式中求和的规则是首先选定 $\Delta^{(2)}(y)$中的第一项的 $a_{(1)}$，$a_{(2)}$与 $a_{(3)}$，分别对 $\Delta^{(2)}(x)$中所有三项中的所有 $b_{(1)}$，$b_{(2)}$与 $b_{(3)}$计算，再计算 $\Delta^{(2)}(y)$第二项的 $a_{(i)}(i=2, 3)$，重复所有可能项。在 yx 表达式中注意

$$S(y)=-y,\ \langle K, y\rangle=0,\ \langle a, 1\rangle=\varepsilon(a)$$

而

$$\varepsilon(y)=0,\ \langle 1, \overline{K}^{-1}\rangle=1,\ S(1)=1,\ \langle K, 1\rangle=1$$

于是得到：

$$yx = K\overline{K}^{-1}xy - \langle x, y\rangle \overline{K}^{-1} + \langle x, y\rangle K$$

当选择：

$$\begin{cases} K = \overline{K} \\ \langle x, y\rangle = -\dfrac{1}{q - q^{-1}} \end{cases} \tag{7.5.24}$$

则量子偶给出

$$[x, y] = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}} \tag{7.5.25}$$

在重新标度后，它正是 $U_q(SL(2))$ 的对易关系(7.2.11)式($x \to x^+$, $y \to x^-$)。现在，对以前得到的 $U_q(SL(2))$ 量子代数有了新的认识：它是由两个 $\mathscr{H}$ 代数 A 与 B 组成的量子偶，即一个新的 $\mathscr{H}$ 代数。用这个办法也很容易构造出 R 矩阵，在 $q^N = 1$, $x^N = y^N = 0$ 时，它有有限维表示，应用

$$\langle x^m K^n, y^{m'} \overline{K}^{n'}\rangle = [m]_q! q^{\frac{1}{2}m(m-1)} \langle x, y\rangle^m \delta_{mm'} q^{-2nn'} \tag{7.5.26}$$

它可以用数学归纳法证明。事实上，可证当 $zw = qwz$，则

$$(z - w)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle n\rangle_q!}{\langle K\rangle_q! \langle n-k\rangle_q!} z^K w^{n-k}, \quad \langle n\rangle_q = q^n - 1$$

因而

$$(y \otimes \overline{K}^{-1} + 1 \otimes y)^m = \sum_{k=0}^{m} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_{q^2} y^{m-k} \otimes y^k (\overline{K}^{-1})^{(m-k)}$$

故

$$\langle x^m, y^n\rangle = \langle x^{m-1} \otimes x, \Delta(y^n)\rangle = \langle x^{m-1} \otimes x, (\Delta(y))^n\rangle$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q^2} \langle x^{m-1}, y^{n-k}\rangle \langle x, y^k (\overline{K}^{-1})^{(m-k)}\rangle$$

再应用

$$\langle x, y^k\rangle = \langle x, y^{k-1}\rangle\langle 1, y\rangle + \langle K, y^{k-1}\rangle$$

$$= \langle x, y \rangle \delta_{k1}$$

可证明(7.5.26)式成立。应用(7.5.26)式,构造$U_q(SL(2))$的基矢为

$$a_{mn} = x^m K^n, \ b_{mn} = y^m \overline{K}^n$$

$$\langle a_{mn}, b_{m'n'} \rangle = \delta_{mm'} q^{\frac{1}{2}m(m-1)} [m]_q! \left(-\frac{1}{q-q^{-1}} \right)^m q^{-2nn'}$$

于是,可定义归一化的对偶基为

$$a^*_{mn} = \frac{1}{[m]_q!} q^{-\frac{1}{2}m(m-1)} (q^{-1} - q)^m \frac{1}{N} \sum_{n'=0}^{N-1} q^{2nn'} b_{mn'} \qquad (7.5.27)$$

于是得:

$$\langle a_{st}, a^*_{mn} \rangle = \delta_{ms} \frac{1}{N} \sum_{n'=0}^{N-1} q^{2(n-t)n'}$$

$$= \begin{cases} \delta_{ms} \dfrac{1}{N} \dfrac{1 - q^{2(n-t)N}}{1 - q^{2(n-t)}} = 0, \ n \neq t \\ 1, \ n = t \end{cases} \qquad (7.5.28)$$

亦即 a_{st}与 a^*_{mn}确为对偶基,于是按(7.3.20)式

$$R = \sum_i a_{(i)} \otimes a^{(i)} = \sum_{m,n} (a_{mn} \otimes a^*_{mn}) \qquad (7.5.29)$$

必定是代数的中心(在那里为了简单,用了生成元,而(7.3.20)式对任意对偶基是对的)。因此,R 由下式给出:

$$R = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{q^{-\frac{1}{2}m(m-1)}}{[m]_q!} (q^{-1} - q)^m x^m \otimes y^m \widetilde{K} \qquad (7.5.30)$$

$$\widetilde{K} = \frac{1}{N} \sum_{n,n'=0}^{N-1} q^{2nn'} K^n \otimes \overline{K}^{n'}$$

或者用 $\exp_q$ 表示 R:

$$\exp_q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{[m]_q!} z^m q^{-m(m-1)/2} \tag{7.5.31}$$

$$R = (\exp_q[-(q-q^{-1})x \otimes y])q^{-h\otimes\bar{h}/2}$$

$$= q^{-\frac{1}{2}h\otimes\bar{h}} \exp_q[-(q-q^{-1})qxK^{-1} \otimes \overline{K}y]$$

$$(K = q^h,\ \overline{K} = q^{\bar{h}}) \tag{7.5.32}$$

在通常的 $U_q(SL(2))$ 中取 $\overline{K} = K$, $x = x^+$, $y = x^-$。

以上仿照 Jimbo 方法[31]，以具体例子介绍了 Drinfeld 量子偶的构成与运算，为方便不熟悉这个分支的读者，特别通过例子强调了有关运算中应注意的事项。从这个例子可以看出，组成一个量子代数（它属于 $\mathscr{H}$ 代数）基本上有两个要素：一个是它的生成元的对易关系，另一个是这些生成元的余乘法。现在通常使用的量子代数中，有 $x_i^{\pm}$, K_i 和 K_i^{-1}，它们的对易关系及余乘法都具有相当对称的性质。这是因为这种量子代数实际上属于量子偶，它是由 x_i^+, K_i, K_i^{-1} 与 x_i^-, K_i, K_i^{-1} 两个子霍普夫代数按量子偶规则组合而成的 $\mathscr{H}$ 代数。这就发生了两个问题：第一，可否调节对易关系与余乘法，即使得两个 $\mathscr{H}$ 子代数不再具有对称形式，但调节余乘法而使得组成的量子偶仍满足 $\mathscr{H}$ 代数的要求；第二，从现有的量子代数出发，再通过量子偶形成更复杂的，但有明显新意义的新的 $\mathscr{H}$ 代数。这将通过具体计算说明，答案是肯定的。

（3）玻色代数的霍普夫代数结构

为节约篇幅，不再重复量子偶的推导，而是直接给出 $\mathscr{H}$ 代数的形式，有关文献可参阅本章所列文献[12, 26]等。现在举一个演示性的例子。考虑代数：

$$[a, a^+] = E \quad (a^- \equiv a)$$

$$[N, a^{\pm}] = \pm a^{\pm},\ [E, Y] = 0 \quad (Y = a, a^+, N)$$

它与普通海森伯代数的区别仅在于:虽然 E 为 Casimir,但它不取为恒元,因而 N 为独立算子。我们要构造"不对称"量子偶,上述对易关系与下列运算结合后符合 $\mathscr{H}$ 代数的所有条件,取

$$\Delta(E) = E \otimes E + E \otimes 1 + 1 \otimes E$$

$$\Delta(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a$$

$$\Delta(a^+) = a^+ \otimes 1 + 1 \otimes a^+ + E \otimes a^+$$

$$\Delta(N) = N \otimes 1 + 1 \otimes N$$

$$S(E) = -E(1+E)^{-1},\ S(a) = -a$$

$$S(a^+) = -(E+1)^{-1}a,\ S(N) = -N$$

$$\varepsilon(E) = 0,\ \varepsilon(a^{\pm}) = 0$$

可直接验证,它们满足(7.5.10)式~(7.5.12)式,例如:

$$\begin{aligned}(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta(a^+) = (\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta(a^+) &= a^+ \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes a^+ \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes a^+ \\ &\quad + 1 \otimes E \otimes a^+ + E \otimes a^+ \otimes 1 \\ &\quad + E \otimes 1 \otimes a^+ + E \otimes E \otimes a^+\end{aligned}$$

等等,应用 $[a, a^+] = E$,可验证下列公式成立:

$$[\Delta(a), \Delta(a^+)] = \Delta(E)$$

$$[S(a), S(a^+)] = -S(E)$$

$$(\mathrm{id} \otimes \varepsilon)\Delta(a^+) = (\varepsilon \otimes \mathrm{id})\Delta(a^+) = a^+$$

等等。相应的 R 算符为

$$R = \exp(a^+ \otimes a)\exp[-\ln(1+E) \otimes N]$$

注意,$\Delta(a)$与 $\Delta(a^+)$不对易,说明它是非平凡的 $\mathscr{H}$ 代数。代数中

心为 $z = a^+ a - NE$，故有

$$z|n\rangle = \lambda\mu|n\rangle$$

当 $\lambda \neq 1$ 时，相应于选择不同的 Casimir，则有：

$$a^+|n\rangle = |n+1\rangle,\ a|n\rangle = \lambda n|n-1\rangle$$

$$N|n\rangle = (n+\mu)|n\rangle,\ E|n\rangle = \lambda|n\rangle$$

这只是一个演示性的例子，已找到一些非平凡的其他的例子，参见文献[32]。

(4) 与 $SU(3)$ 相联系的新型量子偶[33]

由 $A_2(SU(3))$ 出发可以定义量子代数 $U_q(A_2^+(\lambda_1, \lambda_2))$，其生成元满足：

$$[H_i, E_i] = 2E_i \quad (i = 1, 2)$$

$$[H_1, E_2] = \lambda_1 E_2,\ [H_2, E_1] = \lambda_2 E_1,\ [H_1, H_2] = 0$$

λ_1，λ_2 为复参数。对 $q^4 = 1$，它的 Serre 关系可简化为

$$E_1^2 = E_2^2 = 0$$

它还满足以下运算：

$$\Delta(H_i) = H_i \otimes 1 + 1 \otimes H_i \quad (i = 1, 2)$$

$$\Delta(E_i) = E_i \otimes 1 + e^{-(h/2)H_i} \otimes E_i,\ \Delta(1) = 1 \otimes 1$$

$$\varepsilon(H_i) = \varepsilon(E_i) = 0,\ \varepsilon(1) = 1$$

$$S(H_i) = -H_i,\ S(E_i) = -e^{(h/2)H_i}E_i,\ S(1) = 1$$

当 $e^h = -1$，即 $(q = e^{h/2})q^4 = 1$ 时，可证明上述集合满足霍普夫代数所有的要求。注意由于

$$\Delta(E_i)\Delta(E_i) = (1 + e^{-h})E_i e^{-\frac{h}{2}H_i} \otimes E_i \ (\text{对 } i \text{ 不求和})$$

故只有 $e^{-h}=-1$ 才能与 $E_i^2=0$ 相一致。为了得到 $U_q(A_2^+(\lambda_1,\lambda_2))$ 的基矢，还需要 E_3：

$$E_3=E_1E_2-e^{-\frac{h}{2}\lambda_1}E_2E_1$$

它满足

$$\Delta(E_3)=E_3\otimes 1+e^{-\frac{h}{2}(H_1+H_2)}\otimes E_3$$

$$+(1-e^{-\frac{h}{2}(\lambda_1+\lambda_2)})E_1\otimes e^{-\frac{h}{2}H_2}\otimes E_2$$

$$[H_3,E_3]=[H_1+H_2,E_3]=(4+\lambda_1+\lambda_2)E_3$$

即有

$$E_3E_1=e^{-\frac{h}{2}\lambda_1}E_1E_3,\quad E_3E_2=-e^{-\frac{h}{2}\lambda_1}E_2E_3$$

这时 Rosso 的组成基矢的定理仍正确，故基矢可写为：

$$\{a_i\}=\{E_2^{r_2}E_3^{r_3}E_1^{r_1}H_1^{S_1}H_2^{S_2}\}$$

$$(r_1,r_2=0,1;\ r_3,S_1,S_2=0,1,2,\cdots)$$

已知 $U_q(A_2^+(\lambda_1,\lambda_2))$，便可用量子偶关系式(7.5.19)～(7.5.23)式定义它的对偶霍普夫代数 $U_q(A_2^-(\lambda_1,\lambda_2))$，它的生成元用 G_i，$F_i(i=1,2,3)$ 表示，满足

$$\langle H_i,G_j\rangle=\delta_{ij}\quad(i=1,2,\text{不求和})$$

及

$$\langle E_i,F_j\rangle=\delta_{ij}$$

利用量子偶的双线性型〈,〉性质，可证

$$\langle H_i^n,G_i^{n'}\rangle=n!\delta_{nn'}\quad(i=1,2)$$

$$F_i^2=0$$

$$\langle E_3^n,F_3^{n'}\rangle=\delta_{nn'}\prod_{k=1}^{n}\frac{1-e^{-\frac{h}{2}(\lambda_1+\lambda_2)k}}{1-e^{-\frac{h}{2}(\lambda_1+\lambda_2)}}$$

$$\langle E_2^{r_2}E_3^{r_3}E_1^{r_1}H_1^{S_1}H_2^{S_2},\ F_2^{r_2'}F_3^{r_3'}F_1^{r_1'}G_1^{S_1'}G_2^{S_2'}\rangle$$

$$=\prod_{i=1}^{3}\delta_{r_ir_i'}\prod_{i=1}^{2}\delta_{S_iS_i'}\prod_{k=1}^{r_3}\frac{1-e^{-\frac{h}{2}(\lambda_1+\lambda_2)k}}{1-e^{-\frac{h}{2}(\lambda_1+\lambda_2)}}\prod_{i=1}^{2}S_i!$$

$$(r_1,\ r_2=0,\ 1)$$

及

$$[G_i,\ G_j]=0\quad(i,\ j=1,\ 2)$$

$$[G_i,\ F_j]=-\frac{h}{2}\delta_{ij}F_j\quad(\text{指标相重不求和})$$

$$F_1F_2-e^{-\frac{h}{2}\lambda_2}F_2F_1=(1-e^{-\frac{h}{2}(\lambda_1+\lambda_2)})F_3$$

$$F_3F_1=-e^{\frac{h}{2}\lambda_2}F_3F_1,\ F_3F_1=-e^{-\frac{h}{2}\lambda_2}F_2F_3$$

$$\Delta(G_i)=G_i\otimes 1+1\otimes G_i$$

$$\Delta(F_1)=1\otimes F_1+F_1\otimes e^{2G_1+\lambda_2G_2}$$

$$\Delta(F_2)=1\otimes F_2+F_2\otimes e^{2G_2+\lambda_1G_1}$$

$$S(G_i)=-G_i\quad S(F_1)=-F_1e^{-2G_1-\lambda_2G_2}$$

$$S(F_2)=-F_2e^{-2G_2-\lambda_1G_1}$$

$$\varepsilon(G_i)=\varepsilon(F_i)=0$$

为方便引入

$$\frac{h}{4}H_1'=G_1+\frac{\lambda_2}{2}G_2,\ \frac{h}{4}H_2'=G_2+\frac{\lambda_1}{2}G_1$$

则得到 H_i' 与 F_i 的对易关系：

$$[H_1',\ H_2']=0$$

$$[H_1',\ F_1]=-2F_1,\ [H_1',\ F_2]=-\lambda_2F_2$$

$$[H_2',\ F_1]=-\lambda_1F_1,\ [H_2',\ F_2]=-2F_2$$

$$F_1^2=F_2^2=0$$

$U_q(A_2^-(\lambda_1, \lambda_2))$的基矢为

$$\{b_i\} = \prod_{k=1}^{r_3}\left[\frac{1-\mathrm{e}^{-\frac{h}{2}(\lambda_1+\lambda_2)}}{1-\mathrm{e}^{-\frac{h}{2}(\lambda_1+\lambda_2)k}}\right]\frac{1}{S_1!S_2!}\cdot F_2^{r_2}F_3^{r_3}F_1^{r_1}G_1^{S_1}G_2^{S_2}$$

$$(r_1, r_2 = 0, 1; r_3, S_1, S_2 = 0, 1, 2, \cdots)$$

量子偶给出了两个代数生成元间的对易关系：

$$[H_i, H_j'] = 0 \ (i, j = 1, 2)$$

$$[H_1, F_1] = -2F_1, [H_1, F_2] = -\lambda_1 F_2, [H_2, F_1] = -\lambda_2 F_1$$

$$[H_2, F_2] = -2F_2$$

$$[H_1', E_1] = 2E_1, \ [H_1', E_2] = \lambda_2 E_2$$

$$[H_2', E_1] = \lambda_1 E_1, \ [H_2', E_2] = 2E_2$$

$$[E_1, F_1] = \mathrm{e}^{(h/2)H_1'} - \mathrm{e}^{-(h/2)H_1}, [E_2, F_2] = \mathrm{e}^{(h/2)H_2'} - \mathrm{e}^{-(h/2)H_2}$$

$$[E_i, F_j] = 0 \ (i \neq j)$$

于是量子偶给出了由$U_q(A_2^+(\lambda_1, \lambda_2))$与$U_q(A_2^-(\lambda_1, \lambda_2))$得到的子代数$D$,它是$\mathscr{H}$代数；它的生成元具有以下关系：

$$[H_i, H_j'] = 0, \ [H_i, E_j] = a_{ij}E_j, \ [H_i, F_j] = -a_{ij}E_j$$

$$[H_i', E_j] = b_{ij}E_j, \ [H_i', F_j] = -b_{ij}F_j$$

$$[E_i, F_i] = \mathrm{e}^{\frac{h}{2}H_i'} - \mathrm{e}^{-\frac{h}{2}H_i}, \ [E_i, F_j] = 0 \quad (i \neq j)$$

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & 2 \end{pmatrix}, \ (b_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & \lambda_2 \\ \lambda_1 & 2 \end{pmatrix}$$

这是个非常有趣的结果。因为通常嘉当矩阵非对角元不能为任意复数,而由量子偶理论,$\mathscr{H}$代数则允许这种推广。形如(q_{ij})的嘉当矩阵可能在量子霍尔(Hall)效应的唯象描述中有用。

在结束本章之前，再强调一下，由于本书的要点是 YBE 而不是量子代数，所以只从 FRT 方案的角度，即从已知 R 矩阵，建立相应转移矩阵元 T_{ab}之间的对易关系的角度来研究这些代数的特点。这些对易关系，当 R 矩阵为三角解时，便是量子代数，它们组成了这些 R 矩阵相关的物理模型的新的对称性。如何将这些对称性与哈密顿量联系起来，是个关键问题，因为只有这样，才能考虑物理应用。作为第一步，应当用物理算符把这些新的代数关系实现出来，然后与哈密顿量相联系，最后用量子代数表示论去研究非线性相互作用模型。这些努力刚刚开始，下一章中将介绍这方面的尝试。

参考文献

1. Drinfeld V G. Quantum Group. In: Proceedings of ICM. California, Berkeley: Academic Press, 1986. 269
2. Drinfeld V G. Soviet Math Dokl, 1988, 36:212
3. Frenckel I B, Jing N H. Proc Nat Acad Sci USA, 1988, 85:9373
4. Faddeev L D, Reshetikhin N Yu, Takhtajan L A. Algebraic Analysis, 1988, 1: 178(in Russia).

   Takhtajan L A. Introduction to Quantum Group and Integrable Massive Models of Quantum Field Theory. In: Ge M L, Zhao B H, eds. Nankai Lectures on Mathematical Physics. Singapore: World Scientific Publ Co Ltd, 1990. 69
5. 马中骐. 杨-巴克斯特方程和量子包络代数. 北京:科学出版社,1993
6. Jimbo. M. Lett Math Phys, 1985, 10:63; 1986, 11:247; Commun Math Phys, 1986, 102:537
7. Woronowicz S L. Commun Math Phys, 1987, 111:613; 1989, 122:125
8. Mamin Yu I. Quantum Groups and Non-Commutative Geometry. Montreal: C R M Univ Publ Co Ltd. 1988
9. Wess J, Zumino B. Nucl Phys (Suppl), 1990, B18:302
10. Song X C, Liao L. Commun Theor Phys, 1992, 17:323
11. Wiegmann P B, Zabrodin A Z. Phys Rev Lett, 1994, 73:1134
12. Sun C P, Ge M L. q-Boson Realization Theory of Quantum Algebras and Its

Applications to Yang-Baxter Equation. In: Ge M L, ed. Quantum Group and Quantum Integrable Systems. Nankai Lectures on Mathematical Physics. Singapore: World Scientiic Publ Co Ltd, 1992. 136

Sun C P, Lu X F, Ge M L. J Phys, 1990, 23A: L1199; J Math Phys, 1991, 32: 2409; J Phys, 1991, A24:3731; Phys Lett, 1991, A160:433. Sun C P, Fu H C, Ge M L. Lett Math Phys, 1991, 23:19; J Phys, 1992, A25:161

13. Sun C P. Ge M L. J Phys, 1991, 24A:L969
    Fu H C, Ge M L. J Phys, 1992, A25:L1233; 1992, A25:L389
14. Kulish P P, Sklyanin E K. Quantum Spectral Transform Method, Recent Developments. In: Hietarinta J, Montonen, eds. Lecture Notes in Physics (Vol. 151). Berlin: Springer-Verlag, 1982, 61; Phys Lett, 1979, A70:461; Lett Math Phys, 1981, 5:393
15. Bazhanov V V, Stroganov Yu G. Chiral Potts Models as a Descendant of The Six-Vertex Model. In: Jimbo M, ed. Yang-Baxter Equation in Integrable Systems. Singapore: World Scientific Publ Co Ltd, 1989, 673
16. Ge M L, Liu X F, Sun C P, Xue K. J Phys, 1991, A24:4935
    Ge M L, Li W, Xue K. Commun Theor Phys, 1992, 18:147
    Liu X F, Ge M L. Commun Theor Phys, 1991, 16:173
17. de Vega H J. Inter J Mod Phys, 1989, A4:2371; 1990, B4:735
18. Ge M L, Wu A C T. J Phys, 1992, A25:L807
19. Ge M L, Liu G C, Xue K. Mod Phys Lett, 1991, A6:1173
20. Ge M L, Wu A C T. J Phys, 1992, A25:1807
21. Ge M L, Liu X F. Commun Theor Phys, 1992, 18:59
22. Lee H C. Twisted Quantum Group and Alexander-Couway Link Polynomials. In: Lee H C, ed. Proceeding of NATO Advanced Study Institute on physics, Geometry and Topology. New York: Plenmon Press, 1989
23. Lusztig G. Contemp Math, 1989, 82:59
24. de Concini, Kac V G. Progress in Mathematics. Gollgque Dixmier: Birkhauser, 1992, 471
25. 孙昌璞. 一种新的因子化实现方法. 天津:南开数学研究所理论物理研究室,1991
26. 孙昌璞. 量子代数的 q 变形玻色子实现及其对杨-巴克斯特方程的应用:[博士论文]. 天津:南开大学,1992
27. Biedenharn L C. J Phys, 1989, A22:L873

Macfarlarn A J. J Phys, 1989, A22:4581

Sun C P, Fu H C. J Phys, 1989, A22:L983

28. Kulish P P, Damashinsky E. H Phys, 1990, A23:L415

Yan H. J Phys, 1990, A23:L1155

29. Pegg D T, Barnett S M. Phys Rev, 1989, A39:1665

30. Date E M, Jombo M, Miki K, Mima T. Phys Lett, 1990, A148:45

31. Jimbo M. Topics from Representations of $U_q(q)$ —— An Introductory Guide to Physicits. In: Ge M L, ed. Quantum Group and Quantum Integrable Systems, Nankai Lectures on Mathematical Physics. Singapore: World Scientific Publ Co Ltd, 1992. 2

32. Sun C P, Li W, Ge M L. J Phys, 1993, A26:5449

33. Ge M L, Liu X F. Lett Math Phys, 1992, 24:197

第 八 章

量子代数的物理应用

如上所述，量子代数这种对称性是通常李代数的推广，而李群是李代数的指数映射形式。人们在量子力学中已经习惯于用李代数的语言描述其对称性质。例如平移用微商算符乘以 $-\mathrm{i}\hbar$，即 $\boldsymbol{p}=-\mathrm{i}\nabla$ ($\hbar=1$)，角动量用 $L_i(i=1, 2, 3)$，自旋用 $\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$ 等等。如果平动或转动是有限的，就要用李群来描述。设平动参数为 $\boldsymbol{a}$，转动参数为 $\boldsymbol{\alpha}$，则平动的群算符为：

$$T(\boldsymbol{a})=\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{p})$$

绕 $\boldsymbol{\alpha}$ 方向转动 $|\boldsymbol{\alpha}|=\alpha$ 角的转动群算符为：

$$R(\boldsymbol{\alpha})=\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{J})$$

其中 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{L}$ 或 $\boldsymbol{\sigma}$，这是量子力学习题集上经常出现的例子。有时，我们不太关心这种群(指数)算符，这是因为根据李群定理，如果知道了无穷小形式(李代数)，则整个李群算符可由微分方程确定。量子代数属于霍普夫代数，它与李代数不同，一般说，它的基矢不能用简单的李代数的指数映射实现。但如果从已知的量子力学算符了解量子代数的物理含义，目前容易作的事就是将熟悉的算符作指数映射。那么关键问题是：何种情况下，量子代数可以被简化为用指数映射表达？并且何种情况下这种简化又不至于回到通常的李群？本章将通过几个例子来阐明量子代数的这种物理实现。通

过它们，将会看到量子代数不但有丰富而深刻的物理含义，而且在处理某些量子力学问题时，是必不可少的。过去没有想到这些，只不过因为对量子力学的理解过于局限而已。为了说明问题，本章只涉及 $U_q(SL(2))$，同时由于量子代数在实际物理应用方面的研究刚刚开始，所以有时也会提到一些有可能进一步研究的课题。本章也包括了南开研究组最近取得的部分成果，其中许多计算用公式可以在钱伯初与曾谨言编著的量子力学习题集中找到[1]。

§8.1 相干态算符与量子代数

首先看一个最简单的例子。设垂直于 x-y 平面方向有恒磁场 B_0，电子在该磁场中运动(即 Landau 能级问题)，则该平面上的力学动量为：

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{p} + e\boldsymbol{A} \quad (c = \hbar = 1) \tag{8.1.1}$$

其中 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(x, y)$ 为矢势，$p_1 = -\mathrm{i}\partial_x$, $p_2 = -\mathrm{i}\partial_y$，引入

$$\pi^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pi_1 \pm \mathrm{i}\pi_2) \tag{8.1.2}$$

易证

$$[\pi^-, \pi^+] = eB_0 \tag{8.1.3}$$

引入玻色子算符：

$$b^{\pm} = \pi^{\pm} \Big/ \sqrt{eB_0} \quad (b^- \equiv b)$$

则有

$$[b, b^+] = 1 \tag{8.1.4}$$

现在重复相干态的计算，引入平移算符

$$U(\alpha) = \exp(\alpha\pi^+ - \alpha^*\pi^-) \tag{8.1.5}$$

则有

$$U(\beta)U(\alpha)=\mathrm{e}^{-eB_0(\alpha\beta^*-\alpha^*\beta)}U(\alpha)U(\beta) \tag{8.1.6}$$

在平面上 $\alpha=\alpha_1+\mathrm{i}\alpha_2$，$\beta=\beta_1+\mathrm{i}\beta_2$，故指数因子变为 $-\mathrm{i}2(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})_3=-2\mathrm{i}S$，其中 S 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 所张平行四边形的面积，B_0S 为磁通量（$e=\dfrac{2\pi}{\Phi_0}$，磁通量以基本磁通量 Φ_0 为单位），令

$$q=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi(\alpha,\beta)} \tag{8.1.7}$$

则得

$$U(\alpha)U(\beta)=q^2U(\beta)U(\alpha) \tag{8.1.8}$$

当 $\Phi(\alpha,\beta)$ 可以取任意值时，这个关系式只不过是(8.1.2)式的指数映射即李群形式。但当 q 为单位根，即 $q^P=1$ 时（这种情况对应于磁通量是 Φ_0 的 $\dfrac{Q}{P}(2\pi)$ 倍，其中 Q、P 为互质素数），(8.1.8)式有它独立的意义。一般说，这时不能再回到通常无穷小的形式，即海森伯代数(8.1.4)式的形式。注意到平移算符满足 $U(-\alpha)=[U(\alpha)]^{-1}$，由(8.1.8)式易知：

$$U(\alpha)U(-\beta)=q^{-2}U(-\beta)U(\alpha) \tag{8.1.9}$$

$$\begin{aligned}U(-\alpha)U(\alpha)&=U(\alpha)U(-\alpha)=U(\beta)U(-\beta)\\&=U(-\beta)U(\beta)=I\end{aligned} \tag{8.1.10}$$

$$q^P=1 \tag{8.1.11}$$

引入算符[2]：

$$\begin{cases}X^+=(q-q^{-1})^{-1}\{U(-\alpha)+U(-\beta)\}\\X^-=-(q-q^{-1})^{-1}\{U(\alpha)+U(\beta)\}\\qK^{-2}=U(-\beta)U(\alpha)\\q^{-1}K^2=U(-\alpha)U(\beta)\end{cases} \tag{8.1.12}$$

将(8.1.8)式代入，则得到

$$[X^{+}, X^{-}] = \frac{K^2 - K^{-2}}{q - q^{-1}}, \quad KX^{\pm}K^{-1} = q^{\pm 1}X^{\pm} \tag{8.1.13}$$

即正是$U_q(SL(2))$的对易关系，当$q \to 1$时($P \to \infty$)回到通常李代数关系。因此，q的意义是($e^{-i\varphi}$)和穿过α与β所围的磁通量紧密相关的。这个例子告诉我们，通常相干态的平移算符的线性组合(8.1.12)式当磁通量量子化时，相当于实现了$U_q(SL(2))$的生成元。将这个结果与(7.2.16)式相比较，不同平移参数的两相干态平移算符的线性组合是它最简单的实现，即是一个很特殊的解，对应于取参数$g_{\pm} = h_{\pm} = f_{\pm} = d_{\pm} = 1$，以及$A = B^{-1}$, $A = U(\beta)$, $C = U(\alpha)$。

上述概念可以推广到超对称量子力学。我们知道，在不考虑z方向动量时，Landau 能级可以写为：

$$E_n = (n + \frac{1}{2} + S_z)\hbar\omega_H, \quad \omega_H = \frac{eB_0}{m_e c} \tag{8.1.14}$$

以后仍取$c = \hbar = 1$单位制。量子数n可以理解为玻色子数目n_B，而$\frac{1}{2} + S_z$可理解为费米子数目n_f，因为$S_z = \pm\frac{1}{2}$，故$n_f = S_z + \frac{1}{2} = 0, 1$。于是$E_n \sim n_B + n_f$，表示玻色子与费米子总数守恒(实际是总角动量守恒)，这便构成了一维超对称量子力学。它的基本特点是基态能级无简并，而激发态则为双重简并。超对称变换可以使$f^{\pm}$与$b^{\pm}$(它们分别为费米子与玻色子算符)互相转换，容易知道，为了保证变换之后费米子仍为费米子，必须引入反对易c数θ，它与$f^{\pm}$反对易，自己反对易，即$\{\theta, f^{\pm}\} = 0$, $\theta^2 = 0$。如有两种反对易c数，则有$\{\theta_i, \theta_j\} = 0 (i, j = 1, 2)$，超对称量子力学有很强的实验基础，将聚乙炔的 SSH (Schrieffer-W. P. Su-Heeger) 模

型[3]取连续极限就是一维超对称量子力学的例子。有关详细介绍可参阅文献[4]及其引用的有关文献。

引入超算符：

$$Q_{+} = B^{-}(b^{+}, b^{-})f^{-},\ Q_{-} = B^{+}(b^{+}, b^{-})f^{-} \tag{8.1.15}$$

其中 $B^{\pm}(b^{+}, b^{-})$ 表示玻色子的任意组合，$B^{\pm} = B_1 \pm \mathrm{i}B_2$，通常取 $f^{\pm} = \sigma^{\pm}\left\{\sigma^{+} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma^{-} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$，$\sigma^{\pm}$可为自旋算符或同位旋算符。要用到的超对称量子力学的结果是[2,4]

$$\begin{cases} H = Q_1^2 = Q_2^2 = \{Q_{+}, Q_{-}\} \\ (Q_{\pm})^2 = 0,\ \{Q_1, Q_2\} = 0 \\ [Q_{\pm}, H] = 0 \end{cases} \tag{8.1.16}$$

其中哈密顿量

$$H = \frac{1}{2}\{B^{-}, B^{+}\} + \frac{1}{2}[B^{-}, B^{+}]\sigma_3 \tag{8.1.17}$$

注意到，反对易 c 数不但自己反对易，而且与 $f^{\pm}$ 反对易。引入 $\boldsymbol{\theta}_i = (\theta_1, \theta_2)$，$\boldsymbol{\rho}_i = (\rho_1, \rho_2)$，其中 $\boldsymbol{\rho}_i$，θ_i，$i = 1, 2$ 是反对易 c 数，$\boldsymbol{Q} = (Q_1, Q_2)$，可以定义超对称量子力学的平移算符

$$U(\boldsymbol{\theta}) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{Q}} \tag{8.1.18}$$

应用

$$\{\theta_i, \theta_j\} = \{\rho_i, \rho_j\} = \{\rho_i, \theta_j\} = 0\ (i, j = 1, 2) \tag{8.1.19}$$

则得到

$$U(\boldsymbol{\rho})U(\boldsymbol{\theta}) = \exp\left(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{Q} + \frac{1}{2}[\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{Q}]\right) \tag{8.1.20}$$

事实上，由(8.1.16)式与(8.1.17)式，有

$$[\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{Q},\ \boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{Q}]=(-2)(\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\theta})H \tag{8.1.21}$$

而 H 与 $\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\theta}$ 均为玻色性的，与 $\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{Q}$ 分别对易。引入

$$\alpha(\rho,\ \theta)=-\mathrm{i}\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\theta} \tag{8.1.22}$$

则有

$$U(\boldsymbol{\rho})U(\boldsymbol{\theta})=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha(\rho,\ \theta)H}U(\boldsymbol{\rho}+\boldsymbol{\theta}) \tag{8.1.23}$$

及

$$U(\boldsymbol{\rho})U(\boldsymbol{\theta})=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha(\rho,\ \theta)H}U(\boldsymbol{\theta})U(\boldsymbol{\rho}) \tag{8.1.24}$$

其中 H 由(8.1.17)式给出。由于

$$[H,\ U(\theta)]=0 \tag{8.1.25}$$

可将(8.1.23)式形式地写为(E 为 H 的本征值)：

$$U(\boldsymbol{\rho})U(\boldsymbol{\theta})=\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\alpha(\rho,\ \theta)E}U(\boldsymbol{\theta})U(\boldsymbol{\rho}) \tag{8.1.26}$$

它也可以理解为在两端对态矢量$\langle n|\cdots|n\rangle$取平均。定义相应态的参数(固定 $\boldsymbol{\rho}$与 $\boldsymbol{\theta}$)：

$$q(\rho,\ \theta)=\exp\{\mathrm{i}\alpha(\rho,\ \theta)E\} \tag{8.1.27}$$

亦即将(8.1.24)式中的算符矩阵换为其本征值，得到：

$$U(\boldsymbol{\rho})U(\boldsymbol{\theta})=q^2(\rho,\ \theta)U(\boldsymbol{\theta})U(\boldsymbol{\rho}) \tag{8.1.28}$$

由(8.1.28)式知，

$$U(-\boldsymbol{\rho})U(\boldsymbol{\theta})=(q(\rho,\ \theta))^{-2}U(\boldsymbol{\theta})U(-\boldsymbol{\rho}) \tag{8.1.29}$$

于是仿照(8.1.12)式，对某一确定能级 E，可定义

$$\begin{cases}U(-\boldsymbol{\rho})+U(-\boldsymbol{\theta})=(q-q^{-1})X^{+}\\ U(\boldsymbol{\rho})+U(\boldsymbol{\theta})=-(q-q^{-1})X^{-}\\ U(-\boldsymbol{\rho})U(\boldsymbol{\theta})=q^{-2}K^{2}\\ U(-\boldsymbol{\theta})U(\boldsymbol{\rho})=q^{2}K^{-2}\end{cases} \tag{8.1.30}$$

则 $X^{\pm}$，K，K^{-1}满足 $U_q(SL(2))$的对易关系。所有以上算符都是对确定的平移矢量 ρ 与 θ 定义的，并且 ρ 与 θ 为反对易 c 数。(8.1.30)式结论对超对称量子力学系统(8.1.16)式、(8.1.17)式都是正确的，现在举两个例子。

(1) 恒磁场中二维电子的运动

在非相对论近似下[4]，其哈密顿量及超对称算符为：

$$\begin{cases} B^{-}=\pi^{-},\ B^{+}=\pi^{+} \\ Q_{+}=\pi^{-}\sigma^{+},\ Q_{-}=\pi^{+}\sigma^{-} \\ H=\{Q_{+},\ Q_{-}\}=\begin{pmatrix}\pi^{-}\pi^{+} & 0 \\ 0 & \pi^{+}\pi^{-}\end{pmatrix} \end{cases} \tag{8.1.31}$$

H 的本征值方程为 $H\Psi=E\Psi$，其中 Ψ 为两个分量的列矢量，则可定义 q 与(8.1.30)式。由于(8.1.3)式，有

$$\begin{aligned} H &= eB_0\left\{b^{+}b+\frac{1}{2}\left[1+\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}\right]\right\} \\ &= eB_0\left(b^{+}b+\frac{1}{2}+S_z\right) \\ &= eB_0(n_{\mathrm{B}}+n_{\mathrm{f}}) \end{aligned} \tag{8.1.32}$$

显然，(8.1.32)式中哈密顿量的本征值正是 Landau 能级。在计算中已选用 $\hbar=c=1$，故 $e=\frac{2\pi}{\Phi_0}$，Φ_0 为磁通量子，故 eB_0 为穿过单位面积的磁通量子数乘以 2π。如果磁通量量子化，设为 m，则 $eB_0=2\pi m$，此时 $E=2\pi n$ $(n=n_{\mathrm{B}}+n_{\mathrm{f}})$。由于$(\rho\cdot\theta)H$ 与 $U(\theta)$、$U(\rho)$分别对易，而 $\rho\cdot\theta$ 为玻色性 c 数，故有

$$[H,\ X^{\pm}]=[H,\ K^{\pm1}]=0 \tag{8.1.33}$$

也就是说，量子代数 $U_q(SL(2))$ 是(8.1.32)式的对称性，或者说 $U_q(SL(2))$ 描述了 Landau 能级的简并性，这种简并性是以前所

不知道的。而且有趣的是 q 依赖于不同的能级 E_n。与一维超对称量子力学不同，二维时基态可以是简并的。然而，还存在一种新的简并性质，它是用量子代数刻画的。有关 Landau 能级的新的简并度，可参阅文献[5]。

当然，也可以作一维代换(见文献[4])：

$$\begin{cases} B^{\pm} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\mp \mathrm{i}p + W(x)) \\ H' = \dfrac{1}{2}\left(p^2 + W^2(x) + \dfrac{\mathrm{d}W(x)}{\mathrm{d}x}\sigma_3\right) \end{cases} \tag{8.1.34}$$

其中 $W(x)$ 为超势。将这个哈密顿量的本征值解出(给定 $W(x)$)，即可构造量子代数，它描述 H' 的新的对称性。

(2) π^0 介子与核子作用简单模型

此时[4]有：

$$\begin{cases} Q_{\pm} = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p} \pm \mathrm{i}g\pi)\tau^{\pm} \\ B^{\mp} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{p} \pm \mathrm{i}g\pi, \; f^{\pm} = \tau^{\pm} \end{cases} \tag{8.1.35}$$

其中 $\tau^{\pm}$ 表示核子同位旋算符，可用泡利矩阵 $\sigma^{\pm}$ 表示，但应理解为作用于电荷空间，g 为作用常数，$\pi = \pi(x_1, x_2, x_3)$ 为中性 π 介子(π^0)场函数。唯象的哈密顿量由(8.1.16)式和(8.1.35)式给出[4]：

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{N}\pi} &= \frac{1}{2M}\{Q_+, Q_-\} \\ &= \frac{1}{2M}\{\boldsymbol{p}^2 + g^2\pi^2 - g(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla)\pi^0\tau_3\} \end{aligned} \tag{8.1.36}$$

其中 M 为核子质量。显然，三维 π^0 凝聚场 $\pi(\boldsymbol{r})$ 乘以 $\dfrac{g}{2M}$ 起着超势的作用。(8.1.36)式的本征值可以决定 q，从而定义 $U_q(SL(2))$，它与 $H_{\mathrm{N}\pi}$ 对易，因而这种唯象核力模型也具有新的简并性，它的真正物理效应是值得研究的问题。

如上所述，虽然将量子代数与相干态、超对称量子力学联系起来是刚刚发展的课题，但从这些例子已经可以看到，量子代数是量子力学的必然结果，不是件奇怪的事。

最后要指出，由(8.1.12)式构成的量子代数起源于(8.1.8)式，其中 q 为常数，但这种构成中 q 依赖于形成面积的两个矢量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$。当平面具有周期性格点结构时，例如 $\boldsymbol{\alpha}$ 沿 x 方向，而 $\boldsymbol{\beta}$ 沿 y 方向的方格子，并且全平面重复这一结构，那么这种基本元胞就代表了全平面的性质。

§ 8.2 相位量子化与量子代数的循环表示

狄拉克(Dirac)量子化方案的基本思想之一就是首先建立泊松括号形式，例如 $\{q, H\}$，其中 q 为所考虑的力学量，H 为哈密顿量由 q 及其共轭动量组成。如果知道了基本泊松括号 $\{p, q\}$，那么便可以计算出 $\{q, H\}$。当作量子化时就简单地把泊松括号 $\{\ ,\ \}$ 换为 $\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\ ,\ ]$。当存在第二类约束时，则应将泊松括号 $\{\ ,\ \}$ 换为狄拉克括号 $\{\ ,\ \}_{\mathrm{D}}$，但它的量子极限一般也是 $\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\ ,\ ]$。这种对应形式的量子化在许多问题中已证明是正确的。

要指出，量子化方案绝不是唯一的，已知经典结果猜测其量子本源称为“变形”(deformation)，变形可有许多种方式，它们均取经典结果为极限，并在量子化过程保持自洽，更重要的是与实验符合。因此，常常是某种量子化方案对处理某种问题特别有效，而有时可以证明两种方案在某些问题中是等价的，而有些则不能。

上述狄拉克方案的 $\{\ ,\ \}\rightarrow\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}[\ ,\ ]$ 这种代换在处理角变量量子化时遇到困难。设作用变量 J 与角变量 ϕ 满足泊松括号

$$\{J,\ \phi\} = 1$$

但在进行这种量子化时，作用变量 $J \to$ 粒子数 $\hat{N}$，$\phi \to \hat{\phi}$ 为位相，但对粒子数态 $|n\rangle$ 取平均值 $\langle n|[\hat{N}, \hat{\phi}]|n\rangle = 0$，而泊松括号右端为 1。对这个问题曾有过许多研究，比较有代表性的是 S-G (Susskind-Glogower)[6] 与 P-B(Pegg-Barnett)[7] 理论。S-G 理论定义了不满足幺正性关系的指数算符 $e^{i\hat{\phi}}$，并在通常玻色子意义下建立了 $\sin\hat{\phi}$ 与 $\cos\hat{\phi}$ 算符量子化理论。P-B 理论保证了幺正性性质，即应用算符 $e^{i\hat{\phi}}$，仅在玻色子粒子数填充具有最大值时建立了严格量子化理论。我们要证明，P-B 理论就是量子代数的循环表示。按 P-B 讨论，首先将相位本征态 $|\phi_m\rangle$ 用粒子数态展开：

$$|\phi_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{n=0}^{s} e^{in\phi_m} |n\rangle \tag{8.2.1}$$

其中 s 为"玻色子"填充数上限，因此当 s 有限时，严格说并非玻色子。在(8.2.1)式中

$$\phi_m = \phi_0 + \frac{2m\pi}{s+1} \tag{8.2.2}$$

有

$$\begin{aligned}
\langle \phi_n | \phi_m \rangle &= \frac{1}{s+1} \sum_{r,t=0}^{s} e^{i(t\phi_m - r\phi_n)} \langle r | t \rangle \\
&= \frac{1}{s+1} \sum_{t=0}^{s} e^{it(\phi_m - \phi_n)} \\
&= \frac{1}{s+1} \sum_{t=0}^{s} q^{t(m-n)}
\end{aligned}$$

其中

$$q = \exp\left(\frac{2\pi i}{s+1}\right), \quad q^{s+1} = 1 \tag{8.2.3}$$

考虑到 $\sum_{n=0}^{s} q^n = 0$，易知

$$\langle \phi_n | \phi_m \rangle = \delta_{mn} \tag{8.2.4}$$

因而

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{m=0}^{s} e^{-in\phi_m} |\phi_m\rangle \tag{8.2.5}$$

$$\hat{\phi} = \sum_{n=0}^{s} \phi_m |\phi_m\rangle\langle\phi_m| \tag{8.2.6}$$

其中 $|\phi_m\rangle$ 为算符 $\hat{\phi}$ 的本征态。将 $e^{i\hat{\phi}}$ 作用在 $|n\rangle$ 上

$$\begin{aligned} e^{i\hat{\phi}}|n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{m=0}^{s} e^{-in\phi_m} e^{i\hat{\phi}} |\phi_m\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{m=0}^{s} e^{-i(n-1)\phi_m} |\phi_m\rangle \end{aligned}$$

与(8.2.1)式比较得到

$$e^{i\hat{\phi}}|n\rangle = |n-1\rangle \quad (n \geqslant 1) \tag{8.2.7}$$

但将 $\exp(i\hat{\phi})$作用在真空态上，有

$$\begin{aligned} \exp(i\hat{\phi})|0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{m=0}^{s} \exp(i\phi_0)|\phi_m\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{m=0}^{s} e^{i(s+1)\phi_0} e^{-is\phi_m} |m\rangle \end{aligned}$$

另一方面

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{m=0}^{s} e^{-is\phi_m} |\phi_m\rangle$$

故成立

$$\exp(i\hat{\phi})|0\rangle = \exp\{i(s+1)\phi_0\}|s\rangle \tag{8.2.8}$$

同理可证

$$\exp(-i\hat{\phi})|s\rangle = \exp\{-i(s+1)\phi_0\}|0\rangle \tag{8.2.9}$$

这样可计算出所有关系式：

$$\begin{cases}\exp(\mathrm{i}\hat{\phi})|n\rangle = |n-1\rangle \quad (n\neq 0)\\ \exp(\mathrm{i}\hat{\phi})|0\rangle = \exp\{\mathrm{i}(s+1)\phi_0\}|s\rangle \\ \exp(-\mathrm{i}\hat{\phi})|n\rangle = |n+1\rangle \quad (n\neq s)\\ \exp(-\mathrm{i}\hat{\phi})|s\rangle = \exp\{-\mathrm{i}(s+1)\phi_0\}|0\rangle\end{cases} \tag{8.2.10}$$

$$\exp(\mathrm{i}\hat{\phi})\exp(-\mathrm{i}\hat{\phi}) = \exp(-\mathrm{i}\hat{\phi})\exp(\mathrm{i}\hat{\phi}) \tag{8.2.11}$$

注意，(8.2.11)式不是显然的，S-G 理论就不满足这个关系，因而只能定义一个整体算符$\widehat{\exp(\mathrm{i}\phi)}$，它不能用 ϕ 的指数展开。而 P-B 理论则满足(8.2.11)式，但要付出的代价是，对于位相 $\hat{\phi}$ 而言必须附加条件(8.2.8)式，这就导致了(8.2.10)式所示的循环性质。现在要指出，(8.2.10)式就是 $U_q(SL(2))$的 P 维循环表示[8~10]，其中 $P=s+1$，$q=\exp\left(\dfrac{2\pi\mathrm{i}}{P}\right)$，详细的讨论见文献[11]，本书仅给出要点。

首先定义算符

$$q^{\hat{N}}|n\rangle = q^{n+\eta}|n\rangle \quad (q^P=1,\ P=s+1) \tag{8.2.12}$$

则有

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{\phi}}q^{\hat{N}}|n\rangle = q^{n+\eta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{\phi}}|n\rangle = \begin{cases}q^{\eta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}P\theta_0}|s\rangle & (n=0)\\ q^{n+\eta}|n-1\rangle & (n\neq 0)\end{cases} \tag{8.2.13}$$

$$q^{\hat{N}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{\phi}}|n\rangle = \begin{cases}q^{\eta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}P\theta_0}q^{-1}|s\rangle & (n=0)\\ q^{n+\eta}q^{-1}|n-1\rangle & (n\neq 0)\end{cases} \tag{8.2.14}$$

比较两式，得到

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{\phi}}q^{\hat{N}} = qq^{\hat{N}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{\phi}} \tag{8.2.15}$$

可以独立证明

$$q^{\hat{N}} e^{-i\hat{\phi}} = q e^{-i\hat{\phi}} q^{\hat{N}} \tag{8.2.16}$$

它们与(8.2.11)式自洽，亦即(8.2.12)式定义与(8.2.11)式符合。

定义算符

$$a^{+} = \sqrt{[\hat{N}]}\exp(-i\hat{\phi}), \quad a = \exp(i\hat{\phi})\sqrt{[\hat{N}]} \tag{8.2.17}$$

其中
$$[\hat{N}] = (q^{\hat{N}} - q^{-\hat{N}})/(q - q^{-1})$$

或

$$\exp(i\hat{\phi}) = a[\hat{N}]^{-1/2}, \quad \exp(-i\hat{\phi}) = [\hat{N}]^{-1/2}a^{+} \tag{8.2.18}$$

将(8.2.18)式代入(8.2.16)式，可得到

$$a^{+}a = [\hat{N}], \quad aa^{+} = [\hat{N} + 1] \tag{8.2.19}$$

直接计算得到

$$\begin{cases} aa^{+} - qa^{+}a = q^{-\hat{N}} \\ aa^{+} - q^{-1}a^{+}a = q^{\hat{N}} \end{cases} \tag{8.2.20}$$

综合起来，有

$$\begin{cases} q^{P} = q^{s+1} = 1, \ a \equiv a^{-} \\ [\hat{N}] = a^{+}a, \quad [\hat{N} + 1] = aa^{+} \\ aa^{+} - q^{\pm 1}a^{+}a = q^{\pm \hat{N}} \\ q^{\pm \hat{N}} a^{+} = q^{\pm 1}a^{+} q^{\pm \hat{N}} \\ q^{\pm \hat{N}} a = q^{\mp 1} a q^{\pm \hat{N}} \end{cases} \tag{8.2.21}$$

这就证明了 P-B 理论正是 q 变形的玻色子代数的 P 阶循环表示。将(8.2.21)式作用在粒子数空间$|n\rangle$上，得

$$\begin{cases} a|n\rangle = \sqrt{[n+\eta]}\,|n-1\rangle \quad (n \neq 0) \\ a|0\rangle = \sqrt{[\eta]}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(s+1)\phi_0}|s\rangle \\ a^+|n\rangle = \sqrt{[n+\eta+1]}\,|n+1\rangle \quad (n \neq s) \\ a^+|s\rangle = \sqrt{[\eta]}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(s+1)\phi_0}|0\rangle \\ q^{\hat{N}}|n\rangle = q^{n+\eta}|n\rangle,\ q = \exp\left(\dfrac{2\pi\mathrm{i}}{s+1}\right),\ P = s+1 \end{cases} \tag{8.2.22}$$

由于 $q^P = 1$，所以(8.2.22)式正是(7.4.33)式所示的量子代数 $U_q(SL(2))$的循环表示。正如上一章所指出的，它只有 P 维表示。从物理上说，这种循环性质是可以预料的，因为描述角变量的量子化必须包含首尾相接的机制，否则不会自洽。当然，具有 s 上限填充数的粒子不是真正的玻色子。不少文献取 $s\to\infty$ 时的极限作为“真正”$\hat{\phi}$ 量子化的描述，这时 q 为单位根的性质极不明显，相应“玻色子”态似乎成为真实玻色子态。这里需要注意的是，如 Fujikawa 所指出的，即使 $s\to\infty$，P-B 理论的拓扑结构与 S-G 理论仍有本质的不同[12]。因为证明稍费篇幅，且需要一些数学定义，本书不拟赘述。需要指出的是，类似(8.2.1)式展开式中的切断，在场论中具有重要作用，正如文献[12]中指出的，正规化理论的拓扑与直接取求和到无穷的拓扑是不同的。这点从循环表示去看是非常明显的。

如上所述，P-B 理论就是 $U_q(SL(2))$当 $q^{s+1} = 1$ 时的循环表示，也已看到，这种表示在量子力学中实际上早已存在了。人们已经长期习惯于李代数只具有最高和最低权这一事实。然而相位量子化需要越出这一限制，它需要循环表示，而循环表示在通常的李代数理论中是不允许的。当然，相位量子化是个长期争论的问题，这里所述仅仅是一种观点，将它视为一个练习或许更为合适。不过

我们知道,李代数表示论曾大大促进了量子力学的发展。现在出现了量子力学的量子代数循环表示,可以预期,它将会在物理中具有许多用途。虽然这方面研究刚刚开始,但已经可以举出一些有物理兴趣的例证。作为一个演示性例子,考虑约瑟夫森(Josephson)结的位相量子化效应。虽然在其他理论中会有物理效应[13, 14],作为一个练习,现在从新的观点处理约瑟夫森结的位相量子化效应[15]。

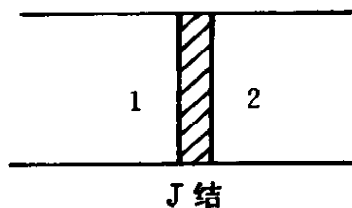


图 8.1

设结的左、右区域以 1 与 2 表示(见图 8.1),相应的 Cooper 对准粒子算符为 $a_j^{\pm}(j=1,2)$,将它们表示为

$$a_j^{+}=\sqrt{[\hat{N}_j]}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{\phi}_j},\quad a_j^{-}\equiv a_j=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{\phi}_j}\sqrt{[\hat{N}_j]}\quad(j=1,2) \tag{8.2.23}$$

如果相位 $\hat{\phi}_j$ 依 P-B 理论量子化,则下列诸式成立(对 i 指标相重不求和):

$$\begin{cases}a_ia_i^{+}-qa_i^{+}a_i=q^{-\hat{N}_i}\quad(i=1,2)\\ [a_1^{\pm},a_2^{\pm}]=0\\ a_i^{+}a_i=[\hat{N}_i],\ a_ia_i^{+}=[\hat{N}_i+1]\end{cases} \tag{8.2.24}$$

依(7.4.8)式定义量子代数生成元[11]

$$J^{+}=a_1^{+}a_2,\ J^{-}=a_2^{+}a_1,\ J_3=\frac{1}{2}(\hat{N}_1-\hat{N}_2) \tag{8.2.25}$$

易证

$$[J^{+},J^{-}]=[\hat{N}_1-\hat{N}_2]=[2J_3] \tag{8.2.26}$$

其中

$$q = \exp\left(\frac{2\pi i}{s+1}\right) \tag{8.2.27}$$

这里 J^+ 表示在右端湮没一个粒子而在左端产生一个粒子，依(8.2.23)式它们又与量子化相位有关。于是考虑到区域 1 与区域 2 中整体位相 $\hat{\phi}_j$ 量子化时的哈密顿量为

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \omega_1 a_1^+ a_1 + \omega_2 a_2^+ a_2 + \alpha J^+ + \alpha^* J^- \\ &= \omega_1[\hat{N}_1] + \omega_2[\hat{N}_2] + \alpha J^+ + \alpha^* J^- \end{aligned} \tag{8.2.28}$$

其中 $a_i^\pm$，$J_i^\pm$ 满足(8.2.24)式～(8.2.27)式诸对易关系，当 $s\to\infty$ 时，近似回到通常玻色子，α 为常数。由海森伯方程

$$i\hbar\frac{da_j^\pm}{dt} = [a_j^\pm, H] \tag{8.2.29}$$

考虑到(8.2.24)式第三式，由(8.2.29)式易证：

$$i\hbar\frac{d[\hat{N}_j]}{dt} = [[\hat{N}_j], \hat{H}] \quad (j = 1, 2) \tag{8.2.30}$$

将(8.2.28)式代入(8.2.30)式，得到

$$i\hbar\frac{d}{dt}[\hat{N}_j] = [[\hat{N}_j], \alpha J^+ + \alpha^* J^-] \tag{8.2.31}$$

以下为简化，取 $\hbar = 1$，应用(8.2.23)式，经过计算，得到：

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\hat{\phi}_1 = \omega_1([\hat{N}_1+2]-[\hat{N}_1+1]) \\ \qquad\qquad + \alpha^*\sqrt{\dfrac{[\hat{N}_2]}{[\hat{N}_1]}}([\hat{N}_1+1]-[\hat{N}_1])\cos\hat{\phi} \\ \dfrac{d}{dt}[\hat{N}_1] = -2\sqrt{[\hat{N}_1][\hat{N}_2]}([\hat{N}_1+1]-[\hat{N}_1])\sin\hat{\phi} \\ \hat{\phi} = \hat{\phi}_2 - \hat{\phi}_1 \end{cases} \tag{8.2.32}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\phi}_2 = \omega_2([\hat{N}_2+2]-[\hat{N}_2+1]) \\ \qquad\qquad + \alpha\sqrt{\dfrac{[\hat{N}_1]}{[\hat{N}_2]}}([\hat{N}_2+1]-[\hat{N}_2])\cos\hat{\phi} \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\hat{N}_2] = 2\sqrt{[\hat{N}_1][\hat{N}_2]}([\hat{N}_2+1]-[\hat{N}_2])\sin\hat{\phi} \end{cases} \tag{8.2.33}$$

如果 $[\hat{N}_1]=[\hat{N}_2]=[\hat{N}]$，即左、右两区中 $\hat{N}|n\rangle = N|n\rangle$ 本征值相同，并且 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}([\hat{N}_1]+[\hat{N}_2])=0$，$\alpha=\alpha^*$ 时，即得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\phi} = (\omega_2-\omega_1)([\hat{N}+2]-[\hat{N}+1]) \tag{8.2.34}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\hat{N}] = 2[\hat{N}]([\hat{N}+2]-[\hat{N}])\sin\hat{\phi} \tag{8.2.35}$$

当取 $\hat{\phi}$ 的经典极限，即 $s\to\infty(q\to 1)$，则有

$$\hat{\phi}\to\phi=(\omega_2-\omega_1)t+\phi_0$$

为了求出(8.2.35)式的一级修正，将这个极限代入(8.2.35)式，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\hat{N}] = 2[\hat{N}]([\hat{N}+1]-[\hat{N}])\sin\{\omega_0 t+\phi_0\} \tag{8.2.36}$$

$$\omega_0=\omega_2-\omega_1$$

流算符为

$$\hat{j} = -2e\frac{\mathrm{d}[\hat{N}]}{\mathrm{d}t}$$

故得

$$\begin{aligned} j_s(n) &= \langle n|\ \hat{j}\ |n\rangle \\ &= -4e[n+\eta]([n+\eta+1]-[n+\eta])\sin(\omega_0 t+\phi_0) \end{aligned}$$

$$q = \exp(\mathrm{i}\gamma), \gamma = \frac{\pi}{s+1} \tag{8.2.37}$$

或

$$j_s(n) = (-4e)\left\{\frac{\sin\left(\frac{2\pi(n+\eta)}{s+1}\right)\sin\left(\frac{2\pi\left(n+\eta+\frac{1}{2}\right)}{s+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{2\pi}{s+1}\right)\sin\frac{\pi}{s+1}}\right\} \cdot \sin(\omega_0 t + \phi_0) \tag{8.2.38}$$

与通常约瑟夫森流相比，它的振幅依赖于不同能级 $|n\rangle$ 态。显然，它会影响 Shapiro 台阶效应。

最后要强调，有关相位量子化问题存在许多不同的观点，有些甚至是对立的，本节讨论的仅是其中之一，这个问题实质上还远未解决。

§ 8.3 Hofstadter 模型与循环表示

在 x-y 平面正方格子内运动的布洛赫(Bloch)电子，当磁场垂直于该平面时，其哈密顿量为

$$\hat{\mathscr{H}} = \sum_{\langle n, m\rangle} \mathrm{e}^{\mathrm{i}A_{n,m}} C_n^+ C_m \tag{8.3.1}$$

其中 $\langle n, m\rangle$ 表示近邻相互作用，C_n^+ 与 C_m 分别为相应平面格子上的费米子产生算符与湮没算符。上式中为简化已令 $C_n^+ C_m$ 前近邻格子的从一处跳往另一处(hopping)振幅 $t_{n,m} = 1$。$A_{n,m}$ 为规范势，实际上是与 $\boldsymbol{n}$ 为邻的单位小格子上穿透的磁通量，即

$$\prod_{\text{格子}} \exp(\mathrm{i}A_{n,m}) = \exp(\mathrm{i}\Phi) \tag{8.3.2}$$

由于沿 z 轴的恒磁场 $\boldsymbol{B} = B_0 \boldsymbol{e}_z$，$A_{n,m} = \frac{\boldsymbol{B}}{2} \cdot (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{m})$，$\Phi$ 为磁通

量。引入态(Wannier 态)：

$$|j\rangle = C_j^+|0\rangle \tag{8.3.3}$$

并定义平移算符：

$$T_\mu(j) = \exp(\mathrm{i}A_{j,\,j+\mu})|j\rangle\langle j+\mu| \tag{8.3.4}$$

$$T_\mu = \sum_j T_\mu(j) = \sum_j \exp(\mathrm{i}A_{j,\,j+\mu})|j\rangle\langle j+\mu| \tag{8.3.5}$$

则有：

$$T_nT_m = \sum_{j,\,k} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(A_{j,\,j+n}+A_{k,\,k-m})}|j\rangle\langle j+n|k\rangle\langle k+m| \tag{8.3.6}$$

由于 $\langle j+n|k\rangle = \delta_{k,\,j+n}$，即得

$$T_nT_m = \sum_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}A_{j,\,j+n}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}A_{j+n,\,j+m+n}}|j\rangle\langle j+m+n|$$

$$T_mT_n = \sum_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}A_{j,\,j+m}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}A_{j+m,\,j+m+n}}|j\rangle\langle j+(m+n)| \tag{8.3.7}$$

$A_{j,\,j+m}$ 表示由 j 与 $j+m$ 两个矢量夹成的面积乘以 B_0，故得

$$\begin{aligned} T_nT_m &= \sum_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{B_0}{2}e_z\cdot\{j\times n+n\times j+n\times m+j\times(n+m)\}}|j\rangle\langle j+m+n| \\ &= \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}B_0e_z\cdot(n\times m)}\sum_j \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}B_0e_z\cdot\{j\times(n+m)\}}|j\rangle\langle j+(m+n)| \\ &= \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{2}B_0e_z\cdot(n\times m)}T_{n+m} \end{aligned} \tag{8.3.8}$$

或

$$T_nT_m = \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\Phi\right)T_{m+n} \tag{8.3.9}$$

$$T_mT_n = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\Phi\right)T_{m+n} \tag{8.3.10}$$

选 m 沿 x 方向，n 沿 y 方向，则有

$$\begin{cases} T_y T_x = q^{-2} T_x T_y \\ q = \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\Phi\right) \end{cases} \tag{8.3.11}$$

当磁通量量子化时，即

$$\Phi = \frac{2\pi n}{P},\ q^P = 1 \tag{8.3.12}$$

(8.3.12)式不能回到李代数的形式。到此为止，都是熟知的知识，问题的关键在于哈密顿量(8.3.1)式可以用平移算符 $T_{\pm x}$，$T_{\pm y}$ 表示出来[2]：

$$\begin{aligned} \hat{\mathscr{H}} &= (-\mathrm{i}) \sum_{\mu=(\pm x,\ \pm y)} \sum_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}A_{j,\ j+\mu}} |j\rangle\langle j+\mu| \\ &= T_x + T_{-x} + T_y + T_{-y} \end{aligned} \tag{8.3.13}$$

其中(—i)因子是为保证厄米性加上的因子，$T_{\pm x}$，$T_{\pm y}$ 满足(8.3.11)式及其逆关系，注意 $T_{-x}=(T_x)^{-1}$，$T_{-y}=(T_y)^{-1}$，有

$$T_x T_y = q^2 T_y T_x,\ T_x T_{-y} = q^{-2} T_{-y} T_x \tag{8.3.14}$$

等等，它们称为海森伯-外尔关系。正如以前证明过的，此关系可以化为量子代数关系[13~15]，例如

$$\begin{cases} T_{-x} + T_{-y} = (q - q^{-1})B \\ T_x + T_y = -(q - q^{-1})C \\ T_{-y}T_x = q^{-2}A^2,\ T_{-x}T_y = q^2 D^2,\ AD = 1 \end{cases} \tag{8.3.15}$$

直接验证可得

$$[B,\ C] = \frac{A^2 - D^2}{q - q^{-1}},\ AB = qBA,\ AD = 1 \tag{8.3.16}$$

亦即有

$$B = X^+,\ C = X^-,\ A = K \text{ 和 } D = K^{-1}$$

见(7.3.41)式。(8.3.13)式遂变为(差(—i)因子)：

$$\hat{H}=\mathrm{i}(q-q^{-1})(C-B) \tag{8.3.17}$$

引入 Fock 空间，直接计算可以证明当作用在粒子数态 $|k\rangle$ 上，算符满足关系[8~11]：

$$\begin{cases} B|k\rangle=[2\lambda-k-\eta+1]_q|k-1\rangle \\ B|0\rangle=[2\lambda-\eta+1]_q|P-1\rangle \\ C|k\rangle=[k+\eta+1]_q|k+1\rangle \\ C|P-1\rangle=[\eta]_q|0\rangle \\ A|k\rangle=q^{\lambda-k-\eta}|k\rangle,\ D|k\rangle=q^{-(\lambda-k-\eta)}|k\rangle \\ q=\exp\left(\dfrac{\mathrm{i}}{2}\Phi\right),\ q^P=1 \end{cases} \tag{8.3.18}$$

其中 λ, η 为复参数。用量子代数求 Hofstadter 模型本征方程首先是由 Wiegmann-Zabrodin 引入的[2]，但会发现，引用循环表示会使问题得到比较彻底的解决。以下我们沿用文献[16]的方法从另一观点——循环表示——来研究这个问题。由于当 $q^P=1$ 时，存在循环表示，(8.3.18)式所示的 Fock 空间可以用复数 Z 的 $(P-1)$ 阶多项式实现，其中 $Z^P=1$。可证此时态为

$$|k\rangle=z^k \quad (z^P=1) \tag{8.3.19}$$

满足(8.3.18)式。将(8.3.19)式代入(8.3.18)式得到，例如：

$$B(z^k)=\frac{z^{-1}}{q-q^{-1}}\{q^{2\lambda-\eta+1}(q^{-1}z)^k-q^{-2\lambda+\eta-1}(qz)^k\}$$

等等。令 $\varphi(z)$ 为 z 的多项式，即

$$\phi(z)=\sum_{k=0}^{P-1}M_k z^k=\sum_k M_k|k\rangle$$

将算符 B、C、A 分别作用在 $|k\rangle$ 上，用 z^k 计算后再还原为 $|k\rangle$，因

而可用多项式 $\phi(z)$ 写出，令 $w = q - q^{-1}$，则得到

$$\begin{cases} B\varphi(z) = z^{-1}w^{-1}\{q^{2\lambda-\eta+1}\varphi(q^{-1}z) - q^{-2\lambda+\eta+1}\varphi(qz)\} \\ C\varphi(z) = zw^{-1}\{q^{\eta+1}\varphi(qz) - q^{-\eta-1}\varphi(q^{-1}z)\} \\ A\varphi(z) = q^{\lambda-\eta}\varphi(q^{-1}z) \\ D\varphi(z) = q^{-\lambda+\eta}\varphi(qz) \end{cases} \tag{8.3.20}$$

将本征方程：

$$\hat{\mathscr{H}}\varphi(z) = E\varphi(z) \tag{8.3.21}$$

与(8.3.20)式结合，得到

$$\begin{aligned} -\mathrm{i}E\varphi(z) = &(zq^{\eta+1} + z^{-1}q^{-2\lambda+\eta-1})\varphi(qz) \\ &-(zq^{-\eta-1} + z^{-1}q^{2\lambda-\eta+1})\varphi(q^{-1}z) \end{aligned} \tag{8.3.22}$$

由于 $q^P = 1$，最简单可选择 $z = q^n$，即

$$\varphi(z) = \varphi(q^n) = \chi_n \tag{8.3.23}$$

(8.3.22)式遂变为

$$\begin{aligned} -\mathrm{i}E\chi_n = &(q^{n+\eta-1} + q^{-n-2\lambda+\eta-1})\chi_{n+1} \\ &-(q^{n-\eta+1} - q^{-n+2\lambda-\eta+1})\chi_{n-1} \end{aligned} \tag{8.3.24}$$

注意 $q = \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\Phi\right)$，则上式变为

$$\begin{aligned} E\chi_n = &2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\Phi}{2}(\eta-\lambda)+\frac{\pi}{2}\right)}\cos\left((n+\lambda+1)\frac{\Phi}{2}\right)\chi_{n+1} \\ &+2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\frac{\Phi}{2}(\eta-\lambda)+\frac{\pi}{2}\right)}\cos\left((n-\lambda-1)\frac{\Phi}{2}\right)\chi_{n-1} \end{aligned} \tag{8.3.25}$$

它是熟知的该模型的本征方程，新的内容是多出了指数因子，仅当 $\eta = 0$ 时才是半满带(mind-band)情况，这时严格说已不再是循环表示，因为 $[\eta]_q \neq 0$ 才能导致循环表示有意义的结果。

以下讨论 Landau 规范情况。由于 $T_{\pm x}$，$T_{\pm y}$ 作用空间可选为 $\{z^k\}$，故可选用表示

$$
\begin{aligned}
T_x z^k &= q^{2(k+\eta)} e^{ik_x} z^k \\
T_y z^k &= e^{-ik_y} z^{k-1}
\end{aligned}
\tag{8.3.26}
$$

易证

$$
T_y T_x z^k = q^{2(k+\eta)} e^{i(k_x - k_y)} z^{k-1}
$$

正是 $T_y T_x = q^2 T_x T_y$，$q = \exp\left(\frac{i}{2}\Phi\right)$。这个性质对多项式 $\varphi(z)$ 也成立：

$$
\begin{cases}
T_x \varphi(z) = q^{2\eta} e^{ik_x} \varphi(q^2 z) \\
T_y \varphi(z) = e^{ik_y} z^{-1} \varphi(z)
\end{cases}
\tag{8.3.27}
$$

本征方程为：

$$
E\varphi(z) = e^{2\eta} e^{ik_x} \varphi(q^2 z) + q^{-2\eta} e^{-ik_x} \varphi(q^{-2} z) + (z^{-1} e^{ik_y} + z e^{-ik_y}) \varphi(z)
$$

令 $z = q^{2n}$，$\tilde{\varphi}(z) = \tilde{\varphi}(q^{2n}) = \tilde{\chi}_n$，当 $\eta = 0$ 则推出

$$
E \tilde{\chi}_n = (e^{ik_x} \tilde{\chi}_{n+1} + e^{-ik_x} \tilde{\chi}_{n-1}) + 2\cos(n\Phi + k_y) \tilde{\chi}_n
\tag{8.3.28}
$$

即文献[2]的结果。利用循环表示，可以很容易地讨论各种规范，例如变更的 Landau 规范、手征规范等等。它们可以通过将海森伯-外尔关系的各种实现，并作用在 Fock 态上，满足循环表示的各种要求，从而得到相应的本征方程，这些结果都在 $\eta = 0$ 时与文献[2]结果相符[17]。利用循环表示还可以考虑更复杂的模型，例如：

$$
H_A = t_x(T_x + T_{-x}) + t_y(T_y + T_{-y}) + t_u(T_x T_y + T_{-y} T_{-x})
\tag{8.3.29}
$$

在 Landau 规范下

$$\begin{cases} T_x\varphi(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x}\varphi(q^2z) \\ T_y\varphi(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_y}z^{-1}\varphi(z) \\ T_xT_y\varphi(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_x+k_y)}z^{-1}\varphi(q^2z) \\ T_{-y}T_{-x}\varphi(z) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_x+k_y)}z\varphi(q^{-2}z) \end{cases} \tag{8.3.30}$$

它们与(8.3.20)式类型的实现是一致的。取 $z = q^{2n}$, $\varphi(z) = \widetilde{\psi}_n$，则得到

$$\begin{aligned} E\,\widetilde{\psi}_n = {} & \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_x}(t_x + t_u\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_y-n\Phi)})\,\widetilde{\psi}_{n+1} \\ & + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_x}(t_x + t_u\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_y-n\Phi)})\,\widetilde{\psi}_{n-1} \\ & + 2t_y\cos(k_y + n\Phi)\,\widetilde{\psi}_n \end{aligned} \tag{8.3.31}$$

这是新的结果。从以上讨论可以看到，有了(8.3.30)式类型的循环表示的 Fock 态具体实现，使得这类模型本征值的建立相当系统而且大大简化。由于海森伯-外尔关系本身当 $q^P = 1$ 时的良好特性，循环表示的引入不是把问题复杂化了，而是把问题大大简化了。尤其是当哈密顿量可以用量子代数的生成元表示出来的时候，可以使用它的表示论对模型进行详细的讨论，并给出实际物理行为。Hofstadler 模型讨论过多年，但它与量子代数的联系却是新颖的事，并可给出定量的预言[18]。

§8.4 整数量子霍尔效应中任意弱(杂质)势问题

在著名的 von Klitzing，Dorda 与 Pepper 的实验中，强磁场中出现了二维自由电子气的霍尔电导量子化，这是熟知的事实。由紧束缚近似，在理论上对这个现象已有许多探讨。由于 Landau 能级存在简并，在强磁场和周期势 $u(x, y)$ 作用下，Landau 能级形成的能带被分裂为若干子带，但只要费米能级落在能隙(gap)中，那

么由于这些子带仍各自贡献整数霍尔电导,但有正有负,总的仍保持实验中霍尔电导量子化的结果[17],典型的理论参见 TKNN[18]。但是在 TKNN 理论中,其作用势形式被选为余弦形式。迄今为止,当$u(x, y)$取为任意势时并没有合适的处理办法。需要指出,用量子代数循环表示是解决这个问题的好途径,目前尚无法用别的办法替代。

讨论这个问题的基本思路是,哈密顿量取为:

$$H = H_0 + V(\boldsymbol{r})$$

其中所有矢量均指二维矢量,而

$$H_0 = \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 = \frac{1}{2m}(\boldsymbol{\pi})^2 \tag{8.4.1}$$

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} = B\boldsymbol{e}_z \quad (B = \text{常数})$$

由于 H 与磁平移算符对易,而 $V(\boldsymbol{r})$可以用磁平移算符展开,但磁平移算符可以与$U_q(SL(2))$的生成元相联系,所以在弱势时,该展开式的前阶项可以用 $U_q(SL(2))$的生成元线性表示。为了保证这种展开的良好近似,取 $V(\boldsymbol{r}) = V(r)$ 为高斯衰减形式(与随机形式相近)。于是,最后求解本征值问题化为 § 8.3 所讨论的 Hofstadter 模型问题,进而用 Bethe-Ansatz 方法求解。

磁平移算符定义为

$$t(\boldsymbol{a}) = \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\boldsymbol{\pi}\cdot\boldsymbol{a}\right) \tag{8.4.2}$$

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{p} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A} + \frac{e}{c}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\pi} + \frac{e}{c}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{B} \tag{8.4.3}$$

即有

$$t(\boldsymbol{a})t(\boldsymbol{b}) = \exp\left(-\mathrm{i}\left(\frac{eB}{\hbar c}\right)|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\right)t(\boldsymbol{b})t(\boldsymbol{a})$$

$$= \exp\left(-\mathrm{i}\frac{e}{\hbar c}\Phi\right)t(\boldsymbol{b})t(\boldsymbol{a})$$

其中Φ为磁通量。由于 Landau 能级存在单位面积态密度为$N_S/A = (2\pi a_0^2)^{-1}$，$a_0 = \hbar c/eB$为磁长度。现在考虑周期性边界条件，设为$L_1L_2 = L^2(L_1 = L_2)$即方形，则有$N_S = L^2/2\pi a_0^2$，此时应有

$$t(L_i)|\psi\rangle = |\psi\rangle \ (i = 1,\ 2)$$

这时$a_i = L_i/N_S(i = 1,\ 2)$，于是有

$$T_{\pm x} = t(\pm L_1/N_s),\ T_{\pm y} = t(\pm L_2/N_s) \tag{8.4.4}$$

$$T_xT_y = qT_yT_x,\ q = \exp\left(\frac{\mathrm{i}\pi}{N_s}\right) \tag{8.4.5}$$

与以前方法相同，可将量子代数的生成元写为

$$\begin{cases} \hat{J}^+ = -\dfrac{\mathrm{i}}{w}(T_{-x} + T_{-y}) \\ \hat{J}^- = \dfrac{\mathrm{i}}{w}(T_x + T_y) \\ \hat{K}^2 = qT_{-y}T_x, \quad \hat{K}^{-2} = q^{-1}T_{-x}T_y,\ \hat{K} = q^{\hat{J}_3} \end{cases} \tag{8.4.6}$$

易证它们满足

$$[\hat{J}_+,\ \hat{J}_-] = \frac{\hat{K}^2 - \hat{K}^{-2}}{q - q^{-1}},\ \hat{K}^+\ \hat{J}_\pm\ \hat{K}^{-1} = q^{\pm 1}\ \hat{J}_\pm \tag{8.4.7}$$

即$U_q(SL(2))$的对易关系。

如前所述，$H_0 = \dfrac{1}{2m}\boldsymbol{\pi}^2$，因为

$$[\boldsymbol{\pi}^2,\ \pi_1] = 2\mathrm{i}eB\pi_2,\ [\boldsymbol{\pi},\ \pi_2] = -2\mathrm{i}eB\pi_1$$

故有

$$[H_0,\ T_x] = [H_0,\ T_y] = 0 \tag{8.4.8}$$

一般势函数 $V(\boldsymbol{r})$ 可以作傅里叶分解：

$$V(\boldsymbol{r}) = \sum_{\boldsymbol{k}} \widetilde{V}(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{8.4.9}$$

其中

$$\boldsymbol{k} = \left(\frac{2\pi}{L_1}n_1, \frac{2\pi}{L}n_2\right) \quad (n_1, n_2: \text{整数}) \tag{8.4.10}$$

现在将 $\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$ 用磁平移算符展开[19]：

$$\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}k^2a_0^2}\mathrm{e}^{k_-\pi_+/2eB}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_y\pi_x-k_x\pi_y)}\mathrm{e}^{-k_+\pi_-/2eB} \tag{8.4.11}$$

$$\boldsymbol{k} = (k_x, k_y), \; k_\pm = k_x \pm \mathrm{i}k_y, \; \pi_\pm = \pi_1 \pm \mathrm{i}\pi_2$$

如果磁场很强，因此不同的 Landau 能级互不交叉，同时高激发态可以忽略时，引入 $\nu = 1/N_s$，且注意到(8.4.11)式，可近似有[19]

$$\begin{aligned} V(\boldsymbol{r}) &\approx V_0(\boldsymbol{r}) \\ &= \sum_{\boldsymbol{k}} \widetilde{V}(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-k^2a_0^2/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_y\pi_x-k_x\pi_y)/eB} \\ &= \sum_{n_1,n_2} \widetilde{V}(n_1, n_2)\mathrm{e}^{-\nu\pi(n_1^2+n_2^2)}q^{-n_1n_2}T_x^{n_2}T_y^{-n_1} \end{aligned} \tag{8.4.12}$$

当势比较平缓时，由于有高斯因子，可保证收敛较快，这时可保留低级项：

$$\begin{aligned} V_0 \approx\; & u_0 + u_1T_x + u_2T_y + u_1^*T_{-x} + u_2^*T_{-y} \\ & + u_3T_{-x}T_y + u_3^*T_xT_{-y} + u_4T_xT_y + u_4^*T_{-x}T_{-y} \end{aligned} \tag{8.4.13}$$

其中 u_i 为常数($i=0, 1, 2, 3, 4$)。这样，便将势函数用磁平移算符近似表示出来。注意 T_x 和 T_y 与 H_0 是对易的，如果只考虑(8.4.13)式中的常数与 $T_{\pm x}$, $T_{\pm y}$ 的线性部分，那么 $H = H_0 +$

$V(\boldsymbol{r})$ 便近似分成了两个互相对易的部分。为了简单，考虑最简单的高斯形式的势：

$$V(r) = v_0 \mathrm{e}^{-r^2/2\sigma^2} \tag{8.4.14}$$

v_0 为其强度，设 $v_0 \ll \hbar\,\omega_c = \hbar\, eB/mc$，$m$ 为电子质量，亦即不考虑 Landau 能级的混合并忽略高激发态，在这样强场弱势情况，有

$$\widetilde{V}\,(n_1,\ n_2) = 2\pi v_0 \sigma^2 \mathrm{e}^{-(\sigma\pi\sqrt{2}/L)^2(n_1^2+n_2^2)} \tag{8.4.15}$$

于是相应有

$$u_0 = 2\pi v_0 \sigma^2$$

$$u_1 = u_2 = u_1^* = u_2^* = u = 2\pi v_0 \sigma^2 \mathrm{e}^{-[-\nu\pi+(\sigma\pi\sqrt{2}/L)^2]}$$

这时(8.4.13)式中 $T_{\pm x}$ 与 $T_{\pm y}$ 相乘项可忽略，于是得：

$$\begin{aligned} V_0 &= u_0 + u(T_x + T_y + T_{-x} + T_{-y}) \\ &= u_0 + \mathrm{i}u(q - q^{-1})(\hat{J}_- + \hat{J}_-) \end{aligned} \tag{8.4.16}$$

这时弱势的行为与 § 8.3 中讨论的 Hofstadter 问题一样，对能量作 u_0 平移，整个哈密顿量可表为：

$$H_{\mathrm{eff}} = H_0 + \mathrm{i}u(q - q^{-1})(\hat{J}_+ + \hat{J}_-) \tag{8.4.17}$$

其中 H_0 由(8.4.1)式给定。由于 $[\hat{J}_\pm,\ H_0] = 0$，所以两部分可同时对角化。显然，由于与(8.3.17)式比较，$B = \hat{J}_+$，$C = \hat{J}_-$，注意到现在 $1 \leqslant K \leqslant 2N_s - 1\ (q^{2N_s} = 1)$，且 $K = A$，$K^{-1} = D$，于是重复(8.3.20)式的运算，得到

$$\mathrm{i}u(q - q^{-1})(\hat{J}_+ + \hat{J}_-)\psi(z) = \varepsilon\psi(z) \tag{8.4.18}$$

$$\begin{aligned} -\mathrm{i}\,\frac{\varepsilon}{u}\psi(z) &= (zq^{1+\eta} + z^{-1}q^{-2\lambda+\eta-1})\psi(qz) \\ &\quad + (zq^{-1-\eta} + z^{-1}q^{2\lambda-\eta+1})\psi(q^{-1}z) \end{aligned} \tag{8.4.19}$$

由于如(8.3.19)式所指出,$\phi(z)$为 z 的多项式,即有

$$\psi(z) = \prod_{m=1}^{N_s-1}(z - z_m) \tag{8.4.20}$$

将(8.4.20)式代入(8.4.19)式中,遂得到:

$$\varepsilon = \mathrm{i}u(q - q^{-1})\prod_{m=1}^{N_s-1} z_m \tag{8.4.21}$$

其中 z_m 由下面的 Bethe-Ansatz 假设决定:[20]

$$\frac{z_m^2 + q}{qz_m^2 + 1} = -\prod_{m=1,\ m\neq n}^{N_s-1}\frac{qz_m - z_n}{z_m - qz_n} \tag{8.4.22}$$

其中 $m = 1, 2, \cdots, N_s - 1$; $\eta = 0$, $\lambda = -\frac{1}{2}$,它表示带中央情况。用 Bethe-Ansatz 假设解(8.4.21)式类型(或更复杂一些的形式)方程本征值问题,首先由 Faddeev-Kashaev 提出的[20]。本节详细计算见文献[21]。

至于在(8.4.13)式中 $T_{\pm x}$, $T_{\pm y}$的非线性项,$T_{-x}T_y$ 等部分已越出现在讨论的范围。但由于 $T_{-x}T_y$, $T_{-y}T_x$ 可表示为 K^2 算符,所以容易处理,但 T_xT_y 等部分便已越出了 $U_q(SL(2))$的范畴了。以后将会看到,哈密顿量包含 K 算符(或它的高阶项)是 q 变形陀螺的特点。最后要指出的是,由于循环表示具有有限维表示,在今后会有更大的用途。

§8.5　q 变形 G-C 陀螺的粗粒描述与 Hubbard 模型

从(5.6.12)式出发$\left(去掉无关的公共因子\left(\frac{-\mathrm{i}\lambda_3}{2}\right)\right)$并引入 $q' = q^{1/2}$,则

$$\hat{J}_{\pm}=\left(\frac{g}{q^{1/2}+q^{-1/2}}\right)^{\frac{1}{2}}X_{\pm},\ J_3=X_3 \tag{8.5.1}$$

则有

$$\begin{aligned}&[X_3,\ X_{\pm}]=\pm X_{\pm}\\&[X_+,\ X_-]=[2X_3]_{q'}\end{aligned} \tag{8.5.2}$$

由于q'是以后q变形参数，所以在以后讨论中仍将q'记为q，这样哈密顿量(5.6.26)式可写为：

$$\begin{aligned}H_{\text{top}}=&(q^{2X_3}+q^{-2X_3})\left\{\frac{g(q-q^{-1})^2}{q+q^{-1}}(X_+X_-+X_-X_+)\right.\\&\left.+(q^{1/2}+q^{-1/2})^2(q^{2X_3}+q^{-2X_3})\right\}\end{aligned} \tag{8.5.3}$$

为满足(8.5.2)式，引入费米子算符表示，它实质上是文献[22]方法的推广：

$$\begin{cases}X_{\pm}=\sum\limits_{j=1}^{N}\left(\prod\limits_{k=1}^{j-1}q^{(n_k-1)}T_{j\pm}\prod\limits_{k=j+1}^{N}q^{-(n_k-1)}\right)\\X_3=\sum\limits_{j=1}^{N}(n_j-1)=\sum\limits_{j=1}^{N}T_{j3}\end{cases} \tag{8.5.4}$$

其中

$$\begin{cases}n_j=\sum\limits_{\sigma}n_{j\sigma}=n_{j\uparrow}+n_{j\downarrow}\\T_{j+}=\sqrt{\dfrac{q+q^{-1}}{2}}\left(e^{i\frac{\pi}{2}n_{j\downarrow}}\hat{C}_{j\uparrow}^{+}+e^{-i\frac{\pi}{2}n_{j\uparrow}}\hat{C}_{j\downarrow}^{+}\right)\\T_{j-}=\sqrt{\dfrac{q+q^{-1}}{2}}\left(e^{-i\frac{\pi}{2}n_{j\downarrow}}\hat{C}_{j\uparrow}+e^{i\frac{\pi}{2}n_{j\uparrow}}\hat{C}_{j\downarrow}\right)\\\hat{C}_{j\uparrow}^{+}=e^{i\pi\sum\limits_{k=1}^{j-1}n_k}C_{j\uparrow}^{+},\ \hat{C}_{j\uparrow}=e^{-i\pi\sum\limits_{k=1}^{j-1}n_k}C_{j\uparrow}\\\hat{C}_{j\downarrow}^{+}=e^{-i\pi\sum\limits_{k=1}^{j-1}n_k}C_{j\downarrow}^{+},\ \hat{C}_{j\downarrow}=e^{i\pi\sum\limits_{k=1}^{j-1}n_k}C_{j\downarrow}\end{cases} \tag{8.5.5}$$

$C_{j\sigma}^{+}$与 $C_{j\sigma}$满足通常费米子的对易关系，而$\hat{C}_{j\sigma}^{+}$与$\hat{C}_{j\sigma}$则满足：

$$\{\hat{C}_{j\uparrow}^{+},\ \hat{C}_{j\uparrow}\}=1,\ [\hat{C}_{i\sigma}^{+},\ \hat{C}_{j\sigma'}^{+}]=\{\hat{C}_{i\sigma},\ \hat{C}_{j\sigma'}\}=0\ (i\neq j) \tag{8.5.6}$$

即相同格点处$\hat{C}_{j\sigma}$满足费米反对易关系，而不同格点处则满足对易关系，这种代换是为了以后方便。注意 $C_{i\sigma}$满足

$$\{C_{j\sigma}^{+},\ C_{j'\sigma'}\}=\delta_{jj'}\delta_{\sigma\sigma'}\quad(\sigma=\uparrow,\ \downarrow) \tag{8.5.7}$$

不难证明对任意格点 j 与 k，有

$$\begin{cases}[T_j^3,\ T_k^{\pm}]=\pm\,\delta_{jk}T_j^{\pm},\quad [T_j^{+},\ T_k^{-}]=\delta_{jk}[2T_j^3]_q\\ q^{T_j^3}T_j^{\pm}q^{-T_j^3}=q^{\pm1}T_j^{\pm}\end{cases} \tag{8.5.8}$$

这可以用数学归纳法予以证明。当 $N=1$，由费米子粒子数 $[n_\sigma,\ C_{\sigma'}^{+}]=\delta_{\sigma\sigma'}C_\sigma^{+}$，$n_\sigma C_\sigma^{+}=C_\sigma^{+}$，$C_\sigma n_\sigma=C_\sigma$ 等可知，(8.5.4)式仅是对通常 $SU(2)$代数作重新标度：$[X_+,\ X_-]=2\left(\dfrac{q+q^{-1}}{2}\right)(n-1)=[2X_3]_q$ 等。这个结果是显然的，因为单个费米子情况作 q 变形与不变形没有什么差别。

当 $N=2$ 时，有 $[X_3,\ X_\pm]=\pm X_\pm$，而 $[X_+,\ X_-]=[2T_1^3]_q q^{-2T_2^3}+q^{2T_1^3}[2T_2^3]_q=[2X_3]_q$

设 $N=m$ 时，若(8.5.4)式成立，则当 $N=m+1$ 时有

$$x_\pm(m+1)=x_\pm(m)q^{-T_{m+1}^3}+q^{x_3(m)}T_{m+1}^{\pm}$$

$$x_3(m+1)=T_{m+1}^3+x_3(m)$$

其中 $x_\alpha(m)(\alpha=\pm,\ 3)$ 表示 $N=m$ 时的满足(8.5.2)式的算符。利用(8.5.5)式易证 $x_\alpha(m+1)$ 满足(8.5.2)式。为了方便，将(8.5.5)式写为更对称形式：

$$
\begin{cases}
T_j^+ = -\mathrm{i}\sqrt{\dfrac{q+q^{-1}}{2}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}n}\hat{C}_{j\uparrow}^+ - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}n}\hat{C}_{j\downarrow}^+\right) \\
T_j^- = \mathrm{i}\sqrt{\dfrac{q+q^{-1}}{2}}\left(\hat{C}_{j\uparrow}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}n} - \hat{C}_{j\downarrow}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}n}\right)
\end{cases}
\tag{8.5.9}
$$

直接计算可得：

$$
T_j^+T_j^- + T_j^-T_j^+ = (q+q^{-1})(C_{j\uparrow}^+C_{j\downarrow} + C_{j\downarrow}^+C_{j\uparrow} + 1)
\tag{8.5.10}
$$

以及

$$
\begin{aligned}
&T_j^+T_k^- + T_k^-T_j^+ + T_k^+T_j^- + T_j^-T_k^+ \\
&= 2(T_j^+T_k^- + T_k^+T_j^-) \\
&= \sum_{\sigma,\tau\in\{\uparrow,\downarrow\}} (t_{j\sigma k\tau}C_{j\sigma}^+C_{k\tau} + t_{k\tau j\sigma}C_{k\tau}^+C_{j\sigma})(j\neq k)
\end{aligned}
\tag{8.5.11}
$$

其中

$$
\begin{cases}
t_{j\sigma k\sigma} = t_{k\sigma j\sigma} = -\mathrm{i}(q+q^{-1})\cos\left(\pi\sum\limits_{m=j+1}^{k} n_m\right) \\
\qquad\qquad \cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{2}(n_j+n_k)\right) \\
t_{j\sigma k\tau} = t_{k\tau j\sigma}^* = -\mathrm{i}(q+q^{-1})\cos\left(\pi\sum\limits_{m=j+1}^{k} n_m\right) \\
\qquad\qquad \cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{2}(n_j-n_k)\right)\ (\text{不妨令 } j<k)
\end{cases}
\tag{8.5.12}
$$

利用(8.5.4)式与(8.5.10)式可得：

$$
\begin{aligned}
X_+X_- + X_-X_+ = &\sum_{j=1}^{N}(F_j)^2(q+q^{-1})(C_{j\uparrow}^+C_{j\downarrow} + C_{j\downarrow}^-C_{j\uparrow} + 1) \\
&+ \sum_{j\neq k}\sum_{\sigma,\tau} F_jF_k t_{j\sigma k\tau}C_{j\sigma}^+C_{k\tau}
\end{aligned}
\tag{8.5.13}
$$

其中

$$F_j = \prod_{k=1}^{j-1} q^{(n_k-1)} \prod_{k=j+1}^{N} q^{-(n_k-1)} \tag{8.5.14}$$

另一方面有

$$K + K^{-1} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \left\{ q^{2n_k} q^{-2N} \prod_{j \neq k}^{N} q^{2n_j} + q^{-2n_k} q^{2N} \prod_{j \neq k}^{N} q^{-2n_j} \right\} \tag{8.5.15}$$

注意到

$$q^{2n_k} = 1 + (q^2 - 1) n_k + (q^2 - 1)^2 n_{k\uparrow} n_{k\downarrow}$$

于是有

$$\begin{aligned} K + K^{-1} = & \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \Big[(q^2 - 1) q^{-2N} \prod_{j \neq k}^{N} q^{2n_j} \\ & + (q^{-2} - 1) q^{2N} \prod_{j \neq k}^{N} q^{-2n_j} \Big] (n_{k\uparrow} + n_{k\downarrow}) \\ & + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \Big[(q^2 - 1)^2 q^{-2N} \prod_{j \neq k}^{N} q^{2n_j} \\ & + (q^{-2} - 1)^2 q^{2N} \prod_{j \neq k}^{N} q^{-2n_j} \Big] n_{k\uparrow} n_{k\downarrow} \\ & + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \left(q^{-2N} \prod_{j \neq k}^{N} q^{2n_j} + q^{2N} \prod_{j \neq k}^{N} q^{-2n_j} \right) \end{aligned} \tag{8.5.16}$$

因而

$$\begin{aligned} (K + K^{-1})^2 &= q^{4x_3} + q^{-4x_3} + 2 \\ &= \sum_{j=1}^{N} [f_j (n_{j\uparrow} + n_{j\downarrow}) + g_j n_{j\uparrow} n_{j\downarrow} + h_j] \end{aligned} \tag{8.5.17}$$

其中

$$\begin{cases} f_j = \frac{1}{N}\Big[(q^4-1)q^{-4N}\prod_{k\neq j}^{N}q^{4n_k} + (q^{-4}-1)q^{4N}\prod_{k\neq j}^{N}q^{-4n_k}\Big] \\ g_j = \frac{1}{N}\Big[(q^4-1)^2q^{-4N}\prod_{k\neq j}^{N}q^{4n_k} + (q^{-4}-1)^2q^{4N}\prod_{k\neq j}^{N}q^{-4n_k}\Big] \\ h_j = \frac{1}{N}\Big(q^{-2N}\prod_{k\neq j}^{N}q^{2n_k} + q^{2N}\prod_{k\neq j}^{N}q^{-2n_k}\Big)^2 \end{cases} \tag{8.5.18}$$

另外经过计算得

$$\begin{aligned} &(K+K^{-1})(x_+x_- + x_-x_+) \\ &\quad = \sum_{j=1}^{N}\big[(K+K^{-1})(F_j)^2(q+q^{-1})(C_{j\uparrow}^{+}C_{j\downarrow} + C_{j\downarrow}^{+}C_{j\uparrow} + 1)\big] \\ &\qquad + \sum_{j\neq k}^{N}\sum_{\sigma,\tau}\big[(K+K^{-1})F_jF_kt_{j\sigma k\tau}C_{j\sigma}^{+}C_{k\tau}\big] \end{aligned} \tag{8.5.19}$$

将(8.5.19)式、(8.5.17)式代入(8.5.3)式注意 $K=q^{2x_3}$，则得到 H_{top}的费米子表示的表达式，其形式比较复杂。

为了约化上述 H_{top}，可仿照凝聚态理论中的处理方法，使用近似方案。作以下近似：

1）平均场近似。由上面结果可以看出，对某指定格点而言（将来对该格点再求和），许多项中的系数是由其他格点处的粒子数及 q 参数决定的。它们代表了整个链上各个格点对所考虑的格点的作用，对这些作用取平均，注意对粒子数 n_j 取平均值 $\langle n_j\rangle$ 后即不再依赖于格点位置 j。这种描述本质上是一种粗粒描述：本来这个系统包含了非常复杂的各种细微的相互作用，从粗粒角度去平均这些运动，从而给予一个等效势的描述。实际上，这样做的结果，将只会保留单粒子态 $n_{j\sigma}$与 $n_{j\uparrow}n_{j\downarrow}$类型的最低阶相互作用，并保证 $n_{j\sigma}$的费米粒子数特性。

2）假设在巡游(hopping)过程中只存在 $C_{i\sigma}^{+}C_{j\sigma}(i\neq j)$项，而

$C_{i\sigma}^{+}C_{j\tau}(\sigma \neq \tau,\ i \neq j)$ 的平均效应很小。由于改变自旋取向表示粒子在迁动过程中受到其他格点粒子在该点的磁场的作用，它比由电子云重叠引起的电场作用小得多，在平均场近似下，$C_{i\sigma}^{+}C_{j\sigma}$ 项为主。

在以上近似下(8.5.17)式中的 f_j，g_j 和 h_j 不包含在第 j 个格点处的费米子算符，因而可用平均场办法取平均，并不依赖于格点 j，即有

$$\langle f_j \rangle = f_1,\ \langle g_j \rangle = g_1,\ \langle h_j \rangle = h_1 \qquad (8.5.20)$$

于是有

$$(K + K^{-1})^2 = f_1 \sum_{j=1}^{N} n_j + g_1 \sum_{j=1}^{N} n_{j\uparrow} n_{j\downarrow} + N h_1 \qquad (8.5.21)$$

同时引入

$$\begin{cases} f_2 = \langle (K + K^{-1})(F_j)^2 (q + q^{-1}) \rangle \\ V_{j\sigma k\tau} = \langle (K + K^{-1}) F_j F_k t_{j\sigma k\tau} \rangle \end{cases} \qquad (8.5.22)$$

并引入

$$\begin{cases} V_{j\sigma k\sigma} = V_{jk} (= V_{kj}) \\ V_{j\sigma k\tau} = V_{k\tau j\sigma}^{*} (\sigma \neq \tau) \end{cases} \qquad (8.5.23)$$

则在平均场近似下得：

$$\begin{aligned} \overline{H}_{\mathrm{top}} = {} & f_2' \sum_{j=1}^{N} (C_{j\uparrow}^{+} C_{j\downarrow} + C_{j\downarrow}^{+} C_{j\uparrow} + 1) \\ & + \sum_{j\neq k}^{N} \sum_{\sigma} V_{jk}' C_{j\sigma}^{+} C_{k\sigma} + \sum_{j\neq k}^{N} \sum_{\sigma\neq\tau} V_{j\sigma k\tau}' C_{j\sigma}^{+} C_{k\tau} \\ & + U \sum_{j=1}^{N} n_{j\uparrow} n_{j\downarrow} + \mu \sum_{j=1}^{N} n_j + \text{常数} \end{aligned} \qquad (8.5.24)$$

其中：

$$
\begin{aligned}
f_2' &= \frac{g(q-q^{-1})^2}{q+q^{-1}} f_2 \\
V_{jk}' &= \frac{g(q-q^{-1})^2}{q+q^{-1}} V_{jk} \\
V_{j\sigma k\tau}' &= \frac{g(q-q^{-1})^2}{q+q^{-1}} V_{j\sigma k\tau} \\
U &= \left(q^{\frac{1}{2}}+q^{-\frac{1}{2}}\right)^2 g_1 \\
\mu &= \left(q^{\frac{1}{2}}+q^{-\frac{1}{2}}\right)^2 f_1
\end{aligned}
\tag{8.5.25}
$$

(8.5.24)式中右端第一项表示同一格点产生与湮没费米子的过程，系数 f_2' 中的 f_2 由(8.5.25)式决定，正比于$(F_j)^2$。而从(8.5.14)式可见 F_j 表示两个不同集合的乘集，但它们没有交集，也就是电子云密度没有重叠区，因而其平均值很小，故可近似为零。(8.5.24)式中右端第二项、第三项分别表示电子巡游时的贡献，它们由于 V_{jk}中格点 j 与 k 处电子云重叠引起，是要考虑的项。观察(8.5.12)式，当自旋不反转时，应对 $\sin\left(\frac{\pi}{2}(n_j+n_k)\right)$ 取平均 $\approx \sin(\pi\langle n\rangle)$，而当自旋发生反转时对应 $\sin\left(\frac{\pi}{2}(n_j-n_k)\right) \approx \sin\left(\frac{\pi}{2}(\langle n_j\rangle-\langle n_k\rangle)\right) \approx 0$。经过类似以上各项考虑，$\overline{H}_{\text{top}}$可以进一步近似为：

$$
\overline{H}_{\text{top}} \approx \sum_{j\neq k}^{N} \sum_{\sigma} V_{jk}' C_{j\sigma}^{+} C_{k\sigma} + U \sum_{j=1}^{N} n_{j\uparrow} n_{j\downarrow} + \mu \sum_{j=1}^{N} n_j \tag{8.5.26}
$$

一般说它包含了长程巡游行为，已知在以下情况下它是可解的：

a）近邻相互作用，且 $V_{j+1}' \approx t$（常数），即为一维 Hubbard 模型，它是可积的[24]，并且可以用 Bethe-Ansatz 假设方法求解[25]。

它具有 Yangian 对称性(见 § 4.4)。

b) 设 $V'_{jk} \approx \dfrac{1}{\sin^2\left[\dfrac{2\pi}{L}(j-k)\right]}$，在大 U 近似下可解，参见文献[26]，当然用 η 对办法也可讨论[27]。

c) 设 $V'_{jk} \approx \dfrac{1}{\sin\left[\dfrac{2\pi}{L}(j-k)\right]}$，此时可解，在 L 很大时，巡游能量正比于动量减去常数。这个模型具有 Yangian 对称性[28]。

因此，我们业已看到 q-G-C 陀螺在粗粒描述下与一些熟知的一维链模型有内在的联系。由此也可以理解满足 RTT 关系的 q 变形的结果内在地包含了许多物理内容，本节仔细推导见文献[23]。

如果将 q 变形的哈密顿量(8.5.3)式中的量子代数算符 $X_\pm$ 与 $K=q^{X_3}$ 用平移算符 $T_{\pm x}$，$T_{\pm y}$ 表示出来，由(8.3.15)式并注意到现在的 q 是量子代数意义下的 $q^{1/2}$(见(8.5.2)式)，则用

$$T_xT_y = qT_yT_x,\quad T_x^{-1} = T_{-x},\quad T_y^{-1} = T_{-y}$$

哈密顿量 H_{qtop} 可改写为：

$$\begin{aligned} H_{\text{qtop}} = {} & (q^{1/2} - q^{-1/2})^{-2} \\ & \times \{(q^{1/2}T_{-x}T_y + q^{-1/2}T_{-y}T_x) \\ & + \frac{g}{4}(g+1)(q^{1/2}T_{-x}T_y + q^{-1/2}T_{-y}T_x)^2\} \end{aligned} \tag{8.5.27}$$

其中

$$g = q^{1/2} + q^{-1/2}$$

我们看到，(8.5.27)式本质上是由 $T_{-x}T_y$ 及 $T_{-y}T_x = (T_{-x}T_y)^{-1}$ 的变形组合构成的，至多到它的二次项。其中(8.5.27)式右端第一项与(8.4.13)式中第六、七项类似，当 $u_3 = q$，$u_3^* = q^{-1}$ 即 q 为 $e^{i\alpha}$(α 为实数时)时两者相同。因此，H_{qtop} 在 q 变形表示

中是对角的，因为(8.5.27)式等于[29]：

$$H_{\text{qtop}}=\frac{1}{2}(q^{1/2}-q^{-1/2})^{-2}(K+K^{-1})\left\{2+\frac{1}{2}g(g+1)(K+K^{-1})\right\} \tag{8.5.28}$$

它比 Hofstadter 模型具有更复杂的结构。观察陀螺的 q 变形问题，必须小心处理，这当中的关键是，不能人为的去做 q 变形，那样做无异于某种无物理基础的形式扩展。正确的做法是从保证可积性的 RTT 关系出发，自然引出 q 变形的结论，然后深入了解它的物理实现与含义。这时 YB 系统的自洽性将会告诉我们许多物理。

在结束本节之前，需强调指出，有关 YBE、量子群(Yangian，量子代数)等的研究长久停留在数学物理范畴，以致使人误解它的物理真实价值。但随着数学物理自身研究的完善，使人们对数学物理自身的问题已有了深刻的理解(这是必不可少的阶段)。在此基础上，逐步与不同物理领域相结合，虽然仅仅是在开始阶段，但已表现出它的生命力。当然这种与实际物理结合的过程是个艰难的过程，本节只给出了一些不成熟的结果。相信以后会出现更好的工作，以便把 YB 系统这个处理非线性量子系统的宏大理论更有效地应用于有关物理学的各个领域。

§8.6 氢原子的 Yangian 对称性

在第四章介绍了 Yangian 的物理实现，包括它的量子力学实现，注意在有的具体实现中并不限于一维链，而是描述了三维空间的粒子行为。我们已熟知，氢原子是量子力学体系中最典型的可积系统，可以说，谐振子与氢原子是量子力学中最基本的两种可积系统。本节将指出，氢原子问题中就存在 Yangian 对称性，只不过以前太限于讨论李代数对称性而未发觉 Yangian 而已。

氢原子的哈密顿量为

$$H = \frac{1}{2}\boldsymbol{p}^2 - \frac{k}{r}, \ r = |\boldsymbol{r}| \tag{8.6.1}$$

其中 $k = ze$。它存在两个守恒矢量，一个是角动量，满足：

$$[L_\alpha, L_\beta] = \mathrm{i}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}L_\gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3) \tag{8.6.2}$$

另一个是 Pauli-Runge-Lenz 矢量

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}\times\boldsymbol{L}) + \frac{k}{r}\boldsymbol{r} \tag{8.6.3}$$

熟知

$$[H, A_\alpha] = [H, L_\alpha] = 0 \tag{8.6.4}$$

这些基本性质都可以在量子力学基本教程中找到，例如参阅文献[1]。为了方便，引入

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\boldsymbol{A} \tag{8.6.5}$$

则有

$$[B_\alpha, L_\beta] = \mathrm{i}\varepsilon_{\alpha\beta\sigma}B_\sigma, \quad [B_\alpha, B_\beta] = \mathrm{i}H\varepsilon_{\alpha\beta\sigma}L_\sigma \tag{8.6.6}$$

利用这些关系式，引入两个矢量，一个仍是角动量 $\boldsymbol{L}$，另一个叫做 $\boldsymbol{J}$：

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{L}, \quad \boldsymbol{J} = \boldsymbol{L}\times\boldsymbol{B} + F\boldsymbol{L} \tag{8.6.7}$$

其中

$$[F, \boldsymbol{L}] = [F, \boldsymbol{A}] = [F, H] = 0 \tag{8.6.8}$$

亦即 F 为 Casimir。经过计算可得：

$$[J_\alpha, J_\beta] = \mathrm{i}\varepsilon_{\alpha\beta\sigma}\left\{(2HL^2 + F^2 + \frac{1}{2}k^2)L_\sigma + 2FJ_\sigma\right\} \tag{8.6.9}$$

进一步可得：

$$
\begin{aligned}
&[J_{\pm}, [J_3, J_{\pm}]] = (-4H)I_{\pm}(I_3J_{\pm} - J_3I_{\pm}) \\
&[J_3, [J_+, J_-]] = (-4H)I_3(I_+J_- - J_+I_-)
\end{aligned}
\tag{8.6.10}
$$

显然，当取 $-4H=$ 常数时，$\boldsymbol{I}$ 与 $\boldsymbol{J}$ 组成 Yangian，记为 $Y(SL(2))$。因而，有(注意(8.6.8)式)

$$
[H, Y(SL(2))] = 0 \tag{8.6.11}
$$

在通常量子力学教程中，总是把 $\boldsymbol{L}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 线性组合起来形成两组互相对易的 $SU(2)$，于是氢原子具有 $SU(2)\otimes SU(2)\sim SO(4)$ 对称性。现在这个例子告诉我们，如果取两者的矢量积，那么遇到了无穷维代数。由于满足 Yangian 的 $\boldsymbol{J}$ 矢量加上任意倍数的 $\boldsymbol{I}$ 矢量仍满足 Yangian 关系，因此，(8.6.7)式中的关键部分是 $\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{B}$。由于 $SO(4)$ 对称性，氢原子有有限的守恒量：H，L^2 与 L_3。因此，可以预料氢原子具有 Yangian 对称性，然而从 RTT 关系必须得出有限个守恒量才能与通常量子力学符合。

由以前介绍，知道转移矩阵可以用谱参数 u 展开，引用记号：

$$
T(u) = I + \sum_{n=1}^{\infty} u^{-n}T^{(n)}, \quad T^{(n)} = \| T_{ab}^{(n)} \|
$$

$(a, b=1, 2$，因为现在只讨论 2×2 矩阵)以及

$$
T_0^{(n)} = T_{11}^{(n)} + T_{22}^{(n)},\ T_3^{(n)} = T_{22}^{(n)} - T_{11}^{(n)},\ T_+^{(n)} = T_{12}^{(n)},\ T_-^{(n)} = T_{21}^{(n)}
$$

则

$$
T_{(u)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{n=1}^{\infty} u^{-n} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}T_0^{(n)} - \frac{1}{2}T_3^{(n)} & T_+^{(n)} \\ T_-^{(n)} & \frac{1}{2}T_0^{(n)} + \frac{1}{2}T_3^{(n)} \end{pmatrix}
\tag{8.6.12}
$$

当取 $R(u)=u+P$ 时，将(8.6.12)式代入 RTT 关系后，得(参阅 §4.1)：

$$[I_\alpha, I_\beta] = \mathrm{i}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}I_\gamma \tag{8.6.13}$$

$$[I_\alpha, J_\beta] = \mathrm{i}\epsilon_{\alpha\beta\gamma}J_\gamma \tag{8.6.14}$$

$$[J_\pm, [J_3, J_\pm]] = \lambda^{-2}I_\pm(J_\pm I_3 - I_\pm J_3) \tag{8.6.15}$$

$$[J_3, [J_+, J_-]] = \lambda^{-2}I_3(I_+ J_- - J_+ I_-) \tag{8.6.16}$$

其中

$$T_3^{(1)} = 2I_3,\ T_\pm^{(1)} = I_\pm \tag{8.6.17}$$

$$T_3^{(2)} = 2\lambda J_3,\ T_\pm^{(2)} = \lambda J_\pm \tag{8.6.18}$$

λ 为任意常数，又有

$$[T_0^{(2)}, T_\pm^{(2)}] = \pm(T_3^{(1)}T_\pm^{(2)} - T_3^{(2)}T_\pm^{(1)}) \tag{8.6.19}$$

$$[T_0^{(2)}, T_3^{(2)}] = 2(T_+^{(1)}T_-^{(2)} - T_+^{(2)}T_-^{(1)}) \tag{8.6.20}$$

$$T_\pm^{(3)} = \frac{1}{2}\{\pm[T_3^{(2)}, T_\pm^{(2)}] + T_0^{(2)}T_\pm^{(1)} - T_0^{(1)}T_\pm^{(2)}\} \tag{8.6.21}$$

$$T_3^{(3)} = [T_+^{(2)}, T_-^{(2)}] + \frac{1}{2}(T_0^{(2)}T_3^{(1)} - T_0^{(1)}T_3^{(2)}) \tag{8.6.22}$$

以及 $n > 3$ 的更高阶关系式，(8.6.13)～(8.6.16)式决定了 Yangian。与(8.6.10)式相比，$\lambda^{-2} = -4H$。也就是说，对每个能量本征值$\sim\frac{1}{n^2}$，均有 Yangian 对称性，即每个能级上有 Yangian 对称性，对应着角动量态的简并。由 Yangian 算符组成的角动量移动算符，将第 n 个能级的角动量 $l\to l+1$。与三维谐振子不同的是，三维谐振子的哈密顿量与角动量移动算符不对易，因此在移动 l 的同时也移动了主量子数。现在氢原子的哈密顿量与角动量移动算符对易，因而只移 l 而不改变 n。

现在回到(8.6.21)式，为了强调 Casmir 的性质，将 λ 写为 G，它同哈密顿量、角动量以及 Pauli-Runge-Lenz 向量均对易。经过

计算可得

$$T_{\pm}^{(3)} = \pm \{(2G^2\rho + T_0^{(2)})I_{\pm} + \beta J_{\pm}\} \tag{8.6.23}$$

$$T_3^{(3)} = (2G^2\rho + T_0^{(2)})I_3 + \beta J_3 \tag{8.6.24}$$

其中

$$\rho = 2HL^2 + F^2 + \frac{1}{2}k^2,\ \beta = 4G^2F - T_0^{(1)}G \tag{8.6.25}$$

由于 $C_1 = T_0^{(1)}$ (C_1 为量子行列式对 u^{-1} 展开的系数)，它与 $\boldsymbol{L}$、$\boldsymbol{A}$ 均对易，而 $T_0^{(2)}$ 遵从(8.6.19)式与(8.6.20)式，将(8.6.17)式、(8.6.18)式代入后得

$$\begin{cases}[T_0^{(2)},\ J_{\pm}] = \pm 2(I_3J_{\pm} - J_3I_{\pm}) \\ [T_0^{(2)},\ J_3] = I_+ J_- - J_+ I_-\end{cases} \tag{8.6.26}$$

现在选取满足(8.6.19)～(8.6.22)式并使 $T_\alpha^{(3)} = 0(\alpha = \pm,\ 3)$ 的 $T_0^{(2)}$ 的解，这样便使(8.6.12)式具有有限项的展开式，从而得到有限的守恒量。易知选择：

$$T_0^{(1)} = 4GF \tag{8.6.27}$$

及

$$T_0^{(2)} = -2G^2(2HL^2 + F^2 + \frac{1}{2}k^2) \tag{8.6.28}$$

可发现，$T_0^{(1)}$ 及 $T_0^{(2)}$ 即满足所有上述要求。与 Yangian 的归一化相应，选取 $G = (-2H)^{1/2}$，则得到

$$\begin{cases}T_{\pm}^{(1)} = L_{\pm},\ T_3^{(1)} = 2L_3,\ T_0^{(1)} = H \\ T_{\pm}^{(2)} = \mathrm{i}\varepsilon(2H)^{-1/2}J_{\pm},\ T_3^{(2)} = 2\mathrm{i}\varepsilon(2H)^{-1/2}J_3 \\ T_0^{(2)} = 2L^2 + H^{-1}\left(F^2 + \frac{1}{2}k^2\right) \quad (\varepsilon = \pm 1)\end{cases} \tag{8.6.29}$$

这里已经按惯例选择了 $T_0^{(1)} = C_1 = H$。由上式，可用标准公式计

算出($C_1 = H$)：

$$C_2 = \frac{1}{2}k^2H^{-1} - \frac{1}{2}H - \frac{1}{8}H^2 \tag{8.6.30}$$

$$C_m = C_m(H) \quad (m > 2)$$

即所有量子行列式的展开式皆为氢原子哈密顿量的函数。由于 Yangian 的特性(8.6.7)式，使得存在特别的 $T_0^{(2)}$ 的解。它保证 $T_a^{(3)} = 0$，即 $T(u)$只有展开式的有限项，它对应有限守恒量为 H，L^2 与 L_3。这样就证明了氢原子属于 RTT，即 YB 系统，并且这时转移矩阵 $T(u)$只展开到 u^{-2}：

$$T(u) = I + u^{-1}T^{(1)} + u^{-2}T^{(2)} \tag{8.6.31}$$

也就是说完全由 $\boldsymbol{I}$ 与 $\boldsymbol{J}$(即 Yangian)直接表示出来，无需再用迭代去得到 $T^{(3)}$以及更高阶项。显然 $T_0^{(2)}$ 在这里起了关键的作用，否则 $T^{(3)}$不可能为零。注意 $T_0^{(2)}$ 是角动量平方即 $I^2(= \boldsymbol{L}^2)$ 算符加上 Casimir 项，它与§4.1 中的(4.1.27)式相像。

这种从 RTT 关系导致与氢原子一致的结果是容易想象的：氢原子是最简单的可积模型之一，而 RTT 关系描述相当广的一大类量子可积系统，如果不能包含氢原子，那是难以想象的。从这个讨论也可以对 RTT 关系有更具体的了解：在通常量子力学中，其实早就存在 Yangian，只不过我们局限于讨论李代数结构而未去深究。但在 Drinfeld 已建立了严格的数学理论之后，进一步考虑量子张量空间是很自然的事。本节讨论的细节见文献[30]。

§ 8.7　YBE 与非微扰 QCD 模型

熟知描述电子-核子高能碰撞有自由部分子模型，即核子由若干个自由部分子(parton)组成。粗略而言，每个部分子的四维动量 $p_i = x_iP$ $(i = 1, 2, \cdots, N)$，P 为核子的四维动量 $P^2 = M^2c^2$，M

为核子静止质量，而 x 则为部分子所占核子动量之份额。设 q 为电子散射前后四维动量之差，ν 为实验室系中碰撞前后部分子能量之差，则布约肯变量为

$$x = q^2/2M\nu \quad (0 < x \leqslant 1)$$

当 x 不太小时表明核子包含的部分子数目不大(该数目$\sim x^{-1}$)，它们之间联系不紧密，每个部分子基本是自由的，这时自由部分子模型对标度律实验给予很好的描述，这早已是熟知的事情。

但当 $x \approx 10^{-5}$，即约包含 10^5 个部分子时，如此之密集使得色动力学(QCD)作用相当强烈。这时与自由模型不同(自由部分子描述当电子与一个部分子碰撞时，其他部分子并不受影响)现在由于 QCD 的强烈作用，当电子与某个部分子碰撞时，其能量、动量会通过这种相互作用迅速向其他(至少向相邻的部分子)分摊。这是另一个极端的模型：这些部分子耦合得如此之紧，整个部分子集合像一个强耦合的磁链，这个链的能级就是高能电子与之作用所表现出的允许能级，这个模型最早是由 L. Lipatov 首先提出的[31]。他把包含 QCD 相互作用的领头项加起来(例如把一些费曼图加起来)，保证了幺正性，得到 n 个胶子的哈密顿量为

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} H_{k,k+1},\ \overline{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \overline{H}_{k,k+1} \tag{8.7.1}$$

而两个粒子的哈密顿量为

$$\begin{aligned} H_{j,k} = & -2\log(z_j - z_k) - (z_j - z_k)\log(p_j p_k)(z_j - z_k)^{-1} \\ & -2\gamma_E \end{aligned} \tag{8.7.2}$$

其中 $z_i = x_i + \mathrm{i}y_i$，另有 $\overline{z_i} = x_i - \mathrm{i}y_i$，则碰撞参数为 $(z_i, \overline{z_i})$，而 $p_j = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial z_j}$。上面像共形场论一样，$H_n$ 与 $\overline{H}_n$ 描述互相独立的相互作用。能量本征值在大 N 极限下为：

$$\omega = \frac{\alpha_s}{4\pi} N(\varepsilon_n + \bar{\varepsilon}_n) \tag{8.7.3}$$

其中 ε_n 与 $\bar{\varepsilon}_n$ 分别为 H_n 与 $\overline{H}_n$ 的本征值，α_s 为耦合常数。欧拉常数 $\gamma_E = -\psi(1)$，其中 $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$，而 $\Gamma(z)$ 为 Γ 函数。

为了将(8.7.2)式化简，L. Lipatov 证明(8.7.2)式可以表为下面形式：

$$H_{ik} = -\psi(-J_{ik}) - \psi(J_{ik}+1) + 2\psi(1) \tag{8.7.4}$$

其中 $$J_{ik}(J_{ik}+1) = 2\boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{S}_k = -(z_i - z_k)^2 \partial_i \partial_k \tag{8.7.5}$$

也即算符 J_{ik} 平方的本征值是第 i 个格点与第 k 个格点处自旋的点积。要强调，这里形式上可写为：

$$\boldsymbol{J}_{ik} = \boldsymbol{S}_i + \boldsymbol{S}_k \tag{8.7.6}$$

故有

$$\boldsymbol{J}_{ik}^2 = J_{ik}(J_{ik}+1) = 2s(s+1) + 2\boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{S}_k \tag{8.7.7}$$

其中 $s(s+1)$ 为 $\boldsymbol{S}_i^2$ 或 $\boldsymbol{S}_k^2$ 平方的本征值，(8.7.5) 式相当于 $s=0$，也就是说"自旋"为 0(或-1)，这是完全不同于以前自旋 1/2 或 1 的理论。

由(8.7.2)式到(8.7.4)式是非常复杂的，尤其用到了一个恒等式，它难以从通常表册中查到，在这里作一个简单的介绍。这个恒等式* 是

$$\ln\partial + \ln x = \psi(x\partial + 1) \tag{8.7.8}$$

其中 $\partial \equiv \dfrac{\partial}{\partial x}$，$x$ 为任意复变量。上式的证明如下：

利用恒等式

$$\Gamma(x\partial+1)\partial[\Gamma(x\partial+1)]^{-1} = \Gamma(x\partial+1)x^{-1}x\partial[\Gamma(x\partial+1)]^{-1}$$

---

* 感谢 L. Lipatov 告知这一未曾公布的结果。

令 $x=\mathrm{e}^{y}$，则有 $x\dfrac{\partial}{\partial x}=x\partial=\dfrac{\partial}{\partial y}$，$y=\ln x$ 得：

$$
\begin{aligned}
\Gamma(x\partial+1)\partial[\Gamma(x\partial+1)]^{-1} &= \Gamma\left(\frac{\partial}{\partial y}+1\right)\mathrm{e}^{-y}x\partial[\Gamma(x\partial+1)]^{-1} \\
&= \mathrm{e}^{-y}\Gamma\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)x\partial[\Gamma(x\partial+1)]^{-1} \\
&= x^{-1}\Gamma(x\partial)(x\partial)[\Gamma(x\partial+1)]^{-1} \\
&= x^{-1}\Gamma(x\partial+1)[\Gamma(x\partial+1)]^{-1} \\
&= x^{-1}
\end{aligned}
$$

上式用到了 $\Gamma(z)z=\Gamma(z+1)$ 向算符的推广。上式变为

$$
\partial=[\Gamma(x\partial+1)]^{-1}x^{-1}\Gamma(x\partial+1) \tag{8.7.9}
$$

由于

$$
\ln\partial=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{(\partial-1)^{k}}{k}
$$

易知有

$$
\ln\partial=-[\Gamma(x\partial+1)]^{-1}\ln x\Gamma(x\partial+1) \tag{8.7.10}
$$

进一步将上式用变量 y 写出，得

$$
\ln\partial=-\left[\Gamma\left(\frac{\partial}{\partial y}+1\right)\right]^{-1}y\Gamma\left(\frac{\partial}{\partial y}+1\right) \tag{8.7.11}
$$

注意

$$
y\Gamma\left(\frac{\partial}{\partial y}+1\right)=\left[y,\Gamma\left(\frac{\partial}{\partial y}+1\right)\right]+\Gamma\left(\frac{\partial}{\partial y}+1\right)y
$$

而

$$
\Gamma(z)=\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{z-1}\mathrm{d}t
$$

易知下式成立：

$$
\left[\Gamma\left(\frac{\partial}{\partial y}+1\right),y\right]=\int_{0}^{\infty}\mathrm{d}t\ln t\,\mathrm{e}^{-t}t^{z-1}=\Gamma'\left(\frac{\partial}{\partial y}+1\right)
$$

其中 $\Gamma'(z) = \dfrac{\mathrm{d}\Gamma(z)}{\mathrm{d}z}$。于是得到

$$\ln\partial = -\left[\Gamma\left(\frac{\partial}{\partial y}+1\right)\right]^{-1}\Gamma\left(\frac{\partial}{\partial y}+1\right)y + \left[\Gamma\left(\frac{\partial}{\partial y}+1\right)\right]^{-1}\Gamma'\left(\frac{\partial}{\partial y}+1\right)$$

再还原为 x 变量即得(8.7.8)式:

$$\ln\partial + \ln x = \psi(x\partial + 1)$$

感兴趣的是(8.7.4)式的物理意义,尽管它来源于与 QCD 相互作用的非微扰领头项,但在演化为(8.7.4)式后,可从更新的角度去理解它。下面将指出,(8.7.4)式表示具有近邻相互作用的 $s=0$ 的海森伯链的哈密顿量。为此,从 YB 化的问题谈起。

回忆第六章已详细讨论的,$\check{R}(x)$矩阵是与两个李代数表示直积分解相联系的。设两个权为 J 的 $SU(2)$表示直积,则完全可约的李代数子空间为

$$\wedge_J \otimes \wedge_J = \bigoplus_{j=0}^{2J} \wedge_j \tag{8.7.12}$$

相应地

$$\check{R}(x) = \sum_{j=0}^{2J} \rho_j(x) P_j(q) \tag{8.7.13}$$

由于 $\check{R}(x)$可相差公因子,可令 $\rho_0 = 1$,于是按 YB 化方案(6.6.11)式,得

$$\rho_j(x) = \prod_{n=1}^{j} \frac{(\lambda_n/\lambda_{n-1}) + x}{1 + (\lambda_n/\lambda_{n-1})x} \tag{8.7.14}$$

对 $SU(2)$情况,由(6.2.13)式易得:

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} = -q^{n(n+1)}/q^{(n-1)n} = -q^{2n}$$

于是得到

$$\rho_j(x) = \prod_{n=1}^{j} \frac{x - q^{2n}}{1 - q^{2n}x} = (-1)^j \prod_{n=1}^{j} \frac{\mathrm{sh}(u - nr)}{\mathrm{sh}(u + nr)} \tag{8.7.15}$$

其中 $x = \mathrm{e}^{2u}$，$q = \mathrm{e}^{r}$。取有理极限：$u \to ru$，$r \to 0$，有

$$\rho_j(x)\big|_{有理} = \prod_{n=1}^{j} \left(\frac{n-u}{n+u}\right) \tag{8.7.16}$$

利用 $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ 可将上式改写为：

$$\rho_n(u) = (-1)^n \frac{\Gamma(u)\Gamma(u+1)}{\Gamma(u-n)\Gamma(u+n+1)} \tag{8.7.17}$$

其中 n 为 $j = n$ 的权，而 u 为谱参数，$(-1)^n = \pm 1$，表示(8.7.12)式右端的子表示是对称或反对称的性质。

为了决定 $\check{R}(x)$，应当把(8.7.17)式代入(6.6.2)式中进行计算，这时便得到任意自旋时的 $\check{R}(x)$，然后再应用(3.3.17)式得到哈密顿量 $H_{n,n+1}$，从而得到总哈密顿量 $H = \sum_{n=1}^{N} H_{n,n+1}$。但这样求得的(6.6.2)式过程相当复杂。我们可以用一个不严格、但合理的方式求出 $\check{R}(x)$。

由于(8.7.17)式中的权 n 从 0 取到 $2J$，它就是(8.7.12)式右端每个李代数子表示的权，亦即每个子块的权。前面已经指出，投影算符 P_n 的作用就是从(8.7.12)式直积的大矩阵中，挑出权为 $j = n$ 的那个子方块(子空间)来。这里 n 就代表总角动量算符 $\boldsymbol{J}^2$ 在该子空间的本征值，而这种表示就是类似一个对角化的特殊表示。当过渡到算符形式，即把 $n \to \boldsymbol{J}^2 = J(J+1)$ 中 $\hat{J}$ 算符形式，就不仅仅限于权为 n 的方块了，这时将作用于整个 $\Lambda_J \otimes \Lambda_J$ 上，因而就是 $\check{R}(x)$ 矩阵本身。去掉无关的$(-1)^n$ 因子，这时便有

$$\check{R}(u) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(u+1)}{\Gamma(u-\hat{J})\Gamma(u+\hat{J}+1)} \tag{8.7.18}$$

这正是文献[32]的结果。

有了 $\check{R}(u)$ 矩阵,将上式对 u 取微商并令 $u=0$,则立即得到任意自旋值的自旋链模型的哈密顿量的特殊情况:格点上自旋为零的情况。为方便引入 $u=\mathrm{i}\lambda$,则

$$H=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(\mathrm{i}\lambda)}\check{R}(u)|_{u=0}[\check{R}(0)]^{-1} \tag{8.7.19}$$

为了正规化方便,将(8.7.18)式变化一下:

$$\check{R}(u,s)=\frac{\Gamma(\mathrm{i}\lambda-s)\Gamma(\mathrm{i}\lambda+2s+1)}{\Gamma(\mathrm{i}\lambda-\hat{J})\Gamma(\mathrm{i}\lambda+\hat{J}+1)} \tag{8.7.20}$$

显然,当 $s=0$ 时(8.7.20)式回到(8.7.18)式,于是

$$\begin{aligned}H(s)&=\frac{1}{\check{R}(0,s)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(\mathrm{i}\lambda)}\check{R}(u,s)|_{u=0}\\&=\frac{\Gamma'(-2s)}{\Gamma(-2s)}+\frac{\Gamma'(2s+1)}{\Gamma(2s+1)}-\frac{\Gamma'(-\hat{J})}{\Gamma(-\hat{J})}\\&\quad-\frac{\Gamma'(\hat{J}+1)}{\Gamma(\hat{J}+1)}\\&=-\psi(-\hat{J})-\psi(\hat{J}+1)+\psi(-2s)+\psi(2s+1)\end{aligned} \tag{8.7.21}$$

利用 $\psi(x+1)=\psi(x)+\dfrac{1}{x}$,得

$$\begin{aligned}H(s)=&-\{\psi(-\hat{J})+\psi(\hat{J}+1)\}\\&+\psi(1+2s)+\psi(1-2s)+\frac{1}{2s}\end{aligned} \tag{8.7.22}$$

当然(8.7.19)式亦可写成连乘形式。利用公式:

$$\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma(\alpha+\gamma)}=\prod_{k=0}^{\infty}\left[\left(1+\frac{\gamma}{\alpha+k}\right)\left(1-\frac{\gamma}{\beta+k}\right)\right] \tag{8.7.23}$$

令 $\beta = u = \mathrm{i}\lambda$, $\alpha = \mathrm{i}\lambda + 1$, $\gamma = \hat{J}$，则得

$$\check{R}(u) = \prod_{k=0}^{\infty}\left[\left(1 + \frac{\hat{J}}{\mathrm{i}\lambda + 1 - k}\right)\left(1 - \frac{\hat{J}}{\mathrm{i}\lambda + k}\right)\right] \quad (u = \mathrm{i}\lambda)$$

或
$$\check{R}(u) = \prod_{k=0}^{\infty}\left[1 - \frac{\hat{J}(\hat{J}+1)}{(u+k)(u+k+1)}\right] \tag{8.7.24}$$

它的好处是量子算符 $\hat{J}$ 在分子上面。$\hat{J}$ 的实现是很自然的：它由两个格点处自旋合成，

$$\boldsymbol{J}_{ij} = \boldsymbol{S}_i + \boldsymbol{S}_j$$

而按 $\hat{J}$ 的意义应取 $\boldsymbol{J}_{ij}^2$的本征值，设每个格点 i 处自旋模 s 均相同，则有

$$\boldsymbol{J}_{ij}^2 = \boldsymbol{S}_i^2 + \boldsymbol{S}_j^2 + 2\boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{S}_j$$

$\boldsymbol{S}_i^2 = \boldsymbol{S}_j^2 = s(s+1)$，而 $i \neq j$ 时 $\boldsymbol{S}_i$ 与 $\boldsymbol{S}_j$ 互相对易，故有

$$\boldsymbol{J}_{ij}^2 = 2s(s+1) + 2\boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{S}_j \tag{8.7.25}$$

当 $s = 0$ 时，得

$$\boldsymbol{J}_{jk}^2 = 2\boldsymbol{S}_j \cdot \boldsymbol{S}_k = \hat{J}_{jk}(\hat{J}_{jk} + 1) \tag{8.7.26}$$

这里 $\boldsymbol{S}_j$ 是作用在 j 格点处的自旋算符，因此它仍是量子空间算符，这就是 $\hat{J}(\hat{J}+1)$ 的意义，从而(8.7.24)式应记为：

$$\check{R}(u)_{jk} = \prod_{l=0}^{\infty}\left(1 - \frac{2\boldsymbol{S}_j \cdot \boldsymbol{S}_k}{(u+l)(u+l+1)}\right) \tag{8.7.27}$$

回到(8.7.22)式，令 $s = 0$，并丢掉无穷大发散项，则得到：

$$H = -(\psi(-\hat{J}) + \psi(1 + \hat{J})) + 2\psi(1) \tag{8.7.28}$$

正如上面指出的，只有 $\hat{J}(\hat{J}-1)$ 才有意义（等于 $2\boldsymbol{S}_j \cdot \boldsymbol{S}_k$），这时它们是作用在量子空间的算符。以下证明(8.7.28)式确实可以写

成 $\hat{J}$（$\hat{J}+1$）形式：

$$H=\sum_{l=0}^{\infty}\left\{\frac{2l+1}{l(l+1)-\boldsymbol{J}^2}-\frac{2}{l+1}\right\} \qquad (8.7.29)$$

事实上，利用公式：($\psi(1)\equiv C$)

$$\psi(x)=-C-\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{1}{l+x}-\frac{1}{l+1}\right)$$

可知

$$\psi(-x)+\psi(1+x)=-2C-\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2}{l+1}+\frac{1}{x}-\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l}{l^2-x^2}$$

很容易算出(8.7.29)式，其意义在于 H 中以 $\boldsymbol{J}^2$ 形式出现，从而(8.7.26)式保证 H 以 $\boldsymbol{S}_j\cdot\boldsymbol{S}_k$ 形式的幂次出现。

现在已经明确，(8.7.28)式形式的哈密顿量事实上将以 $\hat{J}$（$\hat{J}+1$）$=2\boldsymbol{S}_j\cdot\boldsymbol{S}_k$ 形式出现，而 $\boldsymbol{S}_j$ 是作用在第 j 个格点处的自旋量子力学算符，满足

$$[S_j^\alpha,\ S_k^\beta]=\mathrm{i}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}S_j^\gamma\delta_{jk} \qquad (8.7.30)$$

现在用复数 Z_i 坐标来实现(8.7.30)式，很容易证明

$$S_k^+=z_k^2\partial_k-2sz_k,\ S_k^-=-\partial_k,\ S_k^3=z_k\partial_k-s \qquad (8.7.31)$$

其中 $\partial_k=\dfrac{\partial}{\partial z_k}$，$\boldsymbol{S}^2=s(s+1)$，$S_k^\mp=S_k^1\pm\mathrm{i}S_k^2$，则(8.7.31)式必满足(8.7.30)式。实现(8.7.31)式显然是一种非线性表示，它是无穷维的，与过去熟悉的自旋 1/2 等有限维表示大不一样。利用(8.7.31)式易知下式成立：

$$\boldsymbol{J}_{jk}^2=\hat{J}_{jk}(\hat{J}_{jk}+1)=2\boldsymbol{S}_j\cdot\boldsymbol{S}_k=-(z_j-z_k)^2\partial_j\partial_k \qquad (8.7.32)$$

将(8.7.32)式代入(8.7.28)式，便将 H_{jk} 表示为非线性微分算符，

求出它的本征值与本征函数便可讨论谱问题[33]。但 ψ 函数中含有无穷阶微商，因此直接求解一般情况几乎是不可能的。

综上所述，L. Lipatov 将非微扰 QCD 领头项的主要贡献(8.7.1)式和(8.7.2)式转化成一个自旋 0 的以下哈密顿形式求解本征值问题：

$$H = \sum_{n} H_{n,\,n+1}$$

$$H_{n,\,n+1} = -\psi(-\hat{J}_{n,\,n+1}) - \psi(\hat{J}_{n,\,n+1} + 1) + 2c \tag{8.7.33}$$

而 $\hat{J}_{n,\,n+1}(\hat{J}_{n,\,n+1} + 1) = 2\boldsymbol{S}_n \cdot \boldsymbol{S}_{n+1}$，且 $s(s+1) = 0$。它本质上是无穷维表示 $s = 0$(或 $s = -1$) 的 XXX 型海森伯链问题。过去常常讨论 $S = 1/2$ 情况，这时由于是两维表示，从而 $(S_i^+)^2 = (S_i^-)^2 = 0$，$(S_i^3)^2 =$ 常数，因而哈密顿量 $H_{n,\,n+1}$ 中只存在常数与 $\boldsymbol{S}_n \cdot \boldsymbol{S}_{n+1}$ 的线性项。现在 $s = 0$(或 $s = -1$，均保证 $s(s+1) = 0$) 必须是无穷维表示，因而哈密顿量应表为 $\sum_{m,\,n}^{\infty} C_m (\boldsymbol{S}_n \cdot \boldsymbol{S}_{n+1})^m$，即包含任意阶幂次。(8.7.33)式表明，这个具体模型限定为 ψ 函数的形式。

求解(8.7.33)式本征值问题是非常困难的事情。涉及许多具体问题，限于本书的目的，不拟赘述。要强调的是，只有两个格点时有明显解析解。

§8.8 介观无序输运模型与带边界的 C-S 模型

根据介观尺寸中有关无序情况的输运过程的微观理论(例如参阅有关文献[34～36])，一个无序体系，例如介观尺度导体，只能看整体平均效果，这时输运过程用矩阵描述。整个系统分为三个区域：以平面波入射与反射的导体区Ⅰ，进入无序导体的区域Ⅱ以及

输出区域Ⅲ。输入与输出各有许多分量，它们之间以矩阵相联结。如用系综描述，这个矩阵有何种概率分布？由于对称性存在它必须具有什么性质？这都构成对这个矩阵的形式的限制。粗略说，应当考虑流守恒、时间反演不变，两块导体连接在一起应满足概率论中的马尔可夫条件以及最大熵原则等。结论是这个概率分布 P 依赖于一组数 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N$，记为 $\{\lambda_i\}$，其中诸 λ_i 为转移矩阵的本征值。假定导体的长度 L 远比其宽度为大，即可近似视为一导线。引入长度 s，它以平均自由程为单位，则有 DMPK 方程(由 Drokhov-Mello-Pereyra-Kumar 提出[36])：

$$\frac{\partial P}{\partial S} = \frac{2}{\gamma} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \lambda_i (1 + \lambda_i) J \frac{\partial}{\partial \lambda_i} J^{-1} P \tag{8.8.1}$$

其中 γ 为常数，$\gamma = \beta N + 2 - \beta$，$\beta = 1, 2, 4$。$\beta = 1$ 表示时间反演对称，$\beta = 2$ 则该反演被破坏，$\beta = 4$ 对应时间反演守恒但自旋转动对称性被破坏。(8.8.1)式中的 J 由下式给出：

$$J\{\lambda_n\} = \prod_{i<j} |\lambda_i - \lambda_j|^{\beta} \tag{8.8.2}$$

在文献[35, 36]中，引入了新变量 x_n 代替 λ_n：

$$\lambda_n = \mathrm{sh}^2 x_n \tag{8.8.3}$$

再做适当代换便将(8.8.1)式化为带边界的卡洛杰慕-萨则兰德(简称 C-S)模型，从而利用 YB 系统的求解方法解出(8.8.1)式。

在介绍这个代换之前，先回忆§ 5.4 的讨论。由(5.4.23)式知道 YB 可积系统允许有哈密顿量(5.4.23)式，当然全部 sin 函数都可以改成 sh 函数，它仍然成立。K_{ij}与$\overline{K}_{ij}$为置换算符，可取本征值为 1(对玻色子)，对(5.4.23)式将 sin 换为 sh；cos 换为 ch 情况，再选 $\lambda_1'(\lambda_1' - 1) = -\lambda_1(\lambda_1 - 1)$，则(5.4.23)式变为

$$\mathscr{H}_2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} p_i^2 + \lambda' \sum_{i<j}^{N}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}^2(x_i - x_j)} + \frac{1}{\mathrm{sh}^2(x_i + x_j)}\right)$$
$$+ g_2 \sum_{i<1}^{N}\left(\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x_i} - \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x_i}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} p_i^2 + g_2 \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\mathrm{sh}^2 2x_i}$$
$$+ g_1 \sum_{i<j}^{N}\left(\frac{\mathrm{sh}^2(x_i + x_j) + \mathrm{sh}^2(x_i - x_j)}{(\mathrm{ch}2x_i - \mathrm{ch}2x_j)^2}\right) \tag{8.8.4}$$

利用熟知公式：

$$\mathrm{sh}^2 2x + \mathrm{sh}^2 2y - (\mathrm{ch}2x - \mathrm{ch}2y)^2 = \mathrm{sh}^2(x+y) + \mathrm{sh}^2(x-y)$$

于是得到

$$\mathscr{H}_2 = H + Ng_1$$

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} p_i^2 + g_2 \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\mathrm{sh}^2 2x_i} + g_1 \sum_{i<j}\frac{\mathrm{sh}^2 2x_i + \mathrm{sh}^2 2x_j}{(\mathrm{ch}2x_i - \mathrm{ch}2x_j)^2} \tag{8.8.5}$$

其中 g_1，g_2 为常数。(8.8.4)式表明，在每个 $x_i = 0$ 点处均有反射源，$\frac{1}{\mathrm{sh}^2(x_i - x_j)}$ 项表示散射，而 $\frac{1}{\mathrm{sh}^2(x_i + x_j)}$ 项表示在 $x_i = -x_j$ 处有反射“壁”。

现在证明(8.8.1)式可以转变为(8.8.5)式形式[36]。注意在代换变量(8.8.3)式时，相应的概率密度也有变化，因为这时 $P(\lambda, s)$ 转化为用 $P(x, s)$ 描述，引入

$$P(\lambda, s)\prod_{i=1}^{N} \mathrm{d}\lambda_i = P(x, s)\prod_{i=1}^{N} \mathrm{d}x_i \tag{8.8.6}$$

则有

$$P(x, s) = P(\lambda, s)\prod_{i=1}^{N} \mathrm{sh}2x_i \tag{8.8.7}$$

其中$P(\lambda, s) = P(\{\lambda_i\}, s)$，$P(x, s) = P(\{x_i\}, s)$。将方程(8.8.1)用变量$\{x_i\}$表示，有

$$\frac{\partial}{\partial s}\frac{P(x, s)}{\prod_j \mathrm{sh}2x_j} = \frac{1}{2\gamma}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\mathrm{sh}2x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\mathrm{sh}2x_i\left[-\frac{\partial \ln J}{\partial x_i}\frac{P(x, s)}{\prod_j \mathrm{sh}2x_j}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{P(x, s)}{\prod_j \mathrm{sh}2x_j}\right)\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{2\gamma}\left(\prod_j \mathrm{sh}2x_j\right)^{-1}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left\{-P(x, s)\frac{\partial \ln J}{\partial x_i}\right.$$

$$\left.+\frac{\partial P}{\partial x_i} - P(x, s)\frac{2\mathrm{ch}2x_i}{\mathrm{sh}2x_i}\right\}$$

引入

$$J' = J\prod_j \mathrm{sh}2x_j = \prod_{i<j}|\mathrm{sh}^2x_i - \mathrm{sh}^2x_j|^\beta \prod_k \mathrm{sh}2x_k \tag{8.8.8}$$

则得

$$\frac{\partial P(x, s)}{\partial s} = \frac{1}{2\gamma}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial P(x, s)}{\partial x_i} - P(x, s)\frac{\partial \ln J'}{\partial x_i}\right) \tag{8.8.9}$$

现在引入：

$$P(x, s) = [J'(x, s)]^{1/2}\psi(x, s) \equiv \xi\psi(x, s) \tag{8.8.10}$$

由于

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} - P\frac{\partial \ln J'}{\partial x_i} = (J')^{1/2}\frac{\partial \psi}{\partial x_i} - \frac{1}{2}P\frac{\partial \ln J'}{\partial x_i}$$

可得：

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial P}{\partial x_i} - P\frac{\partial \ln J'}{\partial x_i}\right)$$

$$= (J')^{1/2}\left\{\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i^2} - \frac{1}{4}\psi\left(\frac{\partial \ln J'}{\partial x_i}\right)^2 - \frac{1}{2}\psi\frac{\partial^2 \ln J'}{\partial x_i^2}\right\}$$

对 ψ 的方程为

$$\frac{\partial \psi}{\partial s}=\frac{1}{2\gamma}\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\partial^{2}\psi}{\partial x_{i}^{2}}-\frac{1}{4}\psi\left(\frac{\partial \ln J'}{\partial x_{i}}\right)^{2}-\frac{1}{2}\psi\frac{\partial^{2}\ln J'}{\partial x_{i}^{2}}\right] \tag{8.8.11}$$

可计算出：

$$\frac{\partial \ln J'}{\partial x_{i}}=\frac{\partial}{\partial x_{i}}\left\{\beta\sum_{i<j}\ln\left|\operatorname{sh}^{2}x_{i}-\operatorname{sh}^{2}x_{j}\right|+\sum_{i}\ln \operatorname{sh}2x_{i}\right\}$$

$$=\beta \operatorname{sh}2x_{i}\sum_{i\neq j}\frac{1}{\operatorname{sh}^{2}x_{i}-\operatorname{sh}^{2}x_{j}}+\frac{2\operatorname{ch}2x_{i}}{\operatorname{sh}2x_{i}}$$

再取一次微商后代入(8.8.11)式，得到

$$\frac{\partial \psi}{\partial s}=\frac{1}{2\gamma}\sum_{i=1}^{N}\left\{\frac{\partial^{2}\psi}{\partial x_{i}^{2}}-\frac{1}{4}\psi\left[\beta^{2}\operatorname{sh}^{2}2x_{i}f^{2}(x_{i})+8\beta \operatorname{ch}2x_{i}f(x_{i})\right.\right.$$

$$\left.\left.+2\beta \operatorname{sh}2x_{i}\frac{\partial f(x_{i})}{\partial x_{i}}+4\left(1-\frac{1}{\operatorname{sh}^{2}2x_{i}}\right)\right]\right\}$$

其中

$$f(x_{i})=\sum_{i\neq j}\frac{1}{\operatorname{sh}^{2}x_{i}-\operatorname{sh}^{2}x_{j}}$$

注意到

$$\sum_{i=1}^{N}\operatorname{ch}2x_{i}f(x_{i})=2\sum_{i}\operatorname{sh}^{2}x_{i}\sum_{i\neq j}\frac{1}{\operatorname{sh}^{2}x_{i}-\operatorname{sh}^{2}x_{j}}=N(N-1)$$

$$\sum_{i}\operatorname{sh}2x_{i}\frac{\partial f(x_{i})}{\partial x_{i}}=-4\sum_{i<j}\frac{\operatorname{sh}^{2}2x_{i}+\operatorname{sh}^{2}2x_{j}}{[\operatorname{ch}2x_{i}-\operatorname{ch}2x_{j}]^{2}}$$

$$\sum_{i}\operatorname{sh}^{2}2x_{i}f^{2}(x_{i})=4\sum_{i<j}\frac{\operatorname{sh}^{2}2x_{i}+\operatorname{sh}^{2}2x_{j}}{[\operatorname{ch}2x_{i}-\operatorname{ch}2x_{j}]^{2}}+8\begin{pmatrix}N\\3\end{pmatrix}$$

于是得到

$$\frac{\partial \psi}{\partial s}=\frac{1}{2\gamma}\sum_{i=1}^{N}\left\{\frac{\partial^{2}\psi}{\partial x_{i}^{2}}-\frac{\beta^{2}}{4}\psi\left(\left[4\sum_{i<j}\frac{\operatorname{sh}^{2}2x_{i}+\operatorname{sh}^{2}2x_{j}}{(\operatorname{ch}2x_{i}-\operatorname{ch}2x_{j})^{2}}+8\begin{pmatrix}N\\3\end{pmatrix}\right]\right.\right.$$

$$+8\beta N(N-1)-8\beta\sum_{i<j}\frac{\mathrm{sh}^2 2x_i+\mathrm{sh}^2 2x_j}{(\mathrm{ch}2x_i-\mathrm{ch}2x_j)^2}$$

$$+4\left(1-\frac{1}{\mathrm{sh}^2 2x_i}\right)\Bigg)\Bigg\}$$

$$=\frac{1}{2\gamma}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 2x_i}\right)\psi$$

$$-\frac{\beta(\beta-2)}{2\gamma}\psi\sum_{i<j}\frac{\mathrm{sh}^2 2x_i+\mathrm{sh}^2 2x_j}{(\mathrm{ch}2x_i-\mathrm{ch}2x_j)^2}-u\psi \qquad (8.8.12)$$

$$u=-\frac{1}{\gamma}\left\{\frac{\beta^2}{6}N(N-1)(N-2)+\beta N(N-1)+\frac{N}{2}\right\} \qquad (8.8.13)$$

最后得到

$$-\frac{\partial\psi}{\partial s}=(H-u)\psi \qquad (8.8.14)$$

其中

$$H=-\frac{1}{2\gamma}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\frac{1}{\mathrm{sh}^2 2x_i}\right)$$

$$+\frac{\beta(\beta-2)}{2\gamma}\sum_{i<j}\frac{\mathrm{sh}^2 2x_i+\mathrm{sh}^2 2x_j}{(\mathrm{ch}2x_i-\mathrm{ch}2x_j)^2} \qquad (8.8.15)$$

它正是(8.8.5)式所示的带边界的(卡洛杰若-萨则兰德)模型。

文献[36]给出了(8.8.1)式的解:

$$P(\{x_n\},s)=\prod_{i<j}\left|\mathrm{sh}^2 x_j-\mathrm{sh}^2 x_i\right|^{\beta/2}(x_j^2-x_i^2)$$

$$\cdot\prod_{k}\left[\exp(-\gamma x_k^2/2s)\,x_k(\mathrm{sh}2x_k)^{1/2}\right] \qquad (8.8.16)$$

详细讨论可参见文献[36]。

从这个例子可以看到,从 YB 系统得到的一些模型往往具有深层的物理含义。其实在形如(8.8.1)式的概率满足的方程如果写成一般形式,由于概率守恒等限制,(8.8.1)式右端常常受到限制,因而对矩阵形式有某些限制条件。而满足这些限制条件的矩阵常

常与 YBE 具有一定联系，当然更一般情况也许越过 YBE，对前一种情况可以进行较为一般的讨论。这方面的进展可参看文献[37]。

§8.9　$Y(SU(3))$在基本粒子理论中的应用

以上讨论了许多与 $SU(2)$代数相联系的 Yangian 与量子代数[分别记为$Y(SU(2))$与$U_q(SU(2))$的物理含义与应用，现在举出一个例子介绍与 $SU(3)$联系的 Yangian[记为 $Y(SU(3))$]的一个物理应用，它虽然是试探性的推广，却具有相当的物理含义。

很久以前就知道基本粒子以 $SU(3)$分类，而 $SU(3)$以盖尔曼(Gell-Mann)矩阵 $\lambda^a(a=1, 2, \cdots, 8)$ 为基矢。引入 $F^a=\frac{1}{2}\lambda^a$，则由$[\lambda^a, \lambda^b]=2\mathrm{i}f^{abc}\lambda^c$ 易知：

$$[F^a, F^b]=\mathrm{i}f^{abc}F^c \tag{8.9.1}$$

其中

$$\begin{cases} f^{123}=1, f^{147}=f^{246}=f^{257}=f^{345}=-f^{156}=-f^{367}=\dfrac{1}{2} \\ f^{458}=f^{678}=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \tag{8.9.2}$$

引入

$$I^{\pm}=F^1\pm \mathrm{i}F^2, U^{\pm}=F^6\pm \mathrm{i}F^7, V^{\pm}=F^4\mp \mathrm{i}F^5$$

$$I^3=F^3, F^8=\frac{\sqrt{3}}{2}Y$$

因而$SU(3)$亦可用 $I^{\pm}$, I^3, $U^{\pm}$, $V^{\pm}$, Y 表达，分别称为 I 旋、U 旋与 V 旋与超荷。

(8.9.1)式易表达为：

$$
\begin{cases}
[I^3, I^\pm] = \pm I^\pm, \ [I^+, I^-] = 2I^3, \ [I^\alpha, Y] = 0 \ (\alpha = \pm, 3) \\
[I^3, U^\pm] = \mp \frac{1}{2} U^\pm, \ [Y, U^\pm] = \pm U^\pm, \ [U^+, U^-] = -I^3 + \frac{3}{2} Y \\
[I^3, V^\pm] = \mp \frac{1}{2} V^\pm, \ [Y, V^\pm] = \mp V^\pm, \ [V^+, V^-] = -I^3 - \frac{3}{2} Y \\
[I^\pm, U^\pm] = \pm V^\mp, \ [U^\pm, V^\pm] = \pm I^\mp, \ [V^\pm, I^\pm] = \pm U^\mp \\
[I^\pm, U^\mp] = [U^\pm, V^\mp] = [V^\pm, I^\mp] = 0
\end{cases}
\tag{8.9.3}
$$

假定第 i 个粒子相应的 I 旋、U 旋、V 旋及超荷以相应下标表出，即用 $I_i^\pm$，I_i^3，$U_i^\pm$，$V_i^\pm$ 与 Y_i 表示，则 $I^a = \sum_i F_i^a (a = 1, 2, \cdots, 8)$，即对应 $SU(2)$理论中的 I 矢量算符，而当 F_i^a 选为 $SU(3)$基本表示时，经过相当的运算可以证明下面的 J_a 与 I^a 组成 $Y(SU(3))$：

$$
J_a = \left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\right) \sum_{i \neq j} W_{ij} f^{abc} F_i^b F_j^c \tag{8.9.4}
$$

上式中相重指标代表求和，i，j 为粒子指标，而 $a, b, c = 1, 2, \cdots, 8$。为满足 Yangian，$W_{ij}$应满足：

$$
\begin{cases}
W_{ij} = - W_{ji} \\
\Delta_{ijk} = W_{ij} W_{ik} + W_{jk} W_{ji} + W_{ki} W_{kj} = 1
\end{cases}
\tag{8.9.5}
$$

这个结果与 $SU(2)$情况相似（见(4.3.27)式），因在许多行为方面，$SU(3)$的基本表示与 $SU(2)$是有些类似的。注意指标相重不求和。

用 $Q^{(1)}$代表 $Y(SU(3))$的除 I^a 外的诸生成元集合，即

$$
Q_a^{(1)} \equiv J_a = \sum_i J_i^a \ (a = 1, 2, \cdots, 8)
$$

或

$$
Q^{(1)} = \{I_\pm^{(1)}, U_\pm^{(1)}, V_\pm^{(1)}, I_3^{(1)}, Y^{(1)}\} \tag{8.9.6}
$$

这里加入(1)记号是为了强调这些算符不属于李代数 $SU(3)$ 的集合。使用(8.9.6)式记号，它亦可表示为

$$
\begin{cases}
I_{\pm}^{(1)} = \mp \sum_{i\neq j}^{N} W_{ij}\left(I_i^{\pm} I_j^3 + \frac{1}{2} U_i^{\mp} V_j^{\mp} \right) \\
I_3^{(1)} = \frac{1}{2} \sum_{i\neq j}^{N} W_{ij}\left(I_i^{+} I_j^{-} - \frac{1}{2}(U_i^{+} U_j^{-} + V_i^{+} V_j^{-}) \right) \\
U_{\pm}^{(1)} = \pm \frac{1}{2} \sum_{i\neq j}^{N} W_{ij}\left(I_i^{\mp} V_j^{\mp} + U_i^{\pm}\left(I_j^3 - \frac{3}{2} Y_j \right) \right) \\
V_{\pm}^{(1)} = \pm \frac{1}{2} \sum_{i\neq j}^{N} W_{ij}\left(- I_i^{\mp} U_j^{\mp} + V_i^{\pm}\left(I_j^3 + \frac{3}{2} Y_j \right) \right) \\
Y^{(1)} = \frac{1}{2} \sum_{i\neq j}^{N} W_{ij}(U_i^{+} U_j^{-} - V_i^{+} V_j^{-})
\end{cases}
\tag{8.9.7}
$$

现在将证明，当 $N = 2$ 时，$Y(SU(3))$ 将作为一个跃迁算符的集合把 $SU(3)$ 的单态变换为它的八重态。忆及(4.3.22)式，那里 $Y(SU(2))$ 将两个自旋 $\frac{1}{2}$ 组成的单态变换为相应的三重态，现在只不过把这个概念推广到 $SU(3)$ 情况。由于与 $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 1 \oplus 0$ 相应地是 $3 \otimes 3^* = 8 \oplus 1$，所以只能讨论介子态。

熟知 $SU(3)$ 对称的介子单态为：

$$
|\Omega^0\rangle \equiv |\eta^{0\prime}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} |u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}\rangle \tag{8.9.8}
$$

而八重态为

$$
\begin{cases}
|\pi^+\rangle = -|u\bar{d}\rangle,\ |\pi^-\rangle = |d\bar{u}\rangle,\ |\pi^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle) \\
|K^+\rangle = |u\bar{s}\rangle,\ |K^0\rangle = |d\bar{s}\rangle,\ |K^-\rangle = |s\bar{u}\rangle \\
|\bar{K}^0\rangle = |\bar{d}s\rangle,\ |\eta^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(-|u\bar{u}\rangle + 2|s\bar{s}\rangle - |d\bar{d}\rangle)
\end{cases}
\tag{8.9.9}
$$

或如图 8.2 所示。

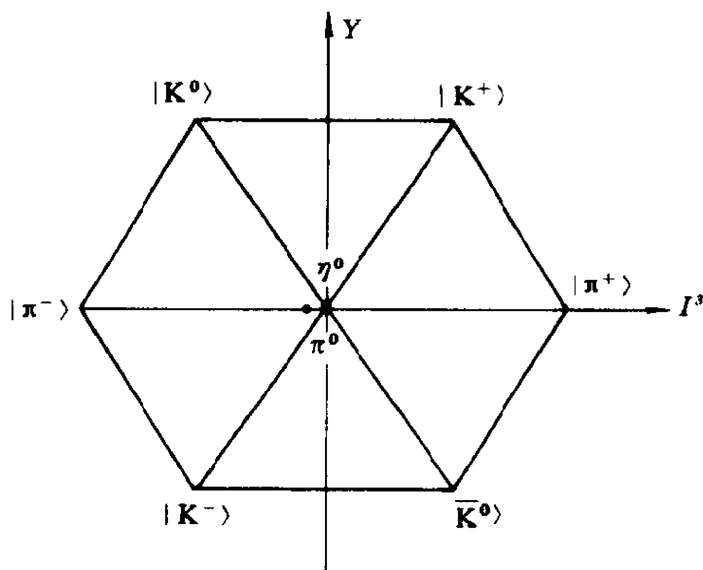


图　8.2

现在考虑(8.9.5)式最简单的解：

$$W_{ij} = 1(i < j) \quad 0(i = j) \quad -1(i > j) \tag{8.9.10}$$

并且 $N = 2$，即最简单的二体 $Y(SU(3))$。直接将(8.9.7)式作用在 $|\eta^{0\prime}\rangle$，即(8.9.8)式上，经过相当的运算得到以下结果：

$$\begin{cases} I_+^{(1)} |\Omega^0\rangle = \dfrac{\sqrt{3}}{2} |\pi^+\rangle \quad I_-^{(1)} |\Omega^0\rangle = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} |\pi^-\rangle \\ U_+^{(1)} |\Omega^0\rangle = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} |K^0\rangle \quad U_-^{(1)} |\Omega^0\rangle = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} |\overline{K}^0\rangle \\ V_+^{(1)} |\Omega^0\rangle = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} |K^-\rangle \quad V_-^{(1)} |\Omega^0\rangle = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} |K^+\rangle \\ I_3^{(1)} |\Omega^0\rangle = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \dfrac{\sqrt{3}}{2} |\pi^0\rangle \\ Y^{(1)} |\Omega^0\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}} |\eta^0\rangle \end{cases} \tag{8.9.11}$$

用图表示即为图 8.3。

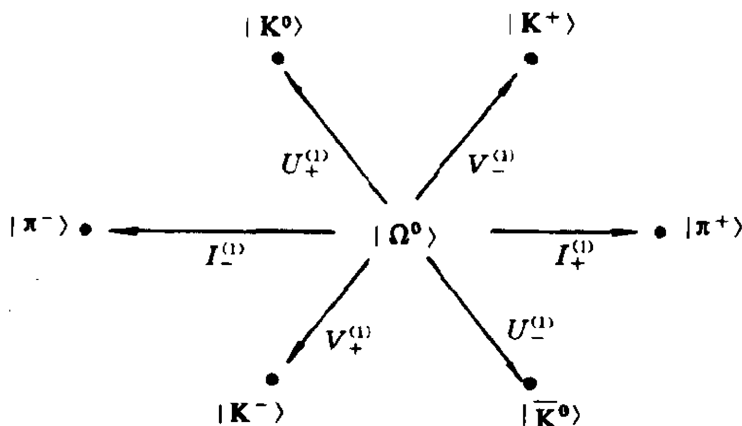


图　8.3

以及

$$|\eta^0\rangle \xleftarrow{Y^{(1)}} |\Omega^0\rangle \xrightarrow{I_3^{(1)}} |\pi^0\rangle \tag{8.9.12}$$

当然，原来李代数之间的 I，$V^{\pm}$，$U^{\pm}$，Y 的作用仍全部保持。

图 8.3 与(8.9.12)式的计算过程较为繁琐，为节省篇幅而略去详细计算。从(8.9.11)式与(8.9.12)式结果来看，$SU(3)$的单态、八重态以及它们之间的跃迁算符(8.9.7)式形成了一个更大的表示，从这里也可看出 Yangian 具有相当丰富的物理意义，但因为它超出了李代数，我们只是过去没有注意它罢了，其实它在广泛的物理领域都是存在的。由于这种新型、更大的对称性所引起的物理后果，值得进一步探讨。

参考文献

1. 钱伯初，曾谨言. 量子力学习题精选与剖析. 北京：科学出版社，1988
2. Wiegmann P B, Zabrodin A Z. Phys Rev Lett, 1994, 7:1890
   Hatsugai Y, Kohmoto M, Wu Y S. Phys Rev Lett, 1994, 73:1134
3. Su W P, Schrieffer J R, Heeger A J. Phys Rev Lett, 1979, 42:1698
   Takagama H, Lin-Liu Y R, Maki K. Phys Rev, 1980, 21:2388
4. Genbenshtein D I, Krube E B. Uspekhi Fizica, 1985, 146; 553 (In Russia)，及所引文献

王育邠，葛墨林．大学物理中的前沿问题．兰州：兰州大学出版社，1987

5. Chen G H, Kung L M, Ge M L. Phys Rev, 1996, B53:9540
6. Susskind L, Glogower J. Physics, 1964, 1:41
7. Pegg D T, Barnett S M. Phys Rev, 1989, A39:1665
8. De Concini C, Kac V G, Gollooque Dixmier. Progress in Math, 1990, 92:471
   Jimbo M. Topics from Representations of $U_q(g)$—— An Introduction Guide to Physicists. In: Ge M L, ed. Quantum Groups and Quantum Integrable System, Nankai Lectures on Mathematical Physics. Singapore: World Scientific Publ Co Ltd, 1992. 1
9. Sun C P, Ge M L. J Phys, 1991, A24:3265; A24:L969; q-Boson Realization Theory of Quantum Algebras and Its Applications to Yang-Baxter Equations. In: Ge M L, ed. Quantum Groups and Quantum Integrable System, Nankai Lectures on Mathematical Physics, Singapore: World Scientific Publ Co Ltd, 1992, 136
10. Fu H C, Ge M L, J Math Phys, 1992, 33:427; J Phys, 1992, A25:L1233
    Ge M L, Liu X F, Sun C P. J Phys, 1991, A24:2907
    马中骐．杨-巴克斯特方程与量子包络代数．北京：科学出版社，1993
11. Fu H C, Ge M L. Physical Quantization and Cyclic Representation of Quantum Algebra. Tianjin: Nankai Preprint, 1994; Chen G H, Ge M L. Phys Rev, 1996, B54:765
12. Fuzikawa K. Phys Rev, 1995, A52:3299
13. Vaccaro J A, Pegg D T. Opt Commun, 1989, 70:529; 1990, 37:17
    Gronbech-Jensen N, Christiansen P L. J Opt Soc Amer, 1989, B6: 2423
14. Shapiro J H, Shepard S R. Phys Rev, 1991, A43:3795
    Kuang L M, Chen X. Phys Lett, 1994, A186:8
15. Chen G H, Ge M L. Effects of Phase Quantization in Josephson Currents. Tianjin: Nankai Seminar, 1995
16. Fu H C, Ge M L, Wu Y S. Application of Cyclic Representation to Hofstadter Model. Tianjin: Sixth Nankai International Workshop, 1993
17. 在众多与本章相近的参考文献中可以参阅早期文献
    Komohto K. Ann Phys, 1985, 160:343 及所列文献
18. Niu Q, Thouless D J, Wu Y S. Phys Rev, 1985, B31:3372，及所列文献
19. Tao R, Haldane F D M. Phys Rev, 1986, B33:3844
20. Faddeev L P, Kashaev R M. Commun Math Phys, 1995, 169:181

21. Chen G H, Ge M L. Phys Rev, 1996, B54:7654
22. 孙昌璞. 量子代数的 q 变形玻色实现理论及其对杨-巴克斯特方程的应用;[博士论文]. 天津:南开大学,1992
23. 陈景灵,王宙斐,葛墨林,薛康. 中国科学,1998, A28:157
24. Shastry B S. Phys Rev Lett, 1986, 56:2453
25. Lieb E H, Wu F Y. Phys Rev Lett, 1968, 20:1445
26. Wang D F, Liu T T, Coleman P. Phys Rev, 1992, B46:6639
Wang D F, Gruber C. Phys Rev, 1994, B49:15712
Gruber C, Wang D F. Phys Rev, 1994, B50:3103
27. Shen Y L, Ge M L. Phys Rev, 1995, B52:11670
28. Gohman F, Inozemtsev V. Phys Lett, 1996, A241:161
29. Ge M L, Wang Z F, Xue K. Phys Lett, 1997, A235:41
30. Ge M L, Xue K. Hydrogen Atom and Yangian Symmetry. Tianjin: China-Canada Joint Workshop on Mathematical Physics, 1996; Phys Lett, A (in Press)
31. Lipatov L N. Phys Lett, 1990, B251:284; 1993, B309: 394; JETP Lett, 1994, 59: 596
32. Tarasov V O, Takhtajan L A, Faddeev L D. Theor Math Phys, 1983, 57:163
33. Faddeev L D, Korchemsky G P. Phys Lett, 1995, B342:311
34. Anderson P W, etal. Phys Rev, 1980, B22:3519
Mello P A, etal. Ann Phys, 1988, 181:290; Phys Rev, 1991, B44:3559
35. Beenakker C W J, Kejaei B. Phys Rev Lett, 1993, 71:3689; Phys Rev, 1994, B49:7499
36. Caselle M. Phys Rev Lett, 1995, 74:2776
37. Alcaraz F C, Rittenberg V. Phys Lett, 1993, B314:377
Arndt P f, Heinzel T, Rittenberg V. Stochastic Models on Ring and Quadratic Algebras, The Three Species Diffusion Problems. SISSA Ref 36/97/EP (Preprint)及所列文献
其较通俗理解可参阅:葛墨林,薛康. 量子力学中的杨-巴克斯特方程. 上海:上海科技教育出版社,1999. 第二章